

文章编号: 1000-0887(2002) 10-1025-10

中细柔性圆环壳整体弯曲的一般解及 在波纹管计算中的应用(III) —— C 型波纹管的计算^{*}

朱卫平, 黄 黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: (III) 是(I) 的具体应用. 计算了 C 型波纹管的角向刚度、横向刚度和相应的应力分布. 将波纹管的凸面和凹面分开处理, 分别应用一般解(I), 使连接点满足内力和变形连续性条件. 所得结果与相应的数值积分解、其它理论解及实验进行了比较. 结果表明, 中细柔性圆环壳的方程和一般解(I) 准确可信.

关键词: 柔性壳理论; 中细圆环壳; C 型波纹管; 整体弯曲; 一般解
中图分类号: O343.2 文献标识码: A

引 言

C 型波纹管或称半圆弧波纹管(图 1) 具有复杂的形状, 其子午线由半径相等的半圆弧凹凸相间连接而成, 在连接点纬度角 ϕ 存在 180° 的突变. 因此, 正确处理各弧段之间的连接条件, 使应力、应变满足连续性要求是波纹管计算的关键. 有关旋转壳的特解都不能真正解决这一问题. 成功的解有: 以钱伟长^[1,2] (1979, 1980) 轴对称细环壳、圆环壳一般解为基础的解析解^[3,4]; 黄黔^[5~7] (1982, 1986) 的初参数积分法、摄动初参数积分法等. 关于纯弯矩作用下的 C 型波纹管, 陈山林^[8] (1987) 作了讨论; 朱卫平等^[9~11] (1998~2000) 以柔性壳理论为基础用细环壳一般解、初参数数值积分法进行了计算. 本文采用(I) 中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解和(II) 的相应的公式, 计算了 C 型波纹管在纯弯矩作用下的转角和应力分布, 及由横向位移引起的反力和应力分布, 并对计算结果进行了验证.

1 C 型波纹管的纯弯

波纹管在纯弯矩作用下(图 1) 其变形是关于赤道平面 ($\phi = 0$) 对称的, 因此, 我们只需研究其中的半个波, 如波纹 BCD . 由(I) 的式(1) 可知, 在这种情况下基本函数 V 是关于 $\phi = 0$ 反对称的. 于是利用 V 的反对称性可消去齐次解(II) 的式(8) 中的 2 个任意常数, 得

* 收稿日期: 2001_06_05; 修订日期: 2002_04_11

作者简介: 朱卫平(1962—), 男, 江苏南通人, 博士, 已发表论文 20 多篇(E-mail: wpzhu@mail.shu.edu.cn).

