

文章编号: 1000-0887(2002) 10-1085\_08

# 在粘性流体中船行波的速度场<sup>\*</sup>

刘敏嘉, 陶明德

(复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 从 Navier-Stokes 方程出发, 导得了水上运动物体船行波的波高和水平速度二重积分的表达式。其次采用 Lighthill 两步法将上述的积分表达式化为代数表达式。与海水作为理想流体所得的结果相比, 消除或减弱了原有的奇性, 提高了船行波的数字资料的精度。

关键词: 粘性流体; 水上运动物体; 船行波

中图分类号: O353.2; 文献标识码: A

## 引 言

当水上运动物体(例如: 船只)在水面上以匀速直线前进时, 在其后方形成了一个 V 形的船行波。本文将讨论: 在粘性流体情况下, 这个 V 形的船行波的形状和速度场。[1] 首先研究了在无粘不可压缩的流体中的船行波问题, 接着[2] 提供了一种研究在粘性不可压缩的流体中的水下运动物体的船行波的新方法, 但是由于表示水上和水下运动物体的奇点性质不一样, 所以不能完全用该文的方法来处理水上运动物体船行波。[3] 采用人工粘性的方法来求解在理想流体中水上物体的船行波。

根据报导已经能用合成孔径雷达探索海上船只<sup>[4]</sup>, 但需要了解船行波的波高和速度场的数字资料, 以构成 Bragg 后向散射截面。然而把海水作为无粘流体时有关船行波的信息中包含了一些奇性(例如[1]和[5]), 使用时有些不便。所以我们拟把海水作为粘性流体, 以便克服上述的缺陷。另外这样一来就自动满足了运动物体前方无波的事实, 而不必采用人工粘性方法。

本文采用[2]的方法来求解在粘性流体中水上运动物体船行波问题。从 Navier-Stokes 方程出发, 假定粘性流体充满下半空间。船只作为一个点源, 在自由面上认为正应力和切应力连续。先把各未知函数写成二重积分的形式, 再采用 Lighthill 两步法把未知函数的积分表达式改写成代数表达式, 其中第一步利用留数计算第一重积分, 第二步用最速下降法计算第二重积分。与海水作为无粘流体所得的结果相比, 消除或减弱了原有的奇性, 提高了船行波的数字资料的精度。

## 1 方 程

首先, 我们采用[2]的方法, 从  $N_S$  方程出发来讨论问题。设不可压缩粘性流体在下半空

\* 收稿日期: 2000\_12\_25; 修订日期: 2002\_04\_09

作者简介: 刘敏嘉(1973—), 男, 广州人, 硕士(E-mail: minjial@eyou.com)。

间  $z \leq 0$ , 水流的速度是  $Ue_x$ , 其中  $e_x$  为沿着  $x$  方向的单位矢量。接着无量纲化: 速度用  $U$ , 压强用  $\rho U^2$ , 长度用  $U^2/g$  作为特征量。其中  $\rho$  是流体的密度和  $g$  是重力加速度常数。由于水上物体运动产生了一个无量纲化的小扰动速度  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ , 那么无量纲化的方程则是:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -\nabla p_1 + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{2}$$

其中

$$\varepsilon = \frac{\mu g}{\rho U^3},$$

$p_1$  是无量纲化的压强, 而  $\mu$  则是流体的粘性系数。显然  $\varepsilon$  可以看作是 无量纲化的小扰动的参数。再考虑在  $z = 0$  的边界条件, 由流体的正应力和切应力的连续可得到:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - w = 0, \tag{5}$$

$$\eta = p_1|_{z=0} + p_2 - 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} |_{z=0}, \tag{6}$$

其中  $\eta$  是波高,  $p_2$  是由于水上物体在水面上所产生的压强, 在此取为一个点源

$$p_2 = -4\pi F \delta(x) \delta(y).$$

由(5)和(6)可以得到

$$\frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial x} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - w = 0 \tag{7}$$

接着, 为了化简, 定义两个变量  $\phi$  和  $f$ :

$$\mathbf{u} = -\nabla \phi + \nabla \times \mathbf{f}, \tag{8}$$

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_z \mathbf{e}_z, \tag{9}$$

$$p_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{10}$$

将(8)~(10)代入(3)、(4)和(7)可得到

$$-2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial x \partial y} = 0, \tag{11}$$

$$-2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial z^2} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} \right] + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_2}{\partial x}. \tag{13}$$

