

文章编号: 1000-0887(2002) 10-1035-06

# 中细柔性圆环壳整体弯曲的一般解及在 波纹管计算中的应用(IV) —— U 型波纹管的计算\*

朱卫平, 黄黔

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委黄黔来稿)

摘要: (IV) 是(I) 的具体应用, 讨论了 U 型波纹管的角向刚度和相应的应力分布。将波纹管的凸面、凹面和环板分开处理, 分别应用一般解(I) 和由其退化而成的环板一般解, 使连接点满足表面应力和子午转角连续性条件。所得结果与细环壳解、美国膨胀节制造商协会标准(EJMA)、实验及有限元法进行了分析比较。

关键词: 柔性壳理论; 中细圆环壳; U 型波纹管; 纯弯曲; 一般解  
中图分类号: O343.2 文献标识码: A

## 引 言

U 型波纹管(图 1) 常见于管道系统中, 用来补偿管道由于热作用、基础不均匀沉降及安装误差引起的轴向位移、角位移和横向位移。这类波纹管的轴对称变形问题已得到较为深入的讨论<sup>[1~4]</sup>。其非轴对称变形问题, 可以用有限差分法<sup>[5]</sup>、有限元法进行分析。美国膨胀节制造商协会标准(EJMA)<sup>[6,7]</sup>(1993, 1998) 主要以曲梁为模型计算波纹管, 用“等效法”把非轴对称变形问题近似地按轴对称变形问题处理。朱卫平<sup>[8]</sup>等(2000) 以柔性细环壳和小挠度环板为模型给出了 U 型波纹管在子午面内整体弯曲的一般解, 取得了和实验<sup>[9]</sup>较为一致的结果。但如(II) 指出的那样, 细环壳解在基本方程中忽略了  $\alpha = b/R_m$  ( $b =$  圆环截面半径,  $R_m =$  圆环环心至回转轴距离) 的作用, 相当于将载荷向圆环环心简化, 因此所得的应力分布是关于圆环壳的极顶对称或反对称的, 与实际情况有一些差别。本文把近似考虑  $\alpha$  作用的中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解(I) 用于纯弯曲 U 型波纹管的应力分析和刚度计算, 将所得的结果与细环壳解<sup>[8]</sup>、EJMA 标准<sup>[6,7]</sup>、实验<sup>[9]</sup>及有限元分析给出的结果进行了分析比较。

## 1 在纯弯矩作用下 U 型波纹管各区域解的形式

如(III) 所述, 波纹管在纯弯矩作用下(图 1) 其变形是关于赤道平面 ( $\phi = 0$ ) 对称的, 因此,

\* 收稿日期: 2001.06.26; 修订日期: 2002.04.11

作者简介: 朱卫平(1962—), 男, 江苏南通人, 博士, 已发表论文 20 多篇。(E-mail: wpzhu@mail.shu.edu.cn)。

只需研究其中的半个波, 如波纹  $BDFG$ 。下面我们把波纹  $BDFG$  分成  $BD$ ,  $DF$  和  $FG$  3 段, 分别进行计算。在  $GF$  段引用(III)中式(6),

