

文章编号: 1000-0887(2002) 10-0991-06

# 滑动轴承转子系统动力学稳定域的 数值分析方法\*

郑惠萍, 陈予恕

(天津大学 机械学院 力学系, 天津 300072)

(我刊编陈予恕来稿)

**摘要:** 根据 Floquet 理论定义了非线性非自治系统周期解的稳定度。从动力系统流的概念出发, 给出利用非线性非自治系统稳态周期解受扰后的瞬态响应, 计算周期解稳定度的数值计算方法。以稳定度等于零为临界判据, 分析计算了滑动轴承平衡和不平衡刚性转子系统的稳定吸引域。研究发现, 平衡转子随着转速的升高稳定域减小; 不平衡转子随着不平衡量的增大稳定域减小; 且工频周期解的稳定域比同样系统条件下平衡点的稳定域小。

**关键词:** 非线性转子系统; 稳定度; 分岔; 稳定域

**中图分类号:** O322; TH113 **文献标识码:** A

## 引 言

在解决大型旋转机械动力学失稳的控制问题时, 不仅要知道系统的平衡状态是否是渐近稳定的, 而且要搞清渐近稳定性区域究竟有多大。只有当初始条件在这个区域中, 才能保证由此初始条件所确定的解, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 趋于这个平衡状态。对于线性系统, 若已确定解在李雅普诺夫意义下是稳定的, 则必是全局渐近稳定的。而对于非线性系统, 则还要涉及吸引域(即稳定域)的求取问题。为此, Roberto Genesio<sup>[1]</sup> 在详细综述已有的求取非线性自治动力系统渐近稳定性区域的各种方法基础上, 提出用轨道反转方法来确定吸引域的范围。该方法适用于高维系统, 但在具体操作上却有一定的难度, 特别是它仅适用于自治系统。张卫<sup>[2]</sup> 在研究滑动轴承转子系统稳定裕度时, 傅予力<sup>[3]</sup> 在进行汽轮发电机组轴系扭振平衡位置分析与稳定域估计时都采用了李雅普诺夫方法, 但也仅研究了自治系统。众所周知, 实际的滑动轴承不平衡转子系统是一个强非线性非自治系统, 作者也曾尝试采用李雅普诺夫方法来直接估计该系统的稳定域, 但遇到了很大的困难, 甚至不能给出一个李雅普诺夫函数。由此看来, 期望用完全解析的方法去解决上述复杂动力学问题几乎是天方夜谈。而在计算机技术迅速发展的今天, 依靠数值算法来解决此问题不失为一个有效的手段。本文给出了一种计算周期解稳定度的数值

收稿日期: 2000\_05\_18; 修订日期: 2002\_05\_31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重大 19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316); 教育部博士点基金资助项目(D09901)

作者简介: 郑惠萍(1964—), 女, 石家庄人, 副教授, 博士, 研究方向为非线性动力学, 已发表论文 10 余篇(E-mail: hpzheng@eyou.com)

计算方法,以稳定度等于零为临界判据,分析计算了滑动轴承平衡和不平衡刚性转子系统的稳定吸引域,得到了一些新的结果。

## 1 稳定域的数值计算方法

### 1.1 周期解稳定度的定义

已知非线性非自治动力系统

$$\dot{x} = f(t, x) \quad t, x \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

式中  $f(t, x)$  为  $t$  的以  $T$  为周期的周期函数,同时为  $x$  的非线性解析函数。系统(1)的稳态周期解  $x^*(t)$  为以  $T$  为周期的周期函数。对  $x^*(t)$  施加一小扰动  $\delta x(t)$  代入原方程,取一次近似得到其扰动方程为:

$$\dot{\delta x}(t) = A(t) \delta x(t), \quad (2)$$

其中  $A(t) = A(t+T)_{n \times n}$ 。系统(1)稳态周期解  $x^*(t)$  的稳定度定义为

$$\Gamma = -\frac{1}{T} \ln(\max |\rho_i|), \quad (3)$$

其中  $\rho_i$  为特征矩阵的特征值,特征矩阵  $\Phi(T)$  由初值问题

$$\dot{\Phi}(t) = A(t) \Phi(t), \quad \Phi(0) = E \quad (4)$$

解出。稳定度是定常周期运动受扰后回到原周期运动的快慢程度的衡量指标。 $\Gamma > 0$ , 系统稳定;  $\Gamma = 0$ , 临界状态;  $\Gamma < 0$ , 系统失稳。而实际中系统(1)的解析解很难求出,下面给出不需求解析解,直接利用瞬态响应信息求周期运动稳定度的数值计算方法。

