应用数学和力学, 第 23 卷 第 11 期(2002 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 11_1195_08

广义 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题(II) ——扰动能量及位涡拟能的下界估计*

张 瑰[1], 项 杰[2]

(1. 解放军理工大学 理学院 数理系, 南京 211101; 2. 南京 003 信箱, 军事气象系, 南京 211101)

(戴世强推荐)

摘要: 在 Arnol' d 第二定理的范围内进一步讨论广义 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题, 得到了基流不稳定时扰动能量及位涡拟能的下界估计•

关 键 词: 广义 Phillips 模式; 非线性不稳定; 饱和问题; 基流
中图分类号: P433; O351 文献标识码: A

引 言

我们曾在 Arnol' d 第二定理的范围内讨论了上边界自由的广义 Phillips 模式的非线性稳定性问题, 得到了稳定性充分条件[1]• 在文献[2] 的引言部分中, 我们已提到过, 不稳定的饱和问题是流体运动不稳定性理论所包含的内容之一, 它是为了研究叠加于不稳定基流之上的扰动的演变信息, 其中包括扰动演变的行为、结构以及扰动能量和位涡拟能的上下界估计等• 无论是在理论研究或是在实际应用方面, 研究不稳定的饱和问题都有着非常重要的意义• 但由于扰动演变的复杂性, 目前对于饱和问题的研究主要集中在扰动能量和位涡拟能的上界估计, 如文献[2~ 9] , 而关于扰动演变下界估计的工作却很少•

曾庆存在研究 Haurwitz 波的非线性不稳定时曾研究了 Haurwitz 波不稳定的饱和问题, 得到了扰动能量和位涡拟能的下界估计[10]• 随后, 项杰和穆穆研究了 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题, 作出了基流不稳定时扰动能量及位涡拟能的下界估计[11]• 在上述工作的基础上, 我们进一步讨论广义 Phillips 模式基流非线性不稳定时扰动能量及位涡拟能的下界估计•

1 数学模型及一般的结果

为方便, 这里简要回顾广义 Phillips 模式的非线性稳定性判据, 细节问题详见文献[2]• 考虑层结稳定的两层流体, 上下层密度分别为 ρ_1、ρ_2, ($\rho_1 < \rho_2$) , 上下层平均厚度分别为 D_1、D_2, 流体运动可用下述 β 平面上无量纲的准地转位涡方程来描述(Pedlosky1987) :

---

* 收稿日期: 2001_11_29; 修订日期: 2002_05_25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40075014) ; 解放军理工大学理学院青年科研经费资助项目
作者简介: 张瑰(1973—) , 女, 安徽人, 博士•

$$\partial P_i/\partial t + \partial(\Phi_i, P_i) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

其中 t 为时间变量, Φ_i 是第 i 层的流函数, P_i 为第 i 层的准地转位涡

$$\begin{cases} P_1 = \Delta\Phi_1 + F_1(\Phi_2 - \Phi_1(1+a)) + \beta y, \\ P_2 = \Delta\Phi_2 - F_2(\Phi_2 - \Phi_1) + \beta y, \end{cases} \tag{2}$$

$\partial(A, B) = A_x B_y - A_y B_x$ 是二维 Jacobi 行列式, x、y 分别为纬向和经向坐标, Δ 是二维 Laplace 算子, $F_i = f_0^2 L^2/(g[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0] D_i)$ 是旋转弗罗德数, f_0 是柯氏参数的尺度, L 为长度尺数, β 为常数, g 为重力加速度. 参数 $a = g_0^{-1}/g_1^{-1} > 0$ 为上自由表面系数, 其中 g_1 是第一层与第二层之间浮力跃度.

流体流动的水平区域 Ω 为纬向周期通道:

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

边界条件:

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{y=0,1} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\pi}^{\pi} \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right|_{y=0,1} \mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

初始条件:

$$\Phi_i|_{t=0} = \Phi_{i0}. \tag{4}$$

考虑系统(1)~(4)的定常解(基流):

$$(\Psi_i(y), Q_i(y)).$$

假设存在常数 γ 及连续可微函数 $\Psi_i^\gamma(\cdot)$, 使得

$$\Psi_i(y) + \gamma y = \Psi_i^\gamma(Q_i) \qquad (i = 1, 2). \tag{5}$$

叠加在基流上的扰动 $(\psi_i(x, y, t), q_i(x, y, t))$ 定义为:

$$\Phi_i = \Psi_i + \psi_i, \quad P_i = Q_i + q_i.$$

相应于 Arnol'd 第二定理的条件, 假设存在正常数 $C_{1i} C_{2i}$, 使得

$$0 < C_{1i} \leqslant -\frac{\mathrm{d}\Psi_i^\gamma(Q_i)}{\mathrm{d}Q_i} \leqslant C_{2i} < +\infty. \tag{6}$$