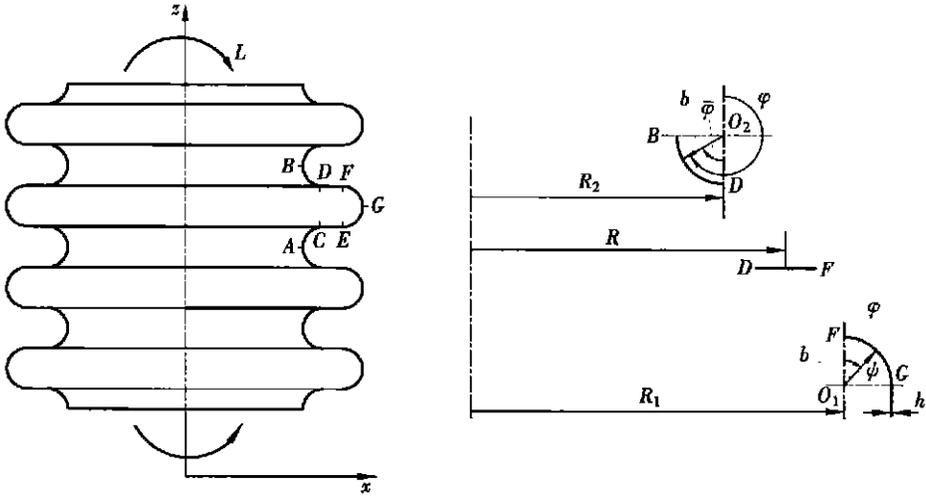


图 1 U型波纹管的整体纯弯曲

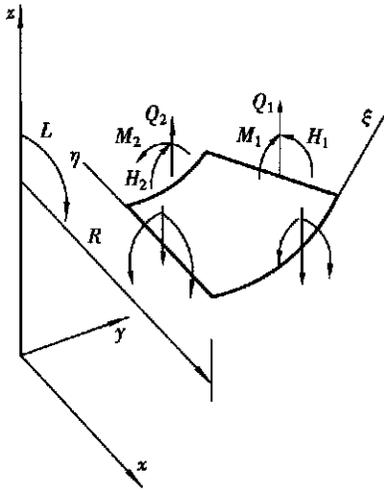


图 2 环板单元体上的内力

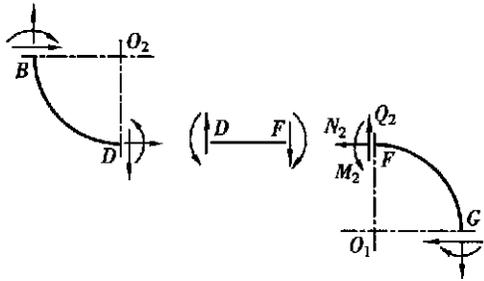


图 3 子午面内半波单元连接点上的内力

$$\left. \begin{aligned} V_{(1)}^r &= \frac{L_{(1)}^0}{\mu_{(1)}} (J^{(1)} - c_1 \Gamma_2^{(1)} + c_2 \Gamma_1^{(1)}), \\ V_{(1)}^i &= \frac{L_{(1)}^0}{\mu_{(1)}} (K^{(1)} + c_1 \Gamma_1^{(1)} + c_2 \Gamma_2^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

在  $DB$  段引用(III)中式(7)

$$\left. \begin{aligned} V_{(2)}^r &= -\frac{L_{(2)}^0}{\mu_{(2)}} (J^{(2)} - c_3 \Gamma_2^{(2)} + c_4 \Gamma_1^{(2)}), \\ V_{(2)}^i &= -\frac{L_{(2)}^0}{\mu_{(2)}} (K^{(2)} + c_3 \Gamma_1^{(2)} + c_4 \Gamma_2^{(2)}) \end{aligned} \right\} \quad \pi \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} \quad (2)$$

各字符的意义见(III)中式(1)~(4)。与  $R_1$ (图1)有关的各参数和变量带角标“(1)”, 与  $R_2$  有关的各参数和变量带角标“(2)”, 与环板有关的量带角标“(3)”, 下同。环板的通解为<sup>[8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} V_{(3)}^r = X_{(3)} = -\frac{L_{(3)}^0}{4}(1 + c_5 r^{-2} + c_6 r^2), \quad V_{(3)}^i \equiv 0, \\ L_{(3)}^0 = L_y/\pi D = L/\pi D, \quad r = R/R_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

代入(I)中式(2)、(4)可得内力矩

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1(M_1^1)_{(3)}}{D} &= \frac{L_{(3)}^0}{4}[(1-\nu)r^{-1} + c_5(1+\nu)r^{-3} + c_6(1-3\nu)r], \\ \frac{R_1(M_2^1)_{(3)}}{D} &= -\frac{L_{(3)}^0}{4}[(1-\nu)r^{-1} - c_5(1+\nu)r^{-3} + c_6(3-\nu)r], \\ \frac{R_1(H^1)_{(3)}}{D} &= \frac{L_{(3)}^0}{4}(1-\nu)(r^{-1} + c_5 r^{-3} + c_6 r) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