为了求解这些方程, 当  $z \leq 0$  时, 进行傅里叶变换(其中  $j = 1$  和  $j = 2$  分别代表  $x$  和  $y$ )。

$$\phi = F \iint \hat{\phi}[k_1, k_2] e^{i(k_1 x + k_2 y) + Az} dk_1 dk_2, \tag{14}$$

$$f_j = F \iint \hat{f}_j[k_1, k_2] e^{i(k_1 x + k_2 y) + Bz} dk_1 dk_2, \tag{15}$$

其中

$$A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \text{ 和 } B = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + ik_1/\varepsilon} \tag{16}$$

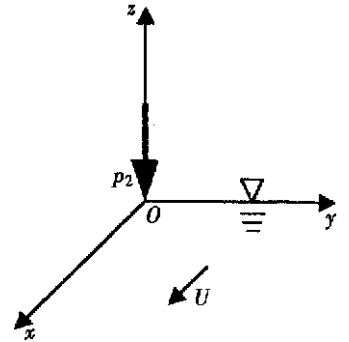


图 1 水上运动物体的示意图

通过(11)、(12)和(13)可以求得:

$$\hat{\phi} = -\frac{ik_1 + 2A^2 \varepsilon}{\pi \Delta}, \quad \hat{f}_1 = -\frac{2iA^3 \varepsilon}{\pi k_2 \Delta} \quad \text{和} \quad \hat{f}_3 = -\frac{2k_1 A B \varepsilon}{\pi k_2 \Delta}, \quad (17)$$

其中

$$\Delta = (k_1^2 - A) - 4i \mathcal{E}_1 A^2 + 4\varepsilon^2 A^3 (B - A).$$

## 2 求波高

进一步在自由面上引入极坐标  $(R, \theta)$ :

$$x = R \cos \theta \quad \text{和} \quad y = R \sin \theta, \quad (18)$$

所以由(6)可得, 波高可以表达成:

$$\eta = F \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h e^{iR(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta)} dk_1 dk_2, \quad (19)$$

其中

$$h = (ik_1 + 2A^2) \hat{\phi} + 2i \mathcal{E}_2 B \hat{f}_1 - 1/\pi = A/(\pi \Delta). \quad (20)$$

为了进一步简化, 采用 Lighthill 两步法, 第一步是求留数. 考虑方程

$$\Delta[k_1, k_2, \varepsilon] = 0, \quad (21)$$

其中, 因为  $\varepsilon$  为小参数, 所以方程中有两个根, 分别近似为  $k_{1,j}[k_2, \varepsilon]$ ,

$$k_{1,j}[k_2, \varepsilon] \approx k_{1,j0}[k_2] + i \mathcal{E}_1 k_{1,j1}[k_2], \quad (22)$$

$$k_{1,j0}[k_2] = (-1)^j \sqrt{\frac{1 + m[k_2]}{2}} \quad \text{和} \quad k_{1,j1}[k_2] = \frac{(1 + m[k_2])^3}{2m[k_2]}, \quad (23)$$

