应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 10_1008_05

判定线性偏微分方程组解的完备性的一个符号计算方法*

张鸿庆， 谢福鼎， 陆 斌

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 从微分代数的角度出发, 借助于吴微分特征集理论, 对于线性偏微分方程组, 给出了判定它的解的完备性的一个符号计算方法• 这个算法是一个机械化的算法, 借助于符号计算软件 Maple, 可以在计算机上实现•

关 键 词: 微分代数; 偏微分方程组; 符号计算; 特征集

中图分类号: O155; O175. 2 文献标识码: A

引 言

考虑线性微分代数方程组

$$\Sigma:\quad P_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

系数在一个特征为 0 的微分域 K 内• 如何求解方程组, 是偏微分方程理论研究的一个重要问题• 通过变换, 我们可以把它化成一个容易求解的偏微分方程组, 一般地, 我们不能保证 Σ 的解是完备的• 张鸿庆[1]对于常系数的情况, 给出了变换的一般形式, 且提出了恰当解的概念• 张鸿庆[2]、王敏中[3]等研究了胡海昌解的完备性• 直到目前为止, 尚无一个一般性的方法去判定线性偏微分代数方程组的完备性• 随着计算机的发展和应用领域的不断扩大, 符号计算在数学领域中体现出了日益强大的生命力, 微分代数[4, 5]是研究代数形式偏微分方程组的一个有力的工具, 吴微分特征集[6]的研究与应用, 对代数形式偏微分方程组的计算提供了理论基础和方法• 本文正是在以上的基础上, 给出了一个判定线性偏微分方程组解的完备性的符号计算方法•

1 预 备 知 识

1.1 概念和符号

设 K 是一个特征为 0 的微分域, K 具有有限多个微分算子: $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$, 且 $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$; Θ 是一个由 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ 生成的自由幺半群, 具有幺元 $\varepsilon = \delta_1^0\cdots\delta_m^0$, Θ 的一个元素称为导数算子• 一个导数算子 $\theta = \delta_1^{i_1}\cdots\delta_m^{i_m}$ 的阶(order) 定义为 $\mathrm{ord}(\theta) = i_1 + \cdots + i_m$, $i_j \in$

* 收稿日期: 2001_06_16; 修订日期: 2002_04_09
基金项目: 国家 973 资助项目(G1998030600) ; 国家自然科学基金资助项目(10072013)
作者简介: 张鸿庆(1936—) , 男, 黑龙江人, 教授, 博士生导师.

$\mathbf{N}=\{0,1,\cdots\}$, $j=1,2,\cdots,m$• 记为 ord(θ)• 如果一个导数算子的阶为正数, 则称其为真导数算子, 否则, 称其为平凡算子•

令 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 K 上的一组微分未定元, 对每一个 y_k, θy_k 表示 y_k 关于 θ 的偏导数• 我们约定: $\varepsilon y_k=y_k$, (ε 为 Θ 的幺元)• 令 $\Theta(Y)=\{\theta y_k \mid 1\leqslant k\leqslant n,\theta\in\Theta\}$• $\Theta(Y)$ 的一个元素 θy_k 称为 y_k 的导数, k 称为 θy_k 的类•

$\Theta(Y)$ 的元素间的序定义如下•

定义 1　令 $\theta_1 y_i,\theta_2 y_j\in\Theta(Y)$, $\theta_1 y_i=\delta_1^{i_1}\cdots\delta_m^{i_m}y_i$, $\theta_2 y_j=\delta_1^{j_1}\cdots\delta_m^{j_m}y_j$, 称 $\theta_1 y_i$ 大于 $\theta_2 y_j$, 记为 $\theta_1 y_i>\theta_2 y_j$, 如果 $\mathrm{ord}(\theta_1)>\mathrm{ord}(\theta_2)$, 或 $\mathrm{ord}(\theta_1)=\mathrm{ord}(\theta_2)$, $i>j$, 或 $\mathrm{ord}(\theta_1)=\mathrm{ord}(\theta_2)$, $i=j$, 并且存在一个正整数 $k(1\leqslant k\leqslant m)$, 使得 $i_s=j_s(s>k)$ 且 $i_k<j_k$•

微分多项式环 $R=K\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是由 K 添加 $\Theta(Y)$ 的元素生成的可换多项式环, 它的一个元素称为一个微分多项式• 如果我们忽略其微分结构, 则 R 就成为一个代数多项式环 $K[\Theta(Y)]$, 称为基环•