令 $\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(d_1^{-1/2}, d_2^{-1/2})$, $d_i = D_i/D$ (D 为高度尺度), $\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(C_{11}, C_{12})$, $\lambda = \pi^2$ 为边值问题

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{y=0,1} = 0, \quad \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0,1} \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

的最小正特征值, 矩阵

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} f_0^2(g_0^{-1} + g_1^{-1}) & -f_0^2 g_1^{-1} \\ -f_0^2 g_1^{-1} & f_0^2 g_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{C} - (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{KTK})^{-1}.$$

在文[1]中, 我们简要回顾了两层准地转流体对应于 Arnol'd 第二定理的非线性稳定性判据, 当基流满足(5)与(6)式, 且矩阵 $\boldsymbol{M}$ 正定时, 基流是非线性稳定的; 如果基流满足(5)与(6)式, 但是对任意使(5)成立的 γ, 对任意使(6)成立的 C_{1i}, 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 非正定, 则基流很可能是非线性不稳定的. 特别地, 如果 $\boldsymbol{M}$ 的最小特征值为负数, 记为 K_1, 则有

$$K_1 Z'(t) - 2\left(\frac{E^*}{\lambda}\right)^{1/2} (Z'(t))^{1/2} - H \leqslant 0. \tag{7}$$

如果 $H < 0$, 此时方程(7)的两根为:

$$\xi_{\pm}=\frac{(E^*)^{1/2}\pm(E^*+\lambda K_1H)^{1/2}}{K_1\sqrt{\lambda}}. \tag{8}$$

由于 $\xi_- > 0$, $\xi_+ < 0$, 故由(7) 解得:

$$(Z'(t))^{1/2}\geqslant\xi_-\Rightarrow Z'(t)\geqslant\xi_-^2, \tag{9}$$

所以关于扰动位涡拟能的下界估计为

$$Z(t)=Z^*+Z'(t)\geqslant Z^*+\xi_-^2. \tag{10}$$

进一步地, 如果(6)中的 C_{1i}、C_{2i} 为一般的常数, 那么上面的结果仍然成立.

2 广义 Phillips 模式基流不稳定时扰动演变的下界估计

前面对两层准地转流体一般地讨论了基流不稳定时扰动演变的下界估计问题. 下面具体讨论广义 Phillips 模式的情况.

假设 $D_1=D_2$, 即 $F_1=F_2=F$, 模式的基流为

$$\Psi_1=-U_1y,\quad \Psi_2=-U_2y=0,$$

$$Q_1(y)=(\beta+F(1+a)U_s)y,\quad Q_2(y)=(\beta-FU_s)y,$$

其中 $U_i(i=1,2)$ 为常数(为方便起见, 假设 $U_2=0$), $U_s=U_1-U_2=U_1$ 为垂直速度切变, 叠加在基流上的扰动为(ϕ_1,q_i), 其中

$$q_1=\Delta\phi_1+F(\phi_2-(1+a)\phi_1),\quad q_2=\Delta\phi_2+F(\phi_2-\phi_1).$$

则有

定理 1([1]中的定理 3) 当 1°~ 4°中任一条件被满足时, 基流是非线性稳定的,

1° $U_s=\dfrac{\beta}{F}$ 且 $\lambda^2>2F^2$;

2° $U_s=-\dfrac{\beta}{F(1+a)}$ 且 $\lambda^2>(2+2a+a^2)F^2$;

3° $-\dfrac{\beta}{F(1+a)}<U_s<\dfrac{\beta}{F}$;

4° $U_s>\dfrac{\beta}{F}$ 或 $U_s<-\dfrac{\beta}{F(1+a)}$, $\lambda^2-F^2(2+a)+aF\dfrac{\beta}{U_s}>0$, 且

$$U_s^2[\lambda^2(\lambda^2-4F^2)+aF^2(aF^2-2\lambda^2)]+(4+a^2)\beta^2F^2+$$
$$2a\beta FU_s(\lambda^2-aF^2)>0.$$

下面分几种情况具体讨论广义 Phillips 模式的基流$(\Psi_i(y),Q_i(y))$不稳定时, 扰动能量

$$E(t)=\int_\Omega\frac{d}{2}\left\{|\nabla\phi_1^2|+|\nabla\phi_2^2|+F(\phi_2-\phi_1)^2+aF\phi_1^2\right\}d\Omega$$

及位涡拟能

$$Z(t)=\int_\Omega\frac{d}{2}\sum_{i=1}^{2}q_i^2d\Omega$$

的下界估计.