### 1.2 周期解稳定度的数值计算方法

周期系统(2)的解的稳定性研究是根据它的解的性质:若记映射  $g^t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  为方程(2)在初始条件  $\varphi(0) = \delta x$  下的解  $\varphi$  在  $t$  时刻所取的值  $g^t \delta x = \varphi(t)$  或  $g^t \varphi(0) = \varphi(t)$ , 则我们有  $g^{t+T} = g^T \cdot (g^T)^n, S < T$ 。

对于线性周期系统,映射  $g^t$  是线性的,即  $g^t \delta x = \Phi(t) \varphi(0)$ , 或  $g^{t+T} \delta x = \Phi(T) \cdot \varphi(t)$ , 由此可以得到如下等式:

$$\begin{cases} \delta x(t_0 + T) = \Phi(T) \delta x(t_0), \\ \delta x(t_0 + 2T) = \Phi(T) \delta x(t_0 + T), \\ \dots \dots \\ \delta x(t_0 + (n+1)T) = \Phi(T) \delta x(t_0 + nT). \end{cases} \quad (5)$$

合并式(5),得到

$$\begin{bmatrix} \delta x(t_0 + T) & \delta x(t_0 + 2T) & \dots & \delta x(t_0 + nT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x(t_0) & \delta x(t_0 + T) & \dots & \delta x(t_0 + (n-1)T) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

由上式得到特征矩阵为

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} \delta x(t_0 + T) & \delta x(t_0 + 2T) & \dots & \delta x(t_0 + nT) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x(t_0) & \delta x(t_0 + T) & \dots & \delta x(t_0 + (n-1)T) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (7)$$

利用式(7)计算特征矩阵需要已知  $\delta x(t)$  的信息,而在工程实际中观测到的为  $x(t)$  的信息。如何用  $x(t)$  来表达  $\delta x(t)$  是首先要解决的问题。利用  $x^*(t)$  的周期性,知如下等式成立:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0) + \delta\mathbf{x}(t_0), \\ \mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}^*(t_0) + \delta\mathbf{x}(t_0 + T), \\ \dots\dots \\ \mathbf{x}(t_0 + (n+1)T) = \mathbf{x}^*(t_0) + \delta\mathbf{x}(t_0 + (n+1)T), \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中相邻的等式两两相减得到

$$\mathbf{H}(k) = \delta\mathbf{x}(t_0 + (k+1)T) - \delta\mathbf{x}(t_0 + kT) = \mathbf{x}(t_0 + (k+1)T) - \mathbf{x}(t_0 + kT) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (9)$$

式(5)中相邻的等式两两相减,并把上式代入,则有

$$\mathbf{H}(j) = \Phi(T)\mathbf{H}(j-1) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

式(10)写成矩阵形式为

$$\Phi(T) = [\mathbf{H}(1) \quad \mathbf{H}(2) \quad \dots \quad \mathbf{H}(n)] \cdot [\mathbf{H}(0) \quad \mathbf{H}(1) \quad \dots \quad \mathbf{H}(n-1)]^{-1} \quad (11)$$

利用式(9)可由瞬态响应计算出 $\mathbf{H}(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ),并由式(11)计算特征矩阵 $\Phi(T)$ 及其特征值,代入式(3)即可得到稳定度值。

由于系统的非线性性质,在一定的时间段内不同的初始采样时刻 $t_0$ 会使得计算出的稳定度不同,特别是在大扰动、强非线性时这种情况更严重。为了去掉实际扰动信号中非线性因素的影响,需要在一定时间段内连续选取不同的初始采样时刻 $t_0$ 计算出对应的稳定度值,然后从线性段内筛选出对应周期解的稳定度值。

### 1.3 稳定域求解步骤

- (a) 积分某初始条件下的瞬态响应信息。
- (b) 利用上述方法计算该初始条件下达到稳定时周期解的稳定度。
- (c) 重复(a)、(b)找到在某方向上稳定度等于零时的初始值,即为该工作状态下,在该方向上系统稳定域的边界。不同方向上稳定域的边界就构成了系统的稳定域。
- (d) 根据稳定度等于零时对应的 Floquet 乘数的特点来确定边界上的分岔性质。