定义 2　R 的一个子集 I 称为一个 R 的微分理想, 如果 $\forall P_1,P_2\in I$, $\forall Q\in R$, 则 $P_1+P_2\in I$, $P_1Q\in I$, $\theta\in\Theta$, 则 $\theta P_1\in I$•

如果 I 是由 R 的有限个元素所生成的, 则我们称 I 是有限生成的• 本文用到的微分理想, 都是指有限生成理想• 设 DPS 是一个微分多项式组, 用 [DPS] 表示它所生成的微分理想, (DPS) 表示忽略其微分结构后, 所生成的代数理想•

由于本文只讨论线性偏微分方程组的情况, 所以以下涉及的微分多项式, 如果没有特别说明, 都是指线性的•

设 $P\in K\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\setminus K$, 按上面规定的次序, 在一个微分多项式中出现的最高阶导数称为微分多项式的首导数, 记为: $\mathrm{ld}(P)$• 首导数的导数称为主导数, 其余的称为参数导数• 首导数的系数称为初式, 记为: $\mathrm{ini}(P)$• 设微分多项式 P 的首导数为 θy_i, P 对 θy_i 的形式偏导数称为 P 的隔离子, 记为: $\mathrm{sep}(P)$• 在微分多项式中, 不出现导数的一类称为平凡的, 其余的称为非平凡的• 对于两个非平凡多项式, 他们的序由他们的首导数的序决定, 若首导数相同, 则称他们是等价的• 此外, 我们规定平凡多项式小于非平凡多项式, 这样, 我们就在微分多项式之间引入了一个偏序, 记为 >•

设 F、G 是两个微分多项式, G 非平凡, 称 F 关于 G 约化, 如果 G 的首导数或 G 的首导数的导数不在 F 中出现• 我们可以通过伪微分带余除法, 求得 F 对 G 的余式, 该余式对于 G 是约化的•

$$\mathrm{ini}(G)^a\mathrm{sep}(G)^bF=QG+r,$$

其中 a、b 是整数, r 对于 G 是约化的•

一个微分升列是指 K 上的一个非零元或者不属于 K 的一个微分多项式序列: $P_1,P_2,\cdots,P_s$, 满足 $P_s>\cdots>P_2>P_1$, 且当 $i>j$ 时, P_i 关于 P_j 是约化的•

对于线性微分代数方程组 $\mathrm{DPS}\subset K\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, 我们首先选出它的基列, 记为 DBS• 通过伪微分带余除法求出在 DPS 中, 但不在基列中的微分多项式的余式, 然后添加可积条件• 重复这个过程, 直到 DPS \ DBS 中的每一个元素对基列求余, 其余式全为零且可积条件为空集• 称这个基列为 DPS 的特征集, 记它为 DCS• 吴[6] 称之为被动的微分升列• 该特征集的一个 IS- 幂集是指 DCS 中所有微分多项式的初式与隔离子的某些方幂的积, 记为 J_k•

设 Ω 是K 的一个微分泛域, DPS $\subset K\left\{y_1, y_2, \cdots, y_n\right\}$, DPS 的一个微分零点(解) 是指 Ω上的一个 n 元组$(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \Omega^n$, 使得用$\theta z_i$ 代入DPS中所有的$\theta y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, DPS 中的所有微分多项式均变为零• DPS 的所有微分零点集合记为 d_zero(DPS)• 当忽略 DPS 的微分结构时, 即将DPS 看作基环上的一个代数多项式组时, 其代数零点的集合记为 zero(DPS), 显然 d_zero(DPS) $\subseteq$ zero(DPS), 反之不成立•

1.2 正则系统

定理[well_ordering principle][6] 设DPS $\subset K\left\{y_1, y_2, \cdots, y_n\right\}$, DCS是它的特征集, I_i 和S_i 分别是它的初式和隔离子, J 是 DCS 的 IS_幂集, 则

d_zero(DCS/J) $\subset$ d_zero(DPS) $\subset$ d_zero(DPS),

d_zero(DPS) = d_zero(DCS/J) $\cup_i$d_zero(DPS$'_i$) $\cup_i$d_zero(DPS$''_i$),

其中 DPS$'_i$ 和 DPS$''_i$ 分别是向 DPS 中添加 DCS 的初式和隔离子构成的微分多项式组•

如果DPS是线性常系数的, 显然, $J = 1$, 则d_zero(DPS) = d_zero(DCS)• 若我们能够判定DCS 有解的话, 则能得知原方程组 DPS 有解•