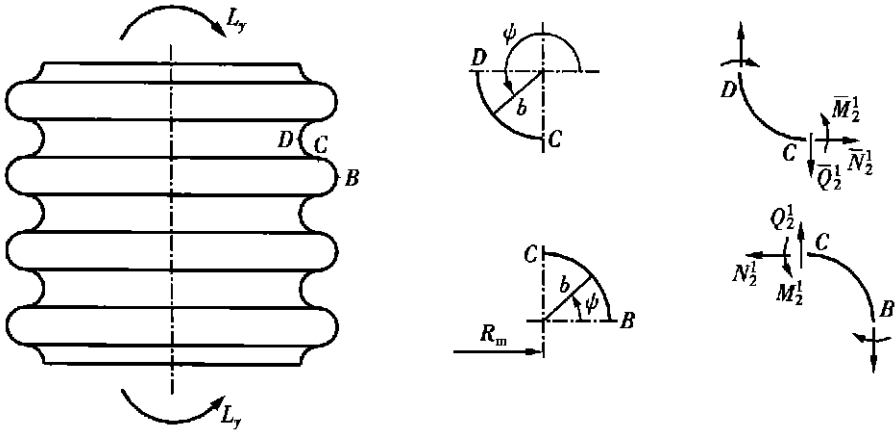


图 1 C型波纹管在子午面内纯弯曲

$$\left. \begin{aligned} V_0^r &= \operatorname{Re} V_0 = \frac{L_y^0}{\mu} (-c_1 \Gamma_2 + c_2 \Gamma_1), \\ V_0^i &= \operatorname{Im} V_0 = \frac{L_y^0}{\mu} (c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里, V_0^r 和 V_0^i 都是关于 $\psi = 0$ 反对称的, c_1, c_2 为新的任意实数,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= e^{-\pi\beta/2} \left[\rho_1 \sin \frac{\pi Y}{2} + \rho_2 \cos \frac{\pi Y}{2} \right], \quad \Gamma_2 = e^{-\pi\beta/2} \left[\rho_1 \cos \frac{\pi Y}{2} - \rho_2 \sin \frac{\pi Y}{2} \right], \\ \rho_1 &= \omega_1 \cosh \beta\psi - \omega_2 \sinh \beta\psi, \quad \rho_2 = \omega_3 \cosh \beta\psi - \omega_4 \sinh \beta\psi, \\ \omega_1 &= F_2 \cos \psi\psi - G_1 \sin \psi\psi, \quad \omega_2 = G_2 \cos \psi\psi - F_1 \sin \psi\psi, \\ \omega_3 &= F_1 \cos \psi\psi + G_2 \sin \psi\psi, \quad \omega_4 = G_1 \cos \psi\psi + F_2 \sin \psi\psi; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} 2F_1 &= f_1(\psi) - g_1(\psi), \quad 2F_2 = f_2(\psi) - g_2(\psi), \\ 2G_1 &= f_1(\psi) + g_1(\psi), \quad 2G_2 = f_2(\psi) + g_2(\psi) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)中 $f_1(\psi), f_2(\psi), g_1(\psi), g_2(\psi)$ 的定义同(II)中式(10), 可见 F_1 和 F_2 是 ψ 的奇函数, G_1 和 G_2 是 ψ 的偶函数.

有关的非齐次解见(II)中式(3), 它原来就是关于 $\psi = 0$ 反对称的. 即

$$\left. \begin{aligned} V_L^r &= \operatorname{Re} V_L = \frac{L_y^0}{\mu} J, \quad V_L^i = \operatorname{Im} V_L = \frac{L_y^0}{\mu} K, \\ J &= \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin n\psi, \quad K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin n\psi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

综合起来, 在纯弯矩作用下中细柔性圆环壳一般解 V 的实部 V^r 和虚部 V^i 为

$$\left. \begin{aligned} V^r &= (L_y^0 / \mu) (J - c_1 \Gamma_2 + c_2 \Gamma_1), \\ V^i &= (L_y^0 / \mu) (K + c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式(5)代入(I)中式(2)和(4)可计算相应的内力和位移.

下面我们把波纹 BCD 分成 BC 和 DC 两段, 分别应用式(5)进行计算. 在 BC 段, 有

$$\left. \begin{aligned} V^r &= \frac{L_y^0}{\mu} (J - c_1 \Gamma_2 + c_2 \Gamma_1), \\ V^i &= \frac{L_y^0}{\mu} (K + c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2) \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在 DC 段, 记

$$\left. \begin{aligned} V^r &= -\frac{L_y^0}{\mu}(J - c_1 \Gamma_2 + c_2 \Gamma_1), \\ V^i &= -\frac{L_y^0}{\mu}(K + c_1 \Gamma_1 + c_2 \Gamma_2) \quad \pi \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)、(8)共有4个任意常数 c_1 、 c_2 、 c_1 和 c_2^* 。在 C 点, 内力和变形的连续性条件可提供4个:

$$\left. \begin{aligned} x(\pi/2) &= x(3\pi/2), \quad M_{\frac{1}{2}}(\pi/2) = -M_{\frac{1}{2}}(3\pi/2), \\ N_{\frac{1}{2}}(\pi/2) &= N_{\frac{1}{2}}(3\pi/2), \quad N_{\frac{1}{2}}(\pi/2) = N_{\frac{1}{2}}(3\pi/2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

解代数方程组式(8), 将得到确定的 c_1 、 c_2 、 c_1 和 c_2^*

波纹管1个波端面之间的相对转角, 由于变形的对称性, 等于 D 点(平行圆)相对于 B 点(水平面)转角的2倍, 并规定其转向和端面弯矩一致者为正。于是由(I)中式(4)式得

$$\Omega_y = -2 \left[\left(\frac{u_z}{R} \right)_{BC} + \left(\frac{u_z}{R} \right)_{\omega} \right] = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha V^r \sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{2\alpha V^r \sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} d\phi \quad (9)$$

下面以 Turner_Ford(1957)实验模型为算例。材料常数取 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$, 几何尺寸和参数见表1, 中细环壳方程中 m 试取(I)中式(6)的极限值, 即 $m = 3$ 。Turner 和 Ford 对这3个模型做了拉伸试验, 测定了轴向刚度系数和内、外表面的应力。这里用本文中细柔性圆环壳一般解计算这些模型在纯弯矩作用下的刚度和应力分布。应用(II)中式(12)和(14), 可得到波纹管纯弯曲和轴向拉压之间的等价关系