情形 1 $\beta+F(1+a)U_s=0$, 即

$$U_s=-\frac{\beta}{F(1+a)}. \tag{11}$$

此时 $C_{11}=C$, $C_{12}=-d\Psi_2^{\gamma}(Q_2)/dQ_2=1/((2+a)F)$, C 为任意实数. 当 $\lambda^2\leqslant(2+2a+a^2)F^2$ 时, 我们可证明矩阵 $\boldsymbol{M}$ 最小特征值为负数, 因而 M 非正定, 此时基流可能是非线性不稳

定的, 下面估计 $E(t)$、$Z(t)$ 的下界·

由文[1]有

$$E(t)+A(t)=E(0)+A(0), \tag{12}$$

其中

$$A(t)=\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}[G_i(Q_i+q_i)-G_i(Q_i)-G_i'(Q_i)q_i]\,\mathrm{d}\Omega, \tag{13}$$

$$G_i(\eta)=\int^\eta\Psi_i^\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau· \tag{14}$$

而

$$G_1(\eta)=\int_0^\eta\Psi_1^\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau=-\frac{C_{11}}{2}\eta^2,$$

$$G_2(\eta)=\int_0^\eta\Psi_2^\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau=-\frac{C_{12}}{2}\eta^2,$$

故 $\quad A(t)=-(C_{11}Z_1(t)+C_{12}Z_2(t))·$

由于 $Z_i=\int_\Omega\frac{\mathrm{d}}{2}q_i^2\,\mathrm{d}\Omega$, 将它代入(12) 式中, 有:

$$E(t)-C_{11}Z_1(t)-C_{12}Z_2(t)=E(0)-C_{11}Z_1(0)-C_{12}Z_2(0), \tag{15}$$

令 $C\to+\infty$, 则 $Z_1(t)=Z_1(0)$, 因此 $Z_1'(t)=Z_1'(0)$, 故(15) 可变为:

$$E(t)-C_{12}Z_2(t)=E(0)-C_{12}Z_2(0), \tag{16}$$

由文[2]知:

$$E(0)-C_{12}Z'(0)\leqslant E^*+E'(t)+2E^{*\,1/2}E'(t)^{1/2}-C_{12}Z'(t),$$

利用 Poincáre 不等式 $E'(t)\leqslant Z'(t)/\lambda$, 将上式化为:

$$KZ'(t)-2\left(\frac{E^*}{\lambda}\right)^{1/2}(Z'(t))^{1/2}-H\leqslant 0, \tag{17}$$

其中 $\quad K=C_{12}-1/\lambda,\ H=E^*-E(0)+C_{12}Z'(0)·$

由于 $\quad K=\dfrac{1}{(2+a)F}-\dfrac{1}{\lambda+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}F}<0,$

因(17) 本身有解, 故判别式 $\Delta>0$, 此时方程的两根为:

$$\xi_\pm=\frac{(E^*)^{1/2}\pm(E^*+\lambda KH)^{1/2}}{K\sqrt{\lambda}}· \tag{18}$$

若初始扰动满足 $H<0$, 则有 $\xi_->0$, $\xi_+<0$, 故由(17) 解得:

$$(Z'(t))^{1/2}\geqslant\xi_-\Rightarrow Z'(t)\geqslant\xi_-^2· \tag{19}$$

同时 $Z'(t)=Z_1'(t)+Z_2'(t)\geqslant Z_1'(0)$, 故再分下面两种情况讨论:

1) 当 $\xi_-^2>Z_1'(0)$ 时, 扰动能量及位涡拟能下界估计为:

$$Z(t)=Z^*+Z'(t)\geqslant Z^*+\xi_-^2, \tag{20}$$

由(19) 得到

$$Z'(t)\geqslant\xi_-^2-Z_1'(0)· \tag{21}$$

结合(16) 与(21) 有:

$$\begin{aligned}E(t)&=E(0)+C_{12}Z_2(t)-C_{12}Z_2(0)=E(0)+C_{12}Z_2'(t)-C_{12}Z_2'(0)\geqslant\\&E(0)+C_{12}\xi_-^2-C_{12}Z'(0)=E^*-H+C_{12}\xi_-^2·\end{aligned} \tag{22}$$

2) 当 $\xi^2 < Z_1'(0)$ 时, 扰动能量及位涡拟能下界估计为:

$$Z'(t) \geqslant Z_1'(0) \Rightarrow Z(t) \geqslant Z^* + Z'_1(0), \tag{23}$$

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) + C_{12}Z_2'(t) - C_{12}Z_2'(0) = \\ &E(0) + C_{12}Z'(t) - C_{12}Z'(0) \geqslant \\ &E(0) + C_{12}Z_1'(0) - C_{12}Z'(0) = E^* - H + C_{12}Z_1'(0) \cdot \end{aligned} \tag{24}$$

综合 1) 与 2), 当 $H < 0$ 时, 扰动能量及位涡拟能下界估计分别为:

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant Z^* + \max(\xi^2, Z_1'(0) \cdot \\ E(t) \geqslant E^* - H + C_{12}\max(\xi^2, Z_1'(0)) \cdot \end{cases} \tag{25}$$

特别地, 若 $E^* = 0$ 时, 此时

$$Z(t) = Z'(t), \; H = -E(0) + C_{12}Z(0), \; \xi^2 = H/K,$$

当 $E(0) > Z_1(0)/\lambda + C_{12}Z_2(0)$ 时,

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant H/K \cdot \\ E(t) \geqslant H((C_{12}/K) - 1) \cdot \end{cases} \tag{26}$$

当 $C_{12}Z(0) < E(0) \leqslant Z_1(0)/\lambda + C_{12}Z_2(0)$ 时,

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant Z_1(0) \cdot \\ E(t) \geqslant E(0) - C_{12}Z_2(0) \cdot \end{cases} \tag{27}$$

情形 2 $\beta - FU_s = 0$, 即 $U_s = \beta/F \cdot$

此时 $C_{11} = \dfrac{\mathrm{d}\Psi_1^{\gamma}(Q_1)}{\mathrm{d}Q_1} = \dfrac{1}{(2+a)F}$, $C_{12} = C$, C 为任意实数 ·

完全同情形 1, 类似地可得如下结果:

当 $H < 0$ 时, 扰动能量及位涡拟能下界估计为:

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant Z^* + \max(\xi^2, Z_2'(0)) \cdot \\ E(t) \geqslant E^* - H + C_{11} \cdot \max(\xi^2, Z_2'(0)). \end{cases} \tag{28}$$

特别地, 若 $E_* = 0$, 此时

$$Z(t) = Z'(t), H = -E(0) + C_{11}Z'(0), \; \xi^2 = H/K,$$

当 $E(0) > (Z_2(0))/\lambda + C_{11}Z_1(0)$ 时,

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant \dfrac{H}{K}, \\ E(t) \geqslant H\left(\dfrac{C_{11}}{K} - 1\right) \cdot \end{cases} \tag{29}$$

当 $C_{11}Z(0) < E(0) \leqslant (Z_2(0)/\lambda + C_{11}Z_1(0))$ 时,

$$\begin{cases} Z(t) \geqslant Z_2(0) \cdot \\ E(t) \geqslant E(0) - C_{11}Z_1(0) \cdot \end{cases} \tag{30}$$

情形 3 $(\beta + F(1+a)U_s)(\beta - FU_s) < 0$, 即 $U_s > \beta/F$ 或 $U_s < -\beta/F(1+a) \cdot$

则

$$C_{11} = \frac{U_s - \gamma}{\beta + F(1+a)U_s}, \quad C_{12} = \frac{-\gamma}{\beta - FU_s}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} - \dfrac{F+\lambda}{R} & -\dfrac{F}{R} \\ -\dfrac{F}{R} & C_{12} - \dfrac{\lambda + F(1+a)}{R} \end{pmatrix},$$

$$R = |\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{KTK}| = \lambda^2 + (2+a)F\lambda + aF^2\cdot$$