其中

$$m[k_2] = \sqrt{1 + 4k_2^2}.$$

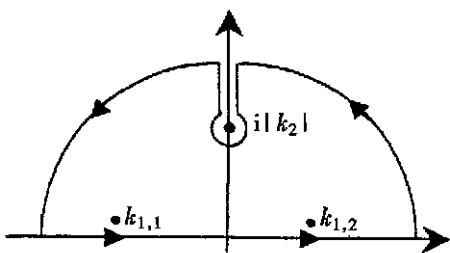


图2 当  $x \geq 0$  时围道积分

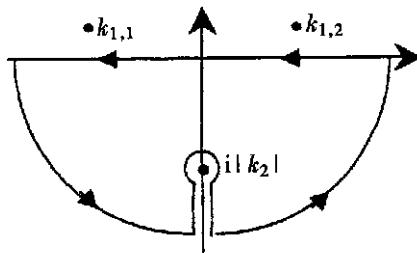


图3 当  $x < 0$  时围道积分

当  $x \geq 0$  时, 用图2所示围道积分来计算留数, 所以我们可以得到

$$\eta + Q_1 + Q_2 = EF \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Res} \left[ \frac{A}{\pi \Delta} e^{i(k_1 x + k_2 y)} \right] dk_2, \quad (24)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{\infty}^{k_{1,1}} \frac{iF \sqrt{k_1'^2 + k_2^2} e^{-k_1' x + ik_2 y} dk_1'}{\pi \left[ i \sqrt{k_1'^2 + k_2^2 + k_1'^2 + 4\mathcal{E}_1' (k_1'^2 + k_2^2)} + O[\varepsilon^2] \right]}, \\ Q_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{k_{1,2}}^{\infty} \frac{iF \sqrt{k_1'^2 + k_2^2} e^{-k_1' x + ik_2 y} dk_1'}{\pi \left[ -i \sqrt{k_1'^2 + k_2^2 + k_1'^2 + 4\mathcal{E}_1' (k_1'^2 + k_2^2)} + O[\varepsilon^2] \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

进一步, 我们必须注意一个事实:  $\varepsilon > 0$  和  $k_{1,j1} > 0$ , 所以  $\text{Im}(k_{1,j}[k_2, \varepsilon]) > 0$ , 也就是说  $k_{1,j}[k_2,$

$\varepsilon j$  在复平面的上半平面上, 所以围道包括两个极点, 因此  $E = 2\pi i$ , 而当  $x < 0$  时用图 3 所示的围道积分来计算留数, 所以围道不包括两个极点, 因此  $E = 0$ . 我们可以证明:

$$Q_1 = O[R^{-2}] \text{ 和 } Q_2 = O[R^{-2}]. \quad (26)$$

最后, 留数计算(18)可得:

$$\eta_1 = \sum_{j=1,2} H(x) F \int_{-\infty}^{\infty} 2i \frac{(-1)^j}{m[k_2]} \left( \frac{1+m[k_2]}{2} \right)^{3/2} e^{iR(k_{1,j}\cos\theta + k_{2,j}\sin\theta)} dk_2 + O\left[\frac{1}{R^2}\right], \quad (27)$$

其中

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

第二步, 由于考虑的是  $R \gg 1$ , 所以采用最速下降法. 我们可以采用[2]的方法来计算, 但是[2]将相位角误认为是

$$\xi_j = \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left[ \frac{\partial^2 k_{1,j0}}{\partial k_2^2} \Big|_{k_2 = k_{2,j}^{\pm}} \right],$$

其中

$$k_{2,j}^{\pm} = k_{2,j0}^{\pm} + i\varepsilon k_{2,j1}^{\pm} \text{ 和 } k_{2,j1}^{\pm} = - \frac{\partial k_{1,j1}/\partial k_2}{\partial^2 k_{1,j0}/\partial k_2^2} \Big|_{k_2 = k_{2,j0}^{\pm}}. \quad (28)$$

事实上, 应该是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k_{1,j}}{\partial k_2^2} &= \frac{\partial^2 k_{1,j0}}{\partial k_2^2} \Big|_{k_2 = k_{2,j0}^{\pm}} + i\varepsilon k_{2,j1}^{\pm} \frac{\partial^3 k_{1,j0}}{\partial k_2^3} \Big|_{k_2 = k_{2,j0}^{\pm}} + i\varepsilon \frac{\partial^2 k_{1,j1}}{\partial k_2^2} + O[\varepsilon^2] = \\ & \frac{\partial^2 k_{1,j0}}{\partial k_2^2} \Big|_{k_2 = k_{2,j0}^{\pm}} \times [1 + i\varepsilon(-1)^j Q_8(m[k_{2,j0}^{\pm}])] + O[\varepsilon^2], \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$Q_8(m) = - \frac{\sqrt{2}(1+m)^{3/2}(10m^2 - 37m + 25)}{(m-2)^2}.$$

所以我们可以得到

$$\xi_j = \pi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left[ \frac{\partial^2 k_{1,j0}}{\partial k_2^2} \Big|_{k_2 = k_{2,j0}^{\pm}} \right] + i\varepsilon(-1)^j Q_8(m[k_{2,j0}^{\pm}]) + O[\varepsilon^2]. \quad (30)$$