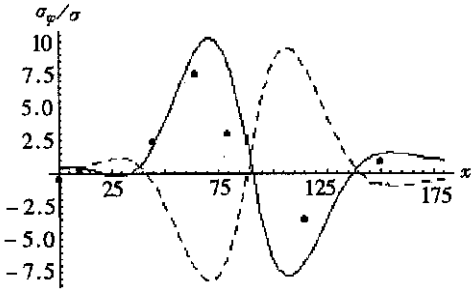
$$\left. \begin{aligned} \Omega_y \left\{ \left(\frac{8W_y}{\pi b h R_m E} \right) \right\} &\sim \delta_z \left\{ \left(\frac{4WR_m P_z}{\pi b h E} \right) \right\}, \\ \sigma_{\text{stress}} \left\{ \left(\frac{L_y}{\pi b h R_m} \right) \right\} &\sim \sigma_{\text{stress}} \left\{ \left(\frac{P_z}{2\pi b h} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

表1 模型几何尺寸和参数

模型	b/mm	R_m/mm	h/mm	α	μ
B	49.53	176.02	1.40	0.281	16.48
C	50.04	176.02	4.32	0.284	5.44
D	24.89	176.02	1.37	0.141	4.24

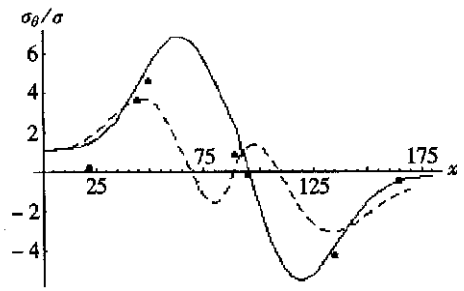
表2 波纹管刚度

求解内容	求解方法	模型		
		B	C	D
$\Omega_y \left\{ \left(\frac{8W_y}{\pi b h R_m E} \right) \right\}$	本文中细环壳一般解	0.653	0.753	0.731
	文[9]细环壳一般解	0.592	0.667	0.634
	文[11]圆环壳数值解	0.622	0.753	0.704
$\delta_z \left\{ \left(\frac{4WR_m P_z}{\pi b h E} \right) \right\}$	文[4]圆环壳一般解	0.604	0.685	0.702
	文[3]细环壳一般解	0.592	0.662	0.695
	Turner_Ford 试验	0.412	0.671	0.615



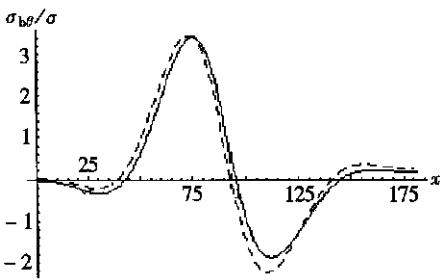
—子午向外表面正应力 ($\theta = \pi$)
 ---子午向内表面正应力 ($\theta = \pi$)
 • Turner_Ford(1957) 实验(外表面)

图2 模型 B



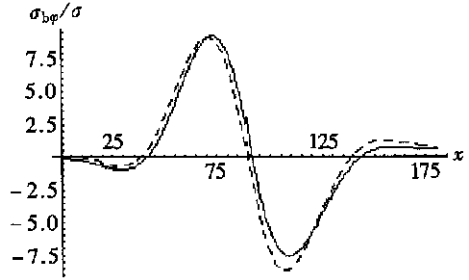
—环向外表面正应力($\theta = \pi$)
 ---环向内表面正应力($\theta = \pi$)
 • Turner_Ford(1957) 实验(外表面)

图3 模型 B



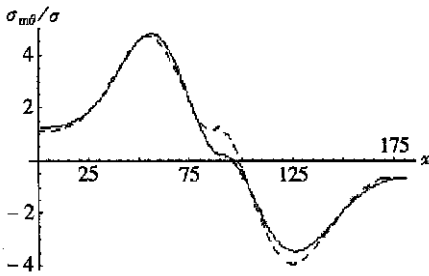
—文[11]数值解, ---中细环壳一般解

图4 模型 C 外表面环向弯曲应力 ($\theta = \pi$)



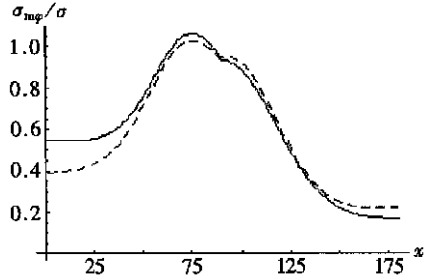
—文[11]数值解, ---中细环壳一般解

图5 模型 C 外表面子午向弯曲应力 ($\theta = \pi$)