Rosenfeld 引理是微分代数中一个很重要的引理, 它是微分代数和代数的桥梁•

引理(Rosenfeld)[7,8] 设 DPS $\subset K\left\{y_1, y_2, \cdots, y_n\right\}$, 则 DPS 是凝聚自约化的当且仅当在[DPS]:(IS)$^\infty$ 中的任何对 DPS 是部分约化的多项式 G 也在(DPS):(IS)$^\infty$ 中•

正则系统是 Rosenfeld 引理应用的一个方面•

定义3 设DCS= $A_1, A_2, \cdots, A_t$, $I_1, I_2, \cdots, I_t$ 和$S_1, S_2, \cdots, S_t$ 分别是其所对应的初式和隔离子, Q 是一个对于 DCS 是部分约化的$K\left\{y_1, y_2, \cdots, y_n\right\}$中的微分多项式, 称系统

$A_1 = 0, A_2 = 0, \cdots, A_t = 0, I_1 \neq 0, I_2 \neq 0, \cdots, I_t \neq 0,$

$S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_t \neq 0, Q \neq 0$

为一个正则系统• 正则系统的解成为正则解•

定理(Rosenfeld)[7,8] 一个正则系统有一个微分零点当且仅当它有一个代数零点•

因此, 我们可以把判定一个微分多项式组有无解的问题转化为判定其对应的代数多项式组有无解的问题•

2 主要结果

本部分所用到的微分多项式都是指线性常系数微分多项式•

对于任意给定的一个微分代数方程组 DPS = 0, 如果不是显然矛盾的, 从偏微分方程的理论来说, 很难判定它是否有解; 从微分代数的角度出发, 可以通过 Rosenfeld 引理, 判定它所对应的代数方程组是否有解, 而判定代数方程组是否有解, 我们可以用 Grobner 基的方法, 一个代数方程组无解当且仅当它的 Grobner 基为{1}•

设 $R = K\left\{u_1, u_2, \cdots, u_t, v_1, v_2, \cdots, v_r\right\}$ 是一个带有 m 个微分算子的微分环, Au, Cv, Dv $\subset R$, 规定: Au 是指, 在它的每一个微分多项式中, 只出现 $u_1, u_2, \cdots, u_r$ 和它的有限阶导数• Dv 是指: 在它的每一个微分多项式中, 只出现$v_1, v_2, \cdots, v_r$ 和它的有限阶导数• $u =$ Cv 是指一个变换 $u_i =$ Cv_i, $i = 1, 2, \cdots, t$•

设A$u = 0$是我们所要求解的方程组, 经过变换 $u =$ Cv, 得到目标方程组 D$v = 0$• 如果 D$v = 0$有解, 一般地有 C d_zero(Dv) $\subseteq$ d_zero(Au)• 若无解, 则说明A$u = 0$没有 $u =$ Cv 类

型的解•　下面的定理给出了二者相等的充要条件•

定理 1　设 $Au = 0$、$u = Cv$、$Dv = 0$, 则系统 $\{Dv, Cv\_u\}$ 的只含有 u 的可积条件是恰为 Au 的特征集当且仅当 $\mathrm{d\_zero}(Au) = C\,\mathrm{d\_zero}(Dv)$•

这里恰为 Au 的特征集是指, 若还有其它只含有 u 的可积条件, 则此可积条件被 Au 的特征集约化为0•

这里的序为, 在前面规定的序的基础上, 再规定 $u_1 < u_2 < \cdots < u_t < v_1 < v_2 < v_r$•

证明　由 Rosenfeld_Grobner 算法, 首先判定 $\{Au = 0, u = Cv, Dv = 0\}$ 是否有解, 若无解, 则说明 $Au = 0$ 没有 $u = Cv$ 类型的解•　下面假设其有解•

$(\Leftarrow)$ 反证•　设 Au 的特征集为 DCS•　假设 $\{Dv, Cv\_u\}$ 还有其它只含有 u 的可积条件, 记为 Pu, 且不能被 DCS 约化为 0, 设 $Pu \equiv P_1u \bmod[\mathrm{DCS}]$•　此时, 系统 $\{Dv, Cv\_u\}$ 的特征集中只含有 u 的可积条件正好是 $\{\mathrm{DCS}, P_1u\}$ 的特征集, 记为 DCS_1•　由假设可知, $\mathrm{d\_zero}(\mathrm{DCS}_1) \subset \mathrm{d\_zero}(\mathrm{DCS})$, 且是真包含, 否则 P_1u 就会被 DCS 约化为 0•　这说明使得 $\{Dv = 0, Cv = u\}$ 有解的 u 的集合为 $\mathrm{d\_zero}(\mathrm{DCS}_1)$•　而 $\mathrm{d\_zero}(\mathrm{DCS}) = \mathrm{d\_zero}(Au)$, 矛盾•