由(30)和[2]的方法, 可以得到当  $R \gg 1$  时, 波高的渐近解表达式为

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -4FH(x) \sqrt{\frac{2\pi}{R\cos\theta}} (1 - 8\tan^2\theta)^{-1/4} \left\{ \left( \frac{m^+ + 1}{2} \right)^{5/4} e^{-\left( \frac{m^+ + 1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^+} \cos\theta} \times \right. \\ & \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^+ + 1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^+ - 1}{2}} \right) - \frac{Q_8(m^+) \varepsilon}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + \\ & \left. \left( \frac{m^- + 1}{2} \right)^{5/4} e^{-\left( \frac{m^- + 1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^-} \cos\theta} \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^- + 1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^- - 1}{2}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{Q_8(m^-) \varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} + O\left[\frac{1}{R^2}\right], \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$m^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\tan^2\theta}}{4\tan^2\theta}.$$

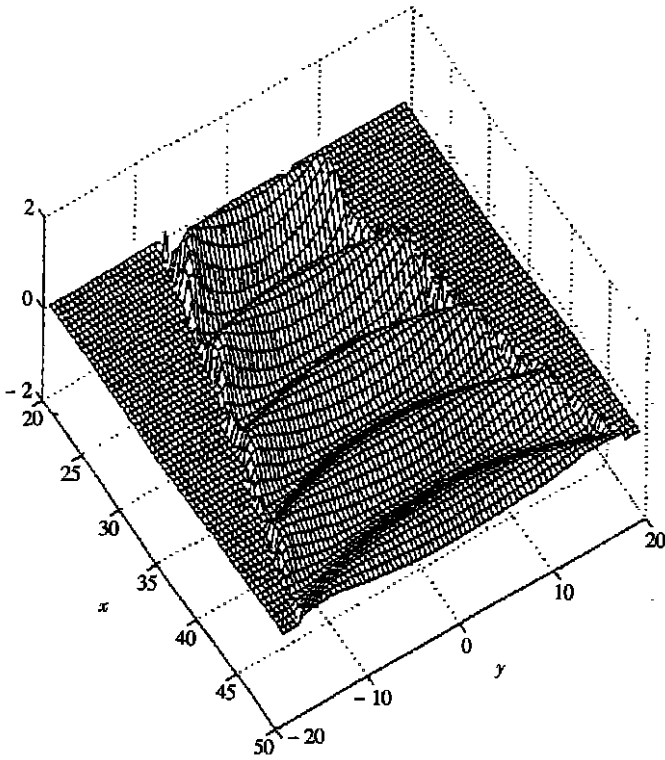


图4 当  $\varepsilon = 0.01$  和  $F = 1$  时, 波高图

### 3 求速度场

现在考虑速度场。首先速度场可以表达成为:

$$\begin{bmatrix} u |_{z=0} \\ v |_{z=0} \end{bmatrix} = F \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} e^{iR(k_1 \cos\theta + k_2 \sin\theta)} dk_1 dk_2, \quad (32)$$

由上面可得到

$$u = -ik_1 \hat{\phi} + ik_2 \hat{f}_3 \quad \text{和} \quad v = -ik_2 \hat{\phi} + B \hat{f}_1 - ik_1 \hat{f}_3. \quad (33)$$

将(17)代入(33), 可得到

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi \Delta} \begin{bmatrix} -k_1^2 + 2ik_1 A(A-B)\varepsilon \\ -k_1 k_2 + 2ik_2 A(A-B)\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (34)$$

同样, 我们采用 Lighthill 两步法, 第一步是求留数, 注意一点是:

$$B = \frac{1 + i(-1)^j}{\sqrt{2\varepsilon}} \left( \frac{1 + m/k_2}{2} \right)^{1/4} + O[\varepsilon^{1/2}], \quad (35)$$