—文[11]数值解, ---中细环壳一般解

图6 模型 C 环向膜应力 ($\theta = \pi$)



—文[11]数值解, ---中细环壳一般解

图7 模型 C 子午向膜应力 ($\theta = \pi$)

因此,我们的计算结果可以和有关轴对称问题的实验及计算结果进行比较。波纹外表面应力分布的比较见图 2~ 3(限于篇幅仅列出模型 B)。在应力剧变区域,实验结果要小于理论计算,这是因为实验测得是该点附近的平均应力而不是实际峰值。应力分布按细环壳求解^[9, 10],在控制方程(I)的式(1)中完全略去了 $\alpha (= b/R_m)$ 的作用,相当于把外力向圆环的圆心简化,并且在计算内力时略去了(I)的式(2)中分母 $(1 + \alpha \cos \phi)$ 的作用,因此得到的应力分布是关于环壳的极顶对称或反对称的,这是与本文的主要差别所在。我们按中细环壳求解,在控制方程中近似地考虑了 α 的作用,在内力公式中全部地考虑了 α 的作用,当 $\pi/2 < \phi < 3\pi/2$ 时得到的应力绝对值比细环壳解大,当 $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ 时得到的应力绝对值比细环壳解小,因此应力分布关于环壳的极顶不是对称或反对称的。用数值积分法对(I)中式(1)求解^[11],所得应力分布与本文一般解很接近,见图 4~ 7(限于篇幅仅列出模型 C)。按本文计

算, 子午向弯曲应力、环向薄膜应力和中面内剪应力的比较见图 8(限于篇幅仅列出模型 D)• 应当注意, 在纯弯曲情况下中面内剪应力虽然不大, 但它反映了非轴对称特征, 这是轴对称问题所没有的• 关于模型的刚度(弯矩与转角的关系), 各种计算和实验的对比见表 2•

在应力分布图中, 纵坐标是有关应力和一参考量 σ 之比:

$$\sigma = \frac{L_y}{\pi b h R_m} \sim \frac{P_z}{2\pi b h}, \quad (11)$$

横坐标 x 和角坐标 ϕ 及波纹上的点的对应关系是:

$$\phi = \begin{cases} \pi(1 + x/180) & (0 \leq x < 90, DC), \\ \pi(1 - x/180) & (90 \leq x \leq 180, CB). \end{cases} \quad (12)$$

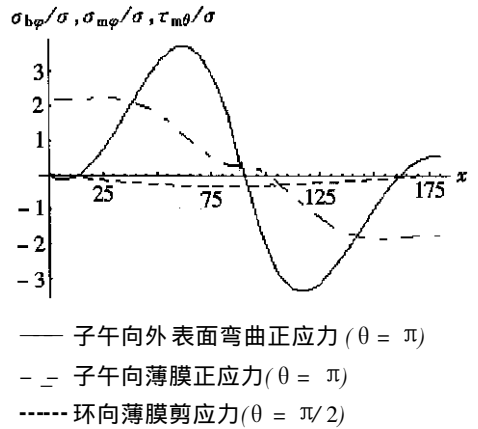


图 8 模型 D

2 C 型波纹管的横向弯曲

我们考虑 C 型波纹管的 1 个波(图 9a)• 总体上, 下端 E 不能移动和转动, 上端 A 只允许有相对的横向位移 $u_A = u_A^*$ • 先将 1 个波纹分成上下 2 个半波, 各段端面上的反力(如图 9b)为