和倾角

$$\Omega_{(3)} = \frac{u_z^1}{R} = -\frac{L_3^0}{4} \left[ \ln r_2 - \frac{c_5}{2}(r_2^2 - 1) + \frac{c_6}{2}(r_2^2 - 1) \right]. \quad (5)$$

于是,由上式和(III)中式(9)可得 U 型波纹管单波端面之间的相对倾角

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha V^r \sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{2\alpha V^r \sin \phi}{1 + \alpha \cos \phi} d\phi + \\ & \frac{L_3^0}{2} \left[ \ln r_2 - \frac{c_5}{2}(r_2^2 - 1) + \frac{c_6}{2}(r_2^2 - 1) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

上述各解中共含有 6 个待定的积分常数  $c_1, c_2, \dots, c_6$ 。这些积分常数由环壳和环板连接处的连续性条件确定,可表述为:基本应变函数  $\times$  彼此相等,板壳外面子午向合应力、环向合应力彼此相等。对照图 3,得

F 点,  $\phi = \pi/2, r = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} V_{(1)}^r = X_{(3)}, \\ \frac{(N_2^1)_{(1)}}{h} + \frac{6(M_2^1)_{(1)}}{h^2} = \frac{6(M_2^1)_{(3)}}{h^2}, \\ \frac{(N_1^1)_{(1)}}{h} + \frac{6(M_1^1)_{(1)}}{h^2} = \frac{6(M_1^1)_{(3)}}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

D 点,  $\phi = 3\pi/2, r = R_2/R_1 = r_2$ :

$$\left. \begin{aligned} V_{(2)}^r = X_{(3)}, \\ \frac{(N_2^1)_{(2)}}{h} - \frac{6(M_2^1)_{(2)}}{h^2} = \frac{6(M_2^1)_{(3)}}{h^2}, \\ \frac{(N_1^1)_{(2)}}{h} - \frac{6(M_1^1)_{(2)}}{h^2} = \frac{6(M_1^1)_{(3)}}{h^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(7)~(8)中 6 个代数方程是彼此独立的,联立求解,得到  $c_1, c_2, \dots, c_6$ 。至此,问题的解完全确定。

## 2 算例和讨论

在美国膨胀节制造商协会标准(EJMA)中,U 型波纹管是一种典型的波纹管。下面就最常用的规格(表 1)举例计算。这里采用 EJMA 标准中的通用名称和符号,它们与环壳参数的关系是  $b = q/4, R_{m1} = (D_b + nt)/2 + q/4, R_{m2} = (D_b + nt)/2 + w - q/4; R_m = (R_{m1} + R_{m2})/2 = D_m/2, D_m = D_b + w + nt, t_p = t \sqrt{D_b/D_m}, h = t_p$ 。其中  $t_p$  是波纹管成形后的厚度,小于

设计的名义厚度  $t$ , 考虑了机械加工过程中的减薄量。波纹管材料为 SUS304 不锈钢,  $E = 1.95 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ 。计算得到波纹管单波弯曲刚度(转角与弯矩之比, 表 2 和图 7), 外表面受拉侧子午向正应力  $\sigma_\varphi/\sigma$  和环向正应力  $\sigma_\theta/\sigma$  (图 4 ~ 6)。应力分布图纵坐标中的  $\sigma = 16L_y/(\pi D_m q t_p)$ , 横坐标中的  $L_b = \pi b + w - 2b$  为半个波纹  $BDFG$  的弧长。模型 B 是文[9] 的实验模型, 共 4 个波(图 1), 下端固定上端施加  $3^\circ$  的转角。实验、本文的理论计算及我们用线单元计算的结果见图 8 ~ 9。

表 1 U 型波纹管尺寸

模 型	内径 $D_b/\text{mm}$	波高 $w/\text{mm}$	波距 $q/\text{mm}$	名义壁厚 $t/\text{mm}$
A	108.0	15.0	15.0	0.5
B*	277.5	27.0	29.0	0.5
C	505.7	33.3	41.0	0.5