结果是:

$$\begin{aligned} u |_{z=0} = & \sum_{j=1,2} H(x) F \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2i \frac{(-1)^j}{m[k_2]} \left( \frac{1 + m/k_2}{2} \right)^{3/2} + \right. \\ & \left. \frac{2\sqrt{2}}{m[k_2]} [1 + i(-1)^j] \left( \frac{1 + m/k_2}{2} \right)^{9/4} \varepsilon^{1/2} \right\} \times \\ & e^{iR(k_{1,j} \cos\theta + k_2 \sin\theta)} dk_2 + O[\varepsilon] + O\left[ \frac{1}{R^2} \right], \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v|_{z=0} = & \sum_{j=1,2} H(x) F \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{ik_2(1+m[k_2])}{m[k_2]} + \right. \\
 & \left. \frac{2\sqrt{2}k_2}{m[k_2]} [(-1)^j + i] \left( \frac{1+m[k_2]}{2} \right)^{7/4} \varepsilon^{1/2} \right\} \times \\
 & e^{iR(k_{1,j}\cos\theta + k_2\sin\theta)} dk_2 + O[\varepsilon] + O\left[\frac{1}{R^2}\right]. \quad (37)
 \end{aligned}$$

接着,第二步采用最速下降法,与上面一样,则可以求得

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u|_{z=0} \\ v|_{z=0} \end{bmatrix} = & 4FH(x) \sqrt{\frac{2\pi}{R\cos\theta}} (1-8\tan^2\theta)^{-1/4} \times \\
 & \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -m^+ \tan\theta \end{bmatrix} \left( \frac{m^++1}{2} \right)^{5/4} e^{-\left( \frac{m^++1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^+} \cos\theta} \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^++1}{2}} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^+-1}{2}} - \frac{Q_8(m^+) \varepsilon}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + \begin{bmatrix} 1 \\ -m^- \tan\theta \end{bmatrix} \left( \frac{m^-+1}{2} \right)^{5/4} \times \right. \\
 & \left. e^{-\left( \frac{m^-+1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^-} \cos\theta} \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^-+1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^- - 1}{2}} - \frac{Q_8(m^-) \varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. 2 \begin{bmatrix} -1 \\ m^+ \tan\theta \end{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{1+m^+}{2} \right)^2 e^{-\left( \frac{m^++1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^+} \cos\theta} \cos \left[ R \sqrt{\frac{m^++1}{2}} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^+-1}{2}} - \frac{Q_8(m^+) \varepsilon}{2} \right] - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ m^- \tan\theta \end{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{1+m^-}{2} \right)^2 \times \right. \\
 & \left. \left. e^{-\left( \frac{m^-+1}{2} \right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^-} \cos\theta} \cos \left[ R \sqrt{\frac{m^-+1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^- - 1}{2}} - \frac{Q_8(m^-) \varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{Q_8(m^-) \varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right\} + \left[ O\left[\frac{1}{R^2}\right] + O[\varepsilon] \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

## 4 结 论

显然,当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,上述的波高和速度场变成了用人工粘性得到的无粘流体的水上运动物体船行波<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned}
 \eta = & -4FH(x) \sqrt{\frac{2\pi}{R\cos\theta}} (1-8\tan^2\theta)^{-1/4} \left\{ \left( \frac{m^++1}{2} \right)^{5/4} \times \right. \\
 & \left. \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^++1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^+-1}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( \frac{m^-+1}{2} \right)^{5/4} \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^-+1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^- - 1}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} + O\left[\frac{1}{R^2}\right], \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u|_{z=0} = & 4FH(x) \sqrt{\frac{2\pi}{R\cos\theta}} (1-8\tan^2\theta)^{-1/4} \left\{ \left( \frac{m^++1}{2} \right)^{5/4} \times \right. \\
 & \left. \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^++1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^+-1}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left( \frac{m^-+1}{2} \right)^{5/4} \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^-+1}{2}} \left( \cos\theta - |\sin\theta| \sqrt{\frac{m^- - 1}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \right\} + O\left[\frac{1}{R^2}\right], \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v|_{z=0} = & -4FH(x) \sqrt{\frac{2\pi}{R \cos \theta}} (1 - 8 \tan^2 \theta)^{-1/4} \left\{ m^+ \tan \theta \left( \frac{1+m^+}{2} \right)^{5/4} \times \right. \\
 & \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^++1}{2}} \left( \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{\frac{m^+-1}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) + m^- \tan \theta \left( \frac{1+m^-}{2} \right)^{5/4} \times \right. \\
 & \left. \left. \sin \left[ R \sqrt{\frac{m^-+1}{2}} \left( \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{\frac{m^--1}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) + O\left[\frac{1}{R^2}\right] \right] \right\} + O\left[\frac{1}{R^2}\right]. \quad (41)
 \end{aligned}$$