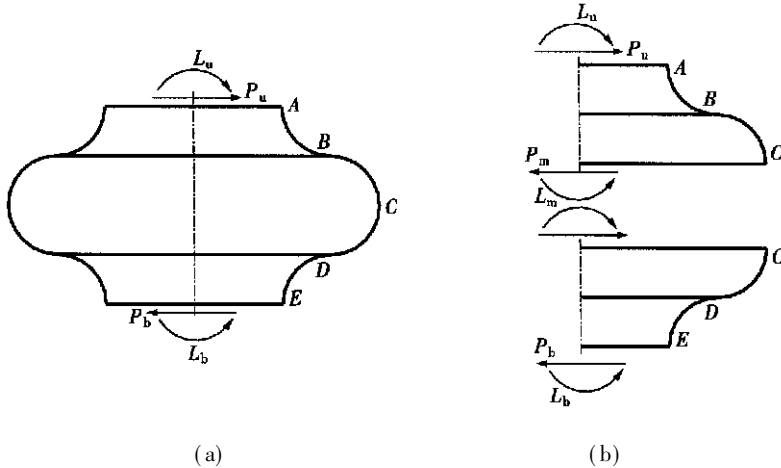


图 9 C 型波纹管在横向位移作用下的受力图

$$\left. \begin{aligned} C: & P_u, L_u, P_u^0 = \alpha a P_u / (\pi D), L_u^0 = \alpha^2 L_u / (\pi D), \\ A: & P_m = P_u, L_m = L_u + 2a P_u, P_m^0 = \alpha a P_m / (\pi D), L_m^0 = \alpha^2 L_m / (\pi D), \\ E: & P_b = P_u, L_b = L_u + 4a P_u, P_b^0 = \alpha a P_b / (\pi D), L_b^0 = \alpha^2 L_b / (\pi D). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中基本未知反力是 P_u 和 L_u • 根据(II) 中式(1) ~ (11), 每 1/4 环壳对应的解是

AB: $\pi \leq \phi \leq 3\pi/2,$

$$V^r = - \frac{L_u^0}{\mu} J - \frac{P_u^0}{\mu} K + c_1 F_2(\phi) - c_2 F_1(\phi) + c_3 G_1(\phi) + c_4 G_2(\phi), \quad (14a)$$

$$V^i = - \frac{L_u^0}{\mu} J - \frac{P_u^0}{\mu} K + c_1 F_1(\phi) + c_2 F_2(\phi) - c_3 G_2(\phi) + c_4 G_1(\phi) \cdot \quad (14b)$$

CB: $0 \leq \phi \leq \pi/2,$

$$V^r = \frac{L_m^0}{\mu} J + \frac{P_m^0}{\mu} K + c_5 F_2(\phi) - c_6 F_1(\phi) + c_7 G_1(\phi) + c_8 G_2(\phi), \quad (14c)$$

$$V^i = \frac{L_m^0}{\mu} J + \frac{P_m^0}{\mu} K + c_5 F_1(\phi) + c_6 F_2(\phi) - c_7 G_2(\phi) + c_8 G_1(\phi) \cdot \quad (14d)$$

DC: $3\pi/2 \leq \phi \leq 2\pi$,

$$V^r = \frac{L_m^0}{\mu} J + \frac{P_m^0}{\mu} K + c_9 F_2(\phi) - c_{10} F_1(\phi) + c_{11} G_1(\phi) + c_{12} G_2(\phi), \quad (14e)$$

$$V^i = \frac{L_m^0}{\mu} J + \frac{P_m^0}{\mu} K + c_9 F_1(\phi) + c_{10} F_2(\phi) - c_{11} G_2(\phi) + c_{12} G_1(\phi) \cdot \quad (14f)$$

DE: $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$,

$$V^r = -\frac{L_b^0}{\mu} J - \frac{P_b^0}{\mu} K + c_{13} F_2(\phi) - c_{14} F_1(\phi) + c_{15} G_1(\phi) + c_{16} G_2(\phi), \quad (14g)$$

$$V^i = -\frac{L_b^0}{\mu} J - \frac{P_b^0}{\mu} K + c_{13} F_1(\phi) + c_{14} F_2(\phi) - c_{15} G_2(\phi) + c_{16} G_1(\phi) \cdot \quad (14h)$$

在式(14)中共有18个未知量,它们是 P_u 和 L_u 及 c_1, c_2, \dots, c_{16} 。可由端面边界条件和连接点的连续性条件确定。

各段相对转角和相对横向位移由(I)中式(4)求得:

$$\Omega_{BA} = - \int_{3\pi/2}^{\pi} \alpha \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} (V^r)_{BA} d\phi, \quad (15a)$$

$$u_{BA} = - \int_{3\pi/2}^{\pi} (V^r)_{BA} \cos \phi b d\phi, \quad (15b)$$

$$\Omega_{CB} = - \int_0^{\pi/2} \alpha \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} (V^r)_{CB} d\phi, \quad (15c)$$

$$u_{CB} = - \int_0^{\pi/2} (V^r)_{CB} \cos \phi b d\phi, \quad (15d)$$

$$\Omega_{DC} = - \int_{3\pi/2}^{2\pi} \alpha \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} (V^r)_{DC} d\phi, \quad (15e)$$

$$u_{DC} = - \int_{3\pi/2}^{2\pi} (V^r)_{DC} \cos \phi b d\phi, \quad (15f)$$

$$\Omega_{ED} = - \int_{\pi}^{\pi/2} \alpha \frac{\sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} (V^r)_{ED} d\phi, \quad u_{ED} = - \int_{\pi}^{\pi/2} (V^r)_{ED} \cos \phi b d\phi \cdot \quad (15g, h)$$