$(\Rightarrow)$ 由 Rosenfeld_Grobner 算法, 可知 $\{Au = 0, u = Cv, Dv = 0\}$ 有解•　设它的特征集为 DCS, 而 $\mathrm{d\_zero}(Au, u\_Cv, Dv) = \mathrm{d\_zero}(\mathrm{DCS})$, 由已知条件系统 $\{Dv$、$Cv\_u\}$ 的只含有 u 的可积条件是恰为 Au 的特征集, 可知, 使得 $\{Dv = 0, Cv\_u = 0\}$ 有解的 u 的集合恰为 $\mathrm{d\_zero}(Au)$•　即 $\forall u \in \mathrm{d\_zero}(Au)$, $\exists v \in \mathrm{d\_zero}(Dv)$, 且满足 $u = Cv$, 即 $\mathrm{d\_zero}(Au) \subset C\,\mathrm{d\_zero}(Dv)$•　同理有反包含关系成立•

对于线性变系数的情形, 由 well_ordering principle 可知, DPS_i' 和 DPS_i'' 的特征集都是 K 中的一个多项式, 其零点与 u、v 无关, 我们不予以讨论•　对于它的正则解, 有与常系数类似的结论, 我们就不详细写出了•

3　例　子

考虑弹性力学平面应力方程组[1]:

原方程组 $Au = 0$

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0,\quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

变换 $u = Cv$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

目标方程组 $Dv = 0$

$$\Delta\Delta\varphi = 0•$$

其中 $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}•$$

规定序为: $\tau_{xy} > \sigma_x > \sigma_y$, $x > y$, 方程组 $Dv = 0$, $u = Cv$ 的特征集为:

$$\Delta\Delta\varphi = 0,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \sigma_y,\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -\tau_{xy},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \sigma_x,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0,\quad \Delta\Delta\sigma_y = 0•$$

在上面的方程组中, 只含有 $u(\tau_{xy}, \sigma_x, \sigma_y)$ 的方程组是 $Au = 0$ 在上面规定序下的特征集• 因此, 在这个变换下, 我们得到的解是完备的•

4 结 论

本文只讨论了线性偏微分方程组的完备性, 对于非线性的情况, 由于其特征集的计算复杂度较高(指数形式) 和它本身的情形比较复杂, 本文没有涉及, 但这仍是一个值得研究的问题•

[参 考 文 献]

[1] 张鸿庆. 弹性力学方程组一般解的统一理论[J]. 大连工学院学报, 1978, **18**(3): 23—47.

[2] 张鸿庆, 王震宇. 胡海昌解的完备性和逼近性[J]. 科学通报, 1985, **30**(5): 342—344.

[3] 王敏中. 关于胡海昌解的完备性[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(2): 243—249.

[4] Ritt J F. Differential Algebra [M]. New York: Dover Publication Inc, 1950, 57—140.

[5] Kolchin E R. Differential Algebra and Algebraic Groups [M]. New York: Academic Press, 1973, 43—54.

[6] WU Wen_tsun. On the foundation of algebraic differential geometry[R]. MM research preprints, 1989, **3**: 1—29.

[7] Rosenfeld A. Specialization in differential algebra[J]. Trans Amer Math Soc, 1959, **90**(2): 394—407.

[8] Boulier F, Lazard D, Ollivier F, et al. Representation for the radical of a finitely generated differential ideal[A]. In: Levelt A Ed. ISSAC'95[C]. Montrel, Canada: ACM Press, 1995, 158—166.

A Symbolic Computation Method to Decide the Completeness of the Solutions to the System of Linear Partial Differential Equations

ZHANG Hong_qing, XIE Fu_ding, LU Bin

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: A symbolic computation method to decide whether the solutions to the system of linear partial differential equation is complete via using differential algebra and characteristic set is presented. This is a mechanization method, and it can be carried out on the computer in the Maple environment.

Key words: differential algebra; system of partial differential equation; symbolic computation; characteristic set