我们发现,从(31)和(38)与(39)~(41)比较,无论波高还是速度场有两点不同:第一,对于无粘和粘性流体来说,两者在振幅方面相差一个粘性衰减因子

$$\exp\left[-\left(\frac{m^\pm+1}{2}\right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^\pm}\right];$$

第二,两者在相位方面还有一个相位差,其相位差为

$$Q_8(m^\pm) \varepsilon/2;$$

还有,在粘性流体的速度场中,由(38)可以看出,速度可以表示为

$$u|_{z=0} = u_0 + u_1 \varepsilon^{1/2} + O[\varepsilon]$$

和  $v|_{z=0} = v_0 + v_1 \varepsilon^{1/2} + O[\varepsilon];$

也就是说,在粘性流体中,速度  $u|_{z=0}$  和  $v|_{z=0}$  比无粘流体的还多一个粘性项  $u_1 \varepsilon^{1/2}$  和  $v_1 \varepsilon^{1/2}$ 。当  $\theta = 0$  时,即在船行走过的轨迹上,当无粘流体时 ( $\varepsilon = 0$ ) 存在奇异性,即  $u|_{z=0}$  和  $v|_{z=0}$  的振幅是无穷大的,但在粘性流体时,它们是有限的,原因是存在因子

$$\exp\left[-\left(\frac{m^++1}{2}\right)^3 \frac{4\varepsilon R}{m^+}\right].$$

这样本文的结果能提高船行波的数字资料的精度。

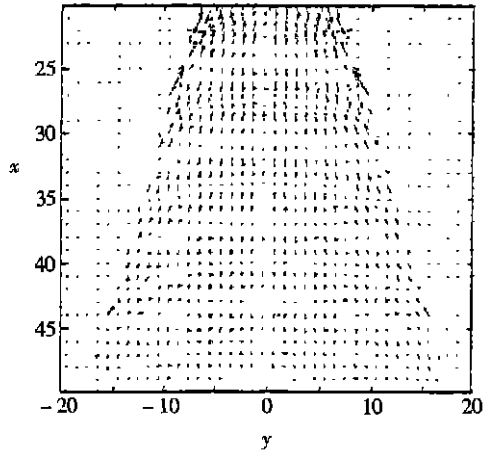


图5 当  $\varepsilon = 0.01$  和  $F = 1$  时,速度场图

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] Wehausen J V, Laitone E V. Surface waves [A]. In: S Fl gge Ed. Encyclopedia of Physics [C]. New York: Springer\_Verlag, 1960, 311—778.
- [2] Chan A T, Chwang A T. Interaction of laminar far wake with a free surface[J]. Phys Fluids, 1996, 8 (2), 421—429.
- [3] Tao M D, Liu M J, Ren J C. A study of velocity field in ship waves[J]. J Hydrodynamics, Ser B, 2001, 13(4): 42—47.
- [4] Liu A K, Peng Y, Chang S Y. Wavelet, analysis of satellite images for coastal watch[J]. IEEE J Oceanic Engig, 1997, 22(1): 9—17.
- [5] Miao G P, Liu Y Z, Yang Q Z, et al. On the 3\_D pulsating source of Michell type with forward speed [J]. J Hydrodynamics, Ser B, 1995, 7(2): 84—95.

# Velocity Field in Ship Waves on the Viscous Fluid

LIU Min\_jia, TAO Ming\_de

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University,  
Shanghai 200433, P R China)

**Abstract:** From the Navier-Stokes equations, the integral expressions of the free-surface elevation and the velocity field in ship waves of a moving waterborne body are obtained. Next, Lighthill's two-stage scheme is employed to change the above-mentioned integral expressions to algebraic expressions. Compared with the results obtained when the seawater is idealized to an inviscid fluid, the singularities are dispelled or weakened, and the accuracy of the digit information of ship waves is improved.

**Key words:** viscous fluid; moving body on the water; ship wave