## 2 算 例

如图1所示为支承在两个相同滑动轴承上以角速度 $\Omega$ 旋转的质量为 $M$ 的不平衡滑动轴承转子系统。其中 $O$ 为轴承的几何中心, $O_1$ 为转子的几何中心, $O_C$ 为转子的质心。由转子几何中心 $O_1$ 表示的动力学方程为:

$$\begin{cases} M\dot{X} = F_X + Me\Omega^2 \sin(\Omega t), \\ M\dot{Y} = Mg + F_Y + Me\Omega^2 \sin(\Omega t), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $e$ 为转子的质量偏心距, $F_X$ 、 $F_Y$ 为短轴承假设的油膜力<sup>[4]</sup>。引入无量纲变换

$$x = \frac{X}{C}, \quad y = \frac{Y}{C}, \quad \tau = \Omega t,$$

其中 $C$ 为轴承半径间隙。无量纲化后的动力学方程为:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_x + \rho \sin \tau, \\ m\ddot{y} = mG + f_y + \rho \cos \tau, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\rho$ 为无量纲不平衡量, $G$ 为无量纲重力加速度, $f_x$ 、 $f_y$ 为无量纲油膜力。

### 2.1 滑动轴承刚性平衡转子稳定域

此时式(13)中  $\rho = 0$ 。图2给出了3种转速情况下刚性平衡转子系统的初始稳定吸引域(计算时初始速度均取为零)。由图可见,随着转速的增大,吸引域变小;转速超过临界失稳转速后,吸引域不再存在,即此时任何初始条件都不可能使平衡转子稳定在其静平衡点上。

图3分别给出了以图2(a)中A、B点为初始条件时的轴心轨迹。由图可见,当初始条件位于稳定的吸引域之内时,经过瞬态过程,系统会稳定在静平衡点上;当初始条件位于稳定吸引域之外时,转子中心的运动轨迹不能回到平衡点,稳态运动会成为周期运动或直接发散失稳。

2.2 滑动轴承刚性不平衡转子稳定域

此时式(13)中  $\rho \neq 0$ 。图4分别给出了在  $n = 4000 \text{ r/min}$ ,  $\rho = 0.05$  和  $\rho = 0.1$  时的工频周期解的稳定吸引域。

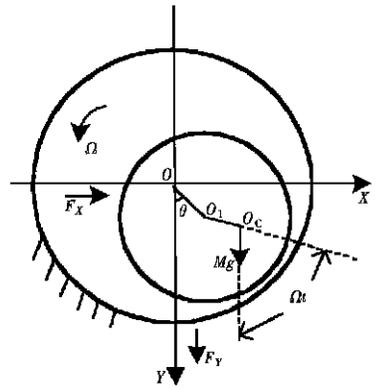


图1 刚性转子模型图

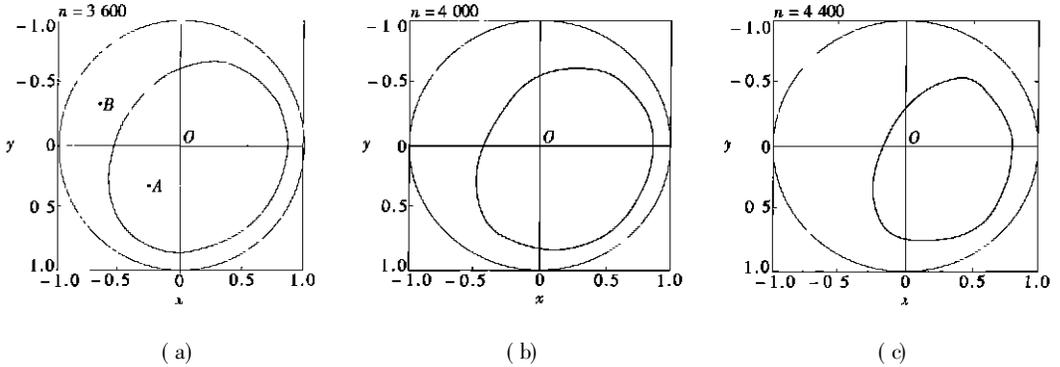
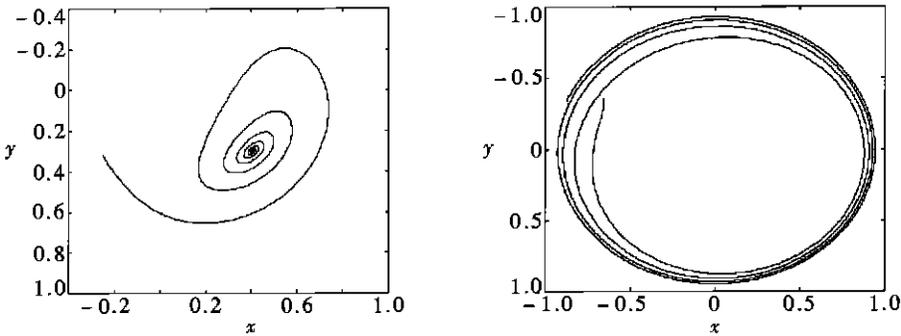