于是,端面A相对端面E的总转角

$$\Omega_{AE} = \Omega_{BA} + \Omega_{CB} + \Omega_{DC} + \Omega_{ED}; \quad (16)$$

端面A相对端面E的总横向位移

$$u_{AE} = u_{BA} + u_{CB} + u_{DC} + u_{ED} \cdot \quad (17)$$

将式(14)代入(I)中式(2)可得各内力,在环壳的平行圆上满足(I)中式(3),即

$$\left. \begin{aligned} -N_2^1 \sin \phi + Q_2^1 \cos \phi - S^1 &= P_x / \pi R, \\ -N_2^1 R \cos \phi - Q_2^1 R \sin \phi - M_2^1 &= L_y / \pi R \cdot \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

下面讨论端面边界条件和连接点的连续性条件(图10)。

A: $\phi = \pi$ (AB)

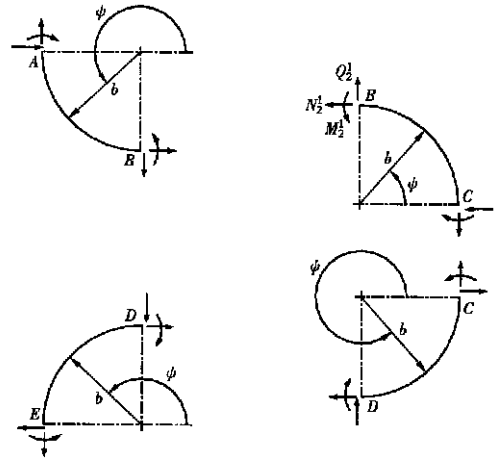


图10 C型波纹管连接点的内力图

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{AE} = 0, u_{AE} = u_A, x = \text{Re}V = (V^r)_{AB} = 0, \\ \partial(V^r)_{AB}/\partial\phi = 0 \quad (\text{式(18) 第2式}) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} B: \quad \phi = 3\pi/2 \quad (AB), \quad \phi = \pi/2 \quad (CB) \\ (x)_{AB} = (x)_{CB}, (S^1)_{AB} = - (S^1)_{CB}, \\ (M_2^1)_{AB} = - (M_2^1)_{CB}, (N_1^1)_{AB} = (N_1^1)_{CB} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

等价于

$$\left. \begin{aligned} (V^r)_{AB} = (V^r)_{CB}, (V^i)_{AB} = - (V^i)_{CB}, \\ \partial(V^r)_{AB}/\partial\phi = - \partial(V^r)_{CB}/\partial\phi, \partial(V^i)_{AB}/\partial\phi = \partial(V^i)_{CB}/\partial\phi \cdot \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

$$\left. \begin{aligned} C: \quad \phi = 0 \quad (CB), \quad \phi = 2\pi \quad (DC) \\ (x)_{CB} = (x)_{DC}, (S^1)_{CB} = (S^1)_{DC}, \\ (M_2^1)_{CB} = (M_2^1)_{DC}, (N_1^1)_{CB} = (N_1^1)_{DC} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

等价于

$$\left. \begin{aligned} (V^r)_{CB} = (V^r)_{DC}, (V^i)_{CB} = (V^i)_{DC}, \\ \partial(V^r)_{CB}/\partial\phi = \partial(V^r)_{DC}/\partial\phi, \partial(V^i)_{CB}/\partial\phi = \partial(V^i)_{DC}/\partial\phi \cdot \end{aligned} \right\} \quad (21b)$$

$$\left. \begin{aligned} D: \quad \phi = 3\pi/2 \quad (DC), \quad \phi = \pi/2 \quad (DE) \\ (x)_{DC} = (x)_{DE}, (S^1)_{DC} = - (S^1)_{DE}, \\ (M_2^1)_{DC} = - (M_2^1)_{DE}, (N_1^1)_{DC} = (N_1^1)_{DE} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

等价于

$$\left. \begin{aligned} (V^r)_{DC} = (V^r)_{DE}, (V^i)_{DC} = - (V^i)_{DE}, \\ \partial(V^r)_{DC}/\partial\phi = - \partial(V^r)_{DE}/\partial\phi, \partial(V^i)_{DC}/\partial\phi = \partial(V^i)_{DE}/\partial\phi \cdot \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

$$\left. \begin{aligned} E: \quad \phi = \pi \quad (DE) \\ x = \text{Re}V = (V^r)_{DE} = 0, \\ \partial(V^r)_{DE}/\partial\phi = 0 \quad (\text{式(18) 第2式}) \cdot \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