\* 文[9] 实验模型

表 2 U 型波纹管单波转角与弯矩之比

$\Omega_y \setminus \left( \frac{q^2 L_y}{16\pi D_m^2 D} \right)$	求 解 方 法	模 型		
		A	B	C
	本文	3.085	1.650	0.831
	文[8]	—	1.712	—
	EJMA 标准	3.521	1.856	0.938

表 3 U 型波纹管子午向最大应力

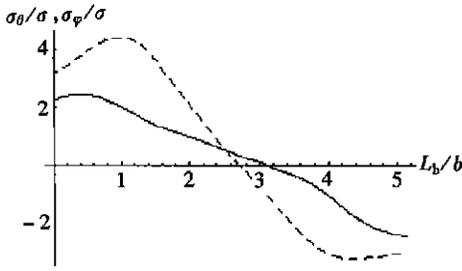
$\sigma_\varphi \setminus \left( \frac{16L_y}{\pi q t_p D_m} \right)$	求 解 方 法	模 型		
		A	B	C
	本文	4.45	5.26	4.52
	EJMA 标准	4.29	5.12	4.48

通过比较可知, 关于 U 型波纹管在纯弯矩作用下的强度和刚度问题, 一般而言, 按 EJMA 标准计算或按本文的中细环壳理论计算或按文[8] 的细环壳理论计算以及采用有限元法进行分析, 所得结果差别不大, 都在工程精度允许的范围内。但是 EJMA 标准不能给出应力分布, 不能给出环向弯曲应力, 而且认为子午向最大弯曲应力就发生在波纹管的波峰或波谷处, 与实际不符。更为严重的是根据这种认识去评估疲劳寿命和平面失稳的临界压力, 这就与实际相去更远。可见在现行的 EJMA 标准中规定疲劳寿命的安全系数  $\geq 10$  是不难理解的。所以, 详尽地研究波纹管的应力分布, 其真正意义在于找到危险点的正确位置进行应力分析, 为解决波纹管的疲劳问题奠定必要的基础。还要指出, 波纹管问题仅按线性理论求解是不够的。

### 3 结 语

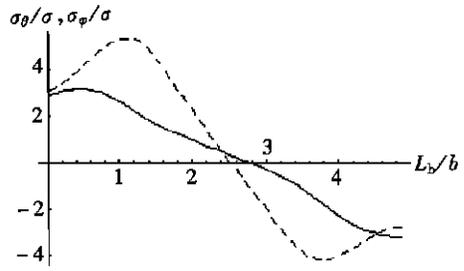
(I) 给出的中细柔性圆环壳在子午面内整体弯曲的一般解结合环板的一般解能够计算

U 型波纹管的纯弯曲问题。并且由 (III) 及本文的计算过程可知, 欲计算 U 型波纹管的横向弯曲问题没有原则上的困难。



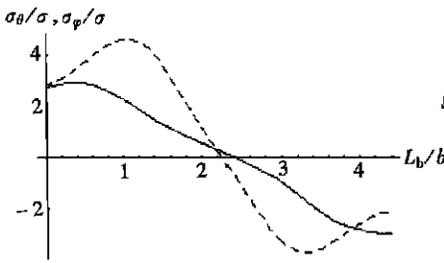
— $\sigma_\theta/\sigma$ , --- $\sigma_\phi/\sigma$ ,  $\sigma = 16L_y/(\pi D_m q t_p)$

图 4 模型 A 本文中细环壳解 ( $\theta = \pi$ )



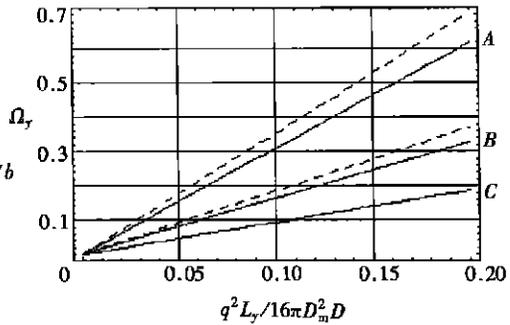
— $\sigma_\theta/\sigma$ , --- $\sigma_\phi/\sigma$ ,  $\sigma = 16L_y/(\pi D_m q t_p)$