图2 滑动轴承刚性平衡转子吸引域 ( $n$ —转速  $\text{r/min}$ )



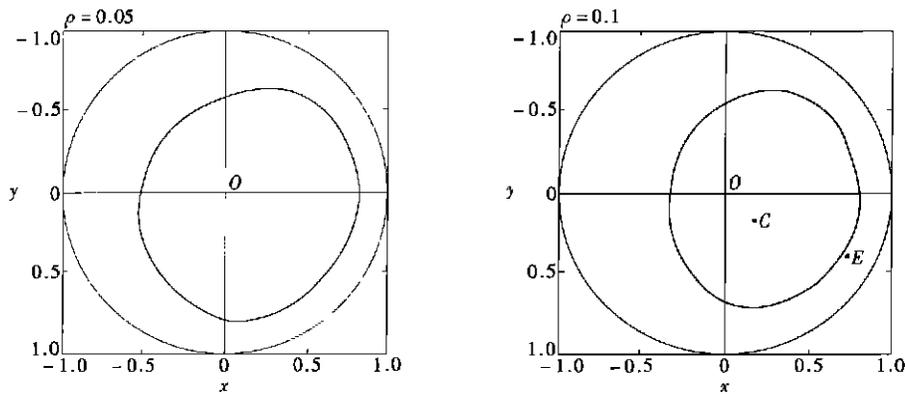
(a) 以图2(a)中A点为初始条件

(b) 以图2(a)中B点为初始条件

图3 不同初始位置时的轴心轨迹

图4与图2(b)比较可见,同样系统参数下不平衡量的存在使得工频周期解的稳定吸引域范围比平衡点的吸引域小,且随着  $\rho$  的增大,吸引域减小,当  $\rho$  大到一定的程度时,则不再存在工频周期解的稳定域。对应图2(b)的系统参数,当  $\rho \geq 0.15$  时,不再存在工频周期解的稳定域。

图5给出了以图4(b)中C、E点为初始条件时的轴心轨迹和频谱分析。由图可见,初始位置位于稳定吸引域内(如C点)时,稳态运动为工频周期运动。初始位置位于吸引域外,且