在上下端面上式(18)的第1式为恒等式。式(19)~(23)有18个相互独立的方程,联立求解,得到式(14)中的18个未知量 $P_u, L_u, c_1, c_2, \dots, c_{16}$ 。

仍以Turner_Ford的实验模型作算例,模型的几何尺寸和参数见表1,每个模型只取其中的1个波进行研究,在上端施加一横向位移 Δ_x 。各模型单波横向刚度见表3。应力分布见图11~19(限于篇幅每个模型仅列出一部分)。缺少这方面的实验数据,但我们按文[11]的数值积分法作了验算(图15~18)。

表3 单波横向位移与横向力之间的关系

$\Delta_x \sqrt{\left(\frac{2\mu R_m P_u}{\pi b h E}\right)}$	模 型		
	B	C	D
本文一般解	0.240	0.457	0.196
数值积分解	0.232	0.438	0.218

在应力分布图11~19中,纵坐标是有关应力和一参考量 σ 之比:

$$\sigma = P_u / (\pi b h) \cdot \quad (24)$$

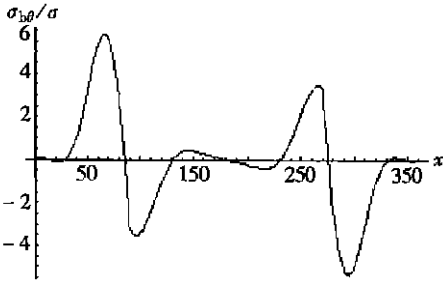


图 11 模型 B 外表面环向弯曲应力 ($\theta = 0$)

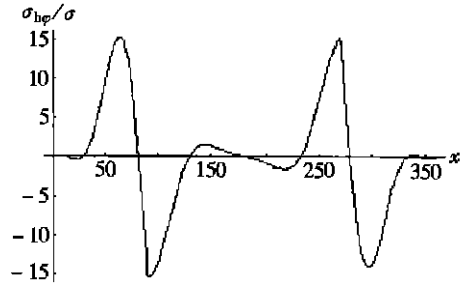


图 12 模型 B 外表面子午向弯曲应力 ($\theta = 0$)

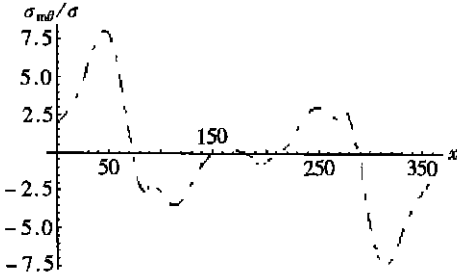


图 13 模型 B 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$)

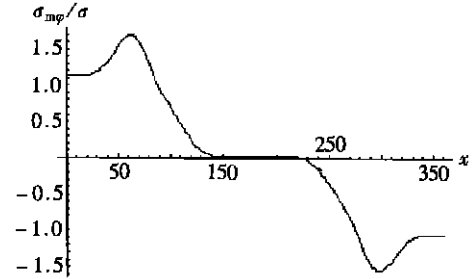
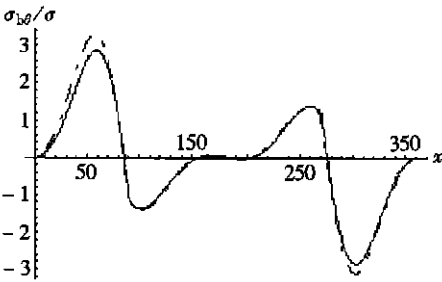
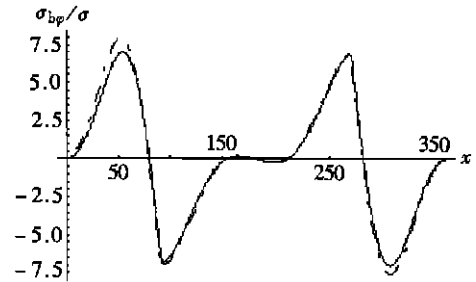


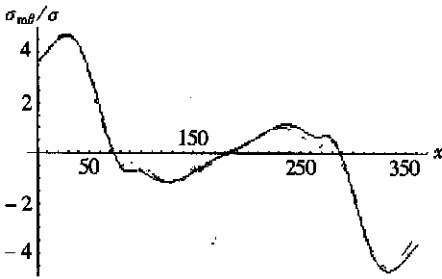
图 14 模型 B 子午向薄膜正应力 ($\theta = 0$)



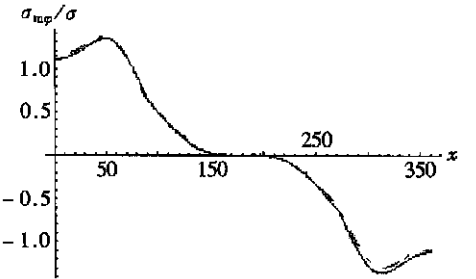
—文[11]数值解, - - 中细环壳一般解
图 15 模型 C 外表面环向弯曲应力 ($\theta = 0$)



—文[11]数值解, - - 中细环壳一般解
图 16 模型 C 外表面子午向弯曲应力 ($\theta = 0$)



—文[11]数值解, - - 中细环壳一般解
图 17 模型 C 环向膜应力 ($\theta = 0$)



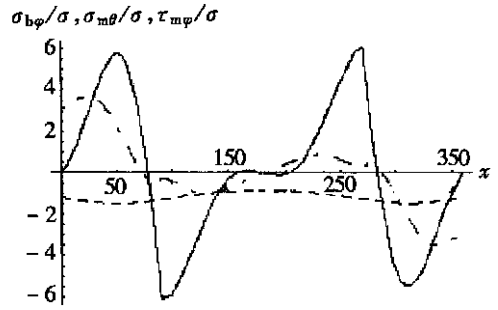
—文[11]数值解, - - 中细环壳一般解
图 18 模型 C 子午向膜应力 ($\theta = 0$)

横坐标 x 和角坐标 ϕ 及波纹上的点的对应关系是:

$$\psi = \begin{cases} \pi \left(1 + \frac{x}{180} \right), & (0 \leq x < 90, AB), \\ \pi \left(1 - \frac{x}{180} \right), & (90 \leq x < 180, BC) \\ \pi \left(3 - \frac{x}{180} \right), & (180 \leq x < 270, AB) \\ \pi \left(-1 + \frac{x}{180} \right), & (270 \leq x < 360, AB) \end{cases} \quad (25)$$

3 结 语

对C型波纹管的计算表明, (I)给出的中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解, 能够满足该波纹管各圆弧之间应力和应变的连续性要求。通过与轴对称问题的实验和一般解进行间接的比较以及直接用数值积分法进行验算, 表明中细柔性圆环壳的方程和一般解准确可信。



— 子午向外表面弯曲正应力 ($\theta = 0$),
 - - 环向薄膜正应力 ($\theta = 0$),
 - · - · 子午向薄膜剪应力 ($\theta = \pi/2$)

图 19 模型 D 3 个主要应力对比

[参 考 文 献]

- [1] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解[J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 27—47.
- [2] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287—299.
- [3] 钱伟长. 半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用[J]. 清华大学学报, 1979, 19(1): 84—99.
- [4] 钱伟长, 郑思梁. 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(1): 97—111.
- [5] 黄黔. 用数值积分的初参数法解波纹管[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(1): 101—112.
- [6] 黄黔. 轴对称载荷下旋转壳弹性小应变的轴向任意大挠度问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(2): 115—125.
- [7] 黄黔. 摄动初参数法解轴对称壳几何非线性问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(6): 533—543.
- [8] CHEN Shan_lin. General solution of the bending of ring shells with equations in complex[A]. In: YEH Kai_yuan Ed. Progress in Applied Mechanics [C]. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987, 181—192.
- [9] 朱卫平, 黄黔, 郭平. 柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的复变量方程及细环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(9): 889—895.
- [10] ZHU Wei_ping, HUANG Qian, GUO Ping, et al. General solution for C-shaped bellows overall bending problems[A]. In: N E Shanmugam, Y J Richard Liew, V Thevendran Eds. Thin Walled Structures—Research and Development, 2nd ICTWS [C]. 1998, Singapore; Oxford, UK: Elsevier Science Ltd, 1998, 477—484.
- [11] 朱卫平. 用初参数法解C型波纹管在子午面内整体弯曲[J]. 力学季刊, 2000, 21(3): 311—315.

General Solution of the Overall Bending of Flexible Circular Ring Shells With Moderately Slender Ratio and Applications to the Bellows(III) — Calculation for C-Shaped Bellows

ZHU Wei_ping, HUANG Qian

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: This is one of the applications of Part(I), in which the angular stiffness, the lateral stiffness and the corresponding stress distributions of C-shaped bellows were calculated. The bellows was divided into protruding sections and concave sections for the use of the general solution (I), but the continuity of the stress resultants and the deformations at each joint of the sections were entirely satisfied. The present results were compared with those of the other theories and experiments, and are also tested by the numerically integral method. It is shown that the governing equation and the general solution (I) are very effective.

Key words: theory of flexible shell; circular ring shell; C-shaped bellows; overall bending; general solution