$\boldsymbol{M}$ 正定当且仅当下面式子成立:

$$1^\circ\ M_{11} > 0,\ M_{22} > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - F^2(2+a) + aF\beta/U_s > 0, \tag{31}$$

$$2^\circ\ M_{11}M_{22} > M_2M_{21} \Leftrightarrow$$

$$U_s^2[\lambda^2(\lambda^2 - 4F^2) + aF^2(aF^2 - 2\lambda^2)] + (4+a^2)\beta^2F^2 +$$
$$2aF\beta U_s(\lambda^2 - aF^2) > 0, \tag{32}$$

我们知道, 当条件(31)、(32)有一个被破坏时, 对任意 γ, $\boldsymbol{M}$ 的最小特征值为负数, 因而基流很可能非线性不稳定, 由于问题的复杂性, 我们只能得出扰动位涡拟能 $Z(t)$ 的下界$\cdot$ 由 Poincaré 不等式可得:

$$KZ'(t) - 2\left(\frac{E^*}{\lambda}\right)^{1/2}(Z'(t))^{\frac{1}{2}} - H \leqslant 0, \tag{17$'$}$$

这里, $H = E^* - E(0) - A(0) - \sum_{i=1}^{2} C_{1i}Z_i^*$, K 为 M 最小特征值, $K < 0$, 方程(17)$'$ 的两根为

$$\xi_{\pm} = \frac{(E^*)^{1/2} \pm (E^* + \lambda KH)^{1/2}}{K\sqrt{\lambda}}\cdot$$

若 $H < 0$, 则 $\xi_- > 0$, $\xi_+ < 0$, 此时 $(Z')(t))^{1/2} \geqslant \xi_- \Rightarrow Z'(t) \geqslant \xi_-^2\cdot$ 但与情形1、2不同的是, 由于 H 中含有参数 γ, 故应消去 γ:

$$H = E^* - E(0) - A(0) - \sum_{i=1}^{2} C_{12}Z_i^* =$$
$$E^* - E(0) + C_{11}Z_1'(0) + C_{12}Z_2'(0) =$$
$$E^* - E(0) + \frac{U_s - \gamma}{\beta + F(1+a)U_s}Z_1'(0) + \frac{-\gamma}{\beta - FU_s}Z'(0),$$

记:
$$S = E^* - E(0) + \frac{U_s}{\beta + F(1+a)U_s}Z_1'(0),$$
$$T = \frac{1}{\beta + F(1+a)U_s}Z_1'(0) + \frac{1}{\beta - FU_s}Z_2'(0),$$

则 $H = S - \gamma T$, $H < 0 \Leftrightarrow \gamma T > S$, 下面对 T 进行讨论:

1) 若 $T < 0$, 则 $H < 0 \Leftrightarrow \gamma < S/T\cdot$

只要 γ 充分负, 总可使 $H < 0$, 故令 $\gamma \to \infty$, 则

$$K \to \frac{1}{2}\frac{(-\gamma)[2\beta + aFU_s + (2+a)F|U_s|]}{(\beta + F(1+a)U_s)(\beta - FU_s)},\quad \xi_- \to \sqrt{\frac{H}{K}},$$

$$\frac{H}{K} \to \frac{2(\beta - FU_s)Z_1'(0) + 2(\beta + F(1+a)U_s)Z_1'(0)}{2\beta + aFU_s + (2+a)F|U_s|}\cdot$$

令

$$\xi_0 = \frac{2(\beta - FU_s)Z_1'(0) + 2(\beta + F(1+a)U_s)Z_1'(0)}{2\beta + aFU_s - (2+a)F|U_s|} =$$
$$\begin{cases} Z_1'(0) + \dfrac{\beta + F(1+a)U_s}{\beta - FU_s}Z_2'(0), & \text{当 } U_s < -\dfrac{\beta}{F(1+a)}, \\ \dfrac{\beta - FU_s}{\beta + F(1+a)U_s}Z_1'(0) + Z_2'(0), & \text{当 } U_s > \dfrac{\beta}{F}\cdot \end{cases} \tag{33}$$

由于 $T < 0$, $\xi_0^- > 0$, 故

$$Z'(t) \geqslant \xi_0 \Rightarrow Z(t) \geqslant Z^* + \xi_0^-\cdot \tag{34}$$

2) 若 $T > 0$, 则 $H < 0 \Leftrightarrow \gamma > S/T$.