图 5 模型 B 本文中细环壳解 ( $\theta = \pi$ )



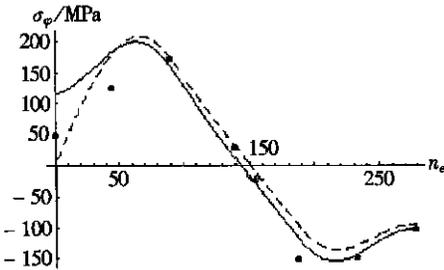
— $\sigma_\theta/\sigma$ , --- $\sigma_\phi/\sigma$ ,  $\sigma = 16L_y/(\pi D_m q t_p)$

图 6 模型 C 本文中细环壳解 ( $\theta = \pi$ )



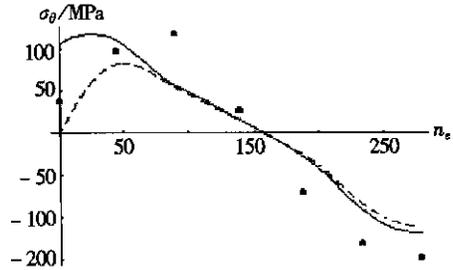
— 本文, --- EJMA 标准

图 7 模型 A, B, C 刚度



---有限元法, — 本文, • 实验[9]

图 8 模型 B 在给定角位移情况下波纹管 BDFG 外表面子午向应力 ( $\theta = \pi/4$ )



---有限元法, — 本文, • 实验[9]

图 9 模型 B 在给定角位移情况下波纹管 BDFG 外表面环向应力 ( $\theta = \pi/4$ )

如今虽然有多种途径可以对波纹板壳进行分析, 但是线性理论的精确解除了具有不言而喻的理论价值外, 它对于有限元模型的建立, 对于实验方案的设计, 以及对于所得结果的评定等都具有直接的指导意义。

[参 考 文 献]

[1] 钱伟长, 郑思梁. 轴对称圆环壳的一般解[J]. 应用数学和力学, 1980, 1(3): 287—299.  
 [2] 钱伟长, 吴明德. U 型波纹管的非线性特性摄动法计算[J]. 应用数学和力学, 1983, 4(5): 595—602.

- [3] 黄黔. 轴对称载荷下旋转壳弹性小应变的轴向任意大挠度问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(2): 115—125.
- [4] 黄黔. 摄动初参数法解轴对称壳几何非线性问题[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(6): 533—543.
- [5] Hamada M, Nakagawa K, Miyata K, et al. Bending deformation of U-shaped bellows[J]. Bulletin of JSME, 1971, 14(71): 401—409.
- [6] Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA) [S]. EJMA, INC, Sixth Edition, New York, 1993.
- [7] Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA) [S]. EJMA, INC, Seventh Edition, New York, 1998.
- [8] 朱卫平, 郭平, 黄黔. U型波纹管整体弯曲问题的一般解[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(4): 331—341.
- [9] 黎廷新, 李天祥, 胡坚, 等. 膨胀节的各种位移应力[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 1994, 22(3): 94—102.

## General Solution of the Overall Bending of Flexible Circular Ring Shells With Moderately Slender Ratio and Applications to the Bellows( IV) — Calculation for U\_Shaped Bellows

ZHU Wei\_ping, HUANG Qian

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai  
University, Shanghai 200072, P R China)

**Abstract:** This is one of the applications of Part ( I ), in which the angular stiffness, and the corresponding stress distributions of U-shaped bellows were discussed. The bellows was divided into protruding sections, concave sections and ring plates for the calculation that the general solution ( I ) with its reduced form to ring plates were used respectively, but the continuity of the surface stresses and the meridian rotations at each joint of the sections were entirely satisfied. The present results were compared with those of the slender ring shell solution proposed earlier by the authors, the standards of the Expansion Joint Manufacturers Association (EJMA), the experiment and the finite element method. It is shown that the governing equation and the general solution ( I ) are very effective.

**Key words:** theory of flexible shell; circular ring shell; U-shaped bellows; pure bending; general solution