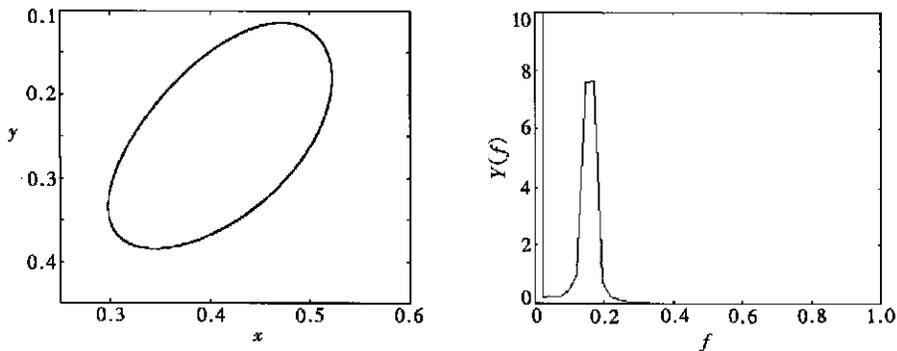


(a)  $\rho = 0.05$

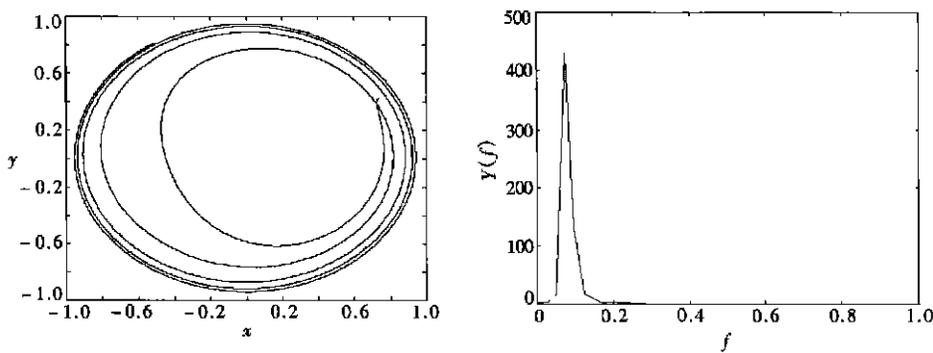
(b)  $\rho = 0.1$

图4 滑动轴承刚性不平衡转子的稳定域( $n = 4\ 000\ \text{r/min}$ )

邻近吸引域时,当失稳临界为倍周期分岔时,稳态运动为倍周期运动;当失稳临界为Hopf分岔时,稳态运动为概周期运动。当初始位置远离吸引域时,转子系统以倍周期运动形式(如初始位置为E点)或概周期运动形式发散,具体情况视临界分岔形式而定。



(a) 以图4(b)中C点为初始条件



(b) 以图4(b)中E点为初始条件

图5 不同初始条件时的轴心轨迹和频谱图

### 3 结 论

由上述分析可以得出以下结论:

- 1) 本文给出的利用瞬态响应计算周期解稳定度的方法估算系统的稳定域是有效的。该方法避免了求解析解的困难, 可以很方便地推广到高维系统。
- 2) 在同样系统参数情况下, 对于平衡转子而言, 随着转速的升高, 吸引域减小, 转速超过失稳转速(分岔点对应的转速)后, 不再有平衡点吸引域。
- 3) 在同样转速与系统参数情况下, 不平衡量的存在使得工频周期解的稳定域比平衡点的稳定域小。且随着不平衡量增大, 吸引域减小; 当不平衡量超过某一限值不再有工频周期解吸引域。

### [参 考 文 献]

- [1] Genesio Roberto, Tarta Michele, Vicino Antonio. On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1985, AC\_30(8): 747—755.
- [2] 张卫, 朱均. 转子\_滑动轴承系统的稳定裕度[J]. 机械工程学报, 1995, 31(2): 57—62.
- [3] 傅予力, 廖晓昕, 江振华, 等. 汽轮发电机组轴系扭振平衡位置分析与稳定域估计[J]. 电力系统自动化, 2000, 24(8): 6—9.
- [4] 钟一镔. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986, 41—63.
- [5] 郑惠萍. 滑动轴承不平衡转子系统非线性动力学稳定性及其稳定裕度的研究[D]. 博士论文. 天津: 天津大学, 2000, 48—56.
- [6] 秦元勋. 运动稳定性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 214—229.
- [7] CHEN Yu\_shu, Leng Andrew Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer\_Verlag, 1998, 194—197.

## A Numerical Method on Estimation of Stable Regions of Rotor Systems Supported on Lubricated Bearings

ZHENG Hui ping, CHEN Yu\_shu

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

**Abstract:** The stability degree of periodic solution of nonlinear nonautonomous system was defined by means of the Floquet theory. A method evaluating the stability degree of periodic solution based on transient response was presented by the aid of the concept of dynamic systems or flows. The critical value of a system was determined by the condition i. e. its stability degree equals zero. Stable regions of rotor systems with balanced and unbalanced disk supported on lubricated bearings were calculated. The study shows that stable region decreases with the increase of speed for a balanced rotor system and decreases with the increase of unbalance for an unbalanced rotor system. Stable regions of periodic solutions are less than that of equilibrium points under the same systematic conditions.

**Key words:** nonlinear rotor system; stability degree; bifurcation; stable region