应用数学和力学, 第 23 卷 第 9 期(2002 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 09_0889_07

凸度量空间中拟压缩映象具误差的 Ishikawa 型迭代序列的收敛性

田有先[1], 张石生[2]

(1 重庆邮电学院 计算机学院, 重庆 400065; 2 四川大学 数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 对凸度量空间中非线性拟压缩映象具误差的 Ishikawa 型迭代序列的收敛性问题证明了几个新的收敛性定理, 结果不仅改进和推广了 L. B. Ciric, Q. H. Liu, H. E. Rhoades, H. K. Xu 等人的相应结果, 而且对 Rhoades_Naimplally_Singh 所提出的公开问题, 在凸度量空间的框架下给出了肯定的答复

关 键 词: 凸度量空间; 不动点; 具误差的 Ishikawa 型迭代序列; 一般的拟压缩映象
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引论和预备知识

近年来关于由下式定义的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \quad C, \\ x_{n+1} = (1- \quad_n)x_n + \quad_n T y_n \quad (n \quad 0), \\ y_n = (1- \quad_n)x_n + \quad_n T x_n \end{cases} \tag{1}$$

收敛于 T 的不动点或收敛于方程 $Tx = f$ 的解的问题已被许多人讨论过(见, 例如[1 ~ 6]), 其中 C 是 Banach 空间 E 中的非空闭凸子集, $T: C \quad C$ 是一非线性的伪压缩映象或增生映象, $\{\quad_n\}$, $\{\quad_n\}$ 是[0, 1] 中的二数列

另一方面, 1974 年, Ciric[2] 证明了下面的定理:

定理[2] 设 (E, d) 是一完备的度量空间, $T: E \quad E$ 是一拟压缩映象, 即存在常数 $k \quad [0, 1)$ 使得

$$d(Tx, Ty) \quad k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{2}$$

对一切 $x, y \quad E$ 则 T 在 E 中有不动点, 而且对任给的 $x_0 \quad E$, Picard 迭代序列 $\{T^n x_0\}$ 收敛于该不动点 x^*

1976 和 1983 年 Rhoades[7] 和 Naimpally_Singh[8] 提出了下面的公开问题:

公开问题(Rhoades_Naimpally_Singh[7, 8]) Ishikawa 迭代序列能否推广到度量空间中的非线性拟压缩映象?

收稿日期: 2001_04_03; 修订日期: 2002_01_28
基金项目: 四川省教育厅自然科学重点科研项目(01LA70); 国家自然科学基金资助项目(19771058)
作者简介: 田有先(1948), 男, 四川宣汉人, 教授, 发表学术论文 50 余篇.

这一问题是在Hilbert或Banach空间的框架下实际上已被肯定地解决(见Liu[9, 10], Xu[6])

本文的目的是证明凸度量空间中具误差的Ishikawa型迭代序列的某些收敛性定理 本文的结果不仅推广和改进了[2, 5~ 10]中的主要结果, 而且在凸度量空间的框架下对上述公开问题给予了肯定地回答

为此, 我们先给出某些定义和符号

定义 1 1 设 (E, d) 是一度量空间, $I = [0, 1]$ 对任意的正整数 $n \quad 2$, 记 $E^n = \underbrace{E \quad E \qquad E}_{n}$, $I^n = \underbrace{I \quad I \qquad I}_{n}$ 映象 $w: E^n \quad I^n \quad E$ 称为E 的凸结构, 如果它满足下面的条件: 对任意的 $u, x_1, x_2, \quad , x_n \quad E$ 及对任意的 $_1, \ _2, \quad , \ _n \quad I, \ \sum_{i=1}^{n} \ _i = 1$ 有

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ w(x_1, x_2, \quad , x_n; 0, 0, \quad , \ _i, 0, \quad , 0) = x_i, \qquad i = 1, 2, \quad , n; \\ 2)\ d(u, w(x_1, x_2, \quad , x_n; \ _1, \ _2, \quad , \ _n)) \qquad \sum_{i=1}^{n} \ _i d(u, x_i) \end{array}\right. \tag{3}$$

如果 (E, d) 是具凸结构 w 的度量空间, 则(E, d) 称为凸度量空间, 并记之为(E, d, w)

应该指出, 每一线性赋范空间都是凸度量空间的例子, 但存在某些凸度量空间, 它们不能嵌入到任一的赋范空间[11]

定义 1 2 一函数 $: [0, \quad) \quad [0, \quad)$ 称为满足条件$(\quad)$, 如果它是不减的, 右连续的, $(t) < t, \quad t > 0$, 且 $(0) = 0$

易于证明下面的

命题 1 1 如果函数 $: [0, \quad) \quad [0, \quad)$ 满足条件$(\quad)$ 且 $t \qquad (t), t \quad [0, \quad)$, 则 $t = 0$

定义 1 3 设 (E, d) 是一度量空间, $T: E \quad E$ 是一映象 如果存在满足条件$(\quad)$ 的函数 $: [0, \quad) \quad [0, \quad)$ 使得

$$d(Tx, Ty) \qquad (\max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\right\}) \qquad (\quad x, y \quad E), \tag{4}$$

则 T 称为一般的拟压缩映象

当 $(t) = kt, k \quad [0, 1)$, 则(4) 等价于(2), 即 T 是一拟压缩映象

定义 1 4 设 (E, d, w) 是具凸结构 $w: E^3 \quad I^3 \quad E$ 的凸度量空间, 其满足条件(3) (其中 $n = 3$) 设 $T: E \quad E$ 是一般的拟压缩映象; $\left\{ \ _n\right\}, \left\{ \ _n\right\}, \left\{ \ _n\right\}, \left\{ \ _n\right\}, \left\{ \ _n\right\}, \left\{ \ _n\right\}$ 是$[0, 1]$ 中的 6 个序列且 $_n + \ _n + \ _n = 1, \ _n + \ _n + \ _n = 1, (n = 0, 1, 2