只要 γ 充分正, 总可使 $H < 0$, 故令 $\gamma \to +\infty$, 则

$$K \to \frac{1}{2}\frac{(-\gamma)[2\beta + aFU_s - (2+a)F|U_s|]}{(\beta + F(1+a)U_s)(\beta - FU_s)},\quad \xi \to \sqrt{\frac{H}{K}},$$

$$\frac{H}{K} \to \frac{2(\beta - FU_s)Z_1'(0) + 2(\beta + F(1+a)U_s)Z_1'(0)}{2\beta + aFU_s - (2+a)F|U_s|}.$$

令

$$\xi_0^+ = \frac{2(\beta - FU_s)Z_1'(0) + 2(\beta + F(1+a)U_s)Z_2'(0)}{2\beta + aFU_s - (2+a)F|U_s|} = \begin{cases} Z_1'(0) + \dfrac{\beta + F(1+a)U_s}{\beta - FU_s}Z_2'(0), & \text{当 } U_s > \dfrac{\beta}{F} \\ \dfrac{\beta - FU_s}{\beta + F(1+a)U_s}Z_1'(0) + Z_2'(0), & \text{当 } U_s < -\dfrac{\beta}{F(1+a)} \end{cases} \tag{35}$$

由 $T < 0$ 可知 $\xi^+ > 0$, 故

$$Z'(t) \geqslant \xi_0^+ \Rightarrow Z(t) \geqslant Z^* + \xi_0^+. \tag{36}$$

综合 1)、2), 对于 $T < 0$, $T > 0$, $Z(t)$ 下界分别为(34)和(36)式.

致谢: 本文得到解放军理工大学黄思训教授和上海大学戴世强教授的指导和帮助, 在此表示衷心的感谢!

[参 考 文 献]

[1] 张瑰. 广义 Phillips 模式的非线性稳定性判据[J]. 空军气象学院学报, 1999, **20**(2): 133—143.

[2] 张瑰, 项杰, 李东辉. 广义 Phillips 模式非线性不稳定的饱和问题(Ⅰ)——基流不稳定时扰动演变的上界估计[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(1): 73—81.

[3] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part_one: the two_layer model[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1998, **45**(14): 2014—2025.

[4] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability, Part_two: Continuously_statified fluid[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1989, **46**(7): 888—907.

[5] Shepherd T G. Nonlinear saturation of baroclinic instability, part_three: bounds on the energy[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1993, **50**(16): 2697—2709.

[6] MU Mu. Nonlinear stability theorem of two_dimensional quasi_geostrophic motions, geophys, Astrophy[J]. Fluid Dynamics, 1992, **65**(1): 57—76.

[7] Paret J, Vanneste J. Nonlinear saturation of baroclinic instability in a three_layer model[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1996, **53**(20): 2905—2917.

[8] Cho H R, Shepherd T G, Vladimirov V A. Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1993, **50**(6): 822—834

[9] MU Mu, Shepherd T G, Swanson K. On nonlinear symmetric stability and the nonlinear saturation of symmetric instability[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1996, **53**(20): 2918—2923.

[10] ZENG Qing_cun. Variational Principle of instability of atmosphic motions[J]. Adv Atmos Sci, 1989, **6**(2): 137—172.

[11] XIANG Jie, MU Mu. Lower bound of disturbances for the nonlinearly unstable basic flow in the

phillips model[A]. In: CHINE Wei_zang, Ed. Proceeding of the Third International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai, 1998: 548—553.

Nonlinear Saturation of Baroclinic Instability in the Generalized Phillips Model(Ⅱ)—The Lower Bound on the Disturbance Energy and Potential Enstrophy to the Nonlinearly Unstable Basic Flow

ZHANG Gui[1], XIANG Jie[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Institute of Science, University of Science and Technology, P L A, Nanjing 211101, P R China;
2. Department of Meteorology, P O Box 003, Nanjing 211101, P R China)

Abstract: On the basis of the nonlinear stability theorem in the context of Arnol'd's second theorem for the generalized Phillips model, nonlinear saturation of baroclinic instability in the generalized Phillips model is investigated. The lower bound on the disturbance energy and potential enstrophy to the nonlinearly unstable basic flow in the generalized Phillips model is presented, which indicates that there may exist an allocation between a nonlinearly unstable basic flow and a growing disturbance.

Key words: nonlinear saturation; baroclinic instability; generalized Phillips model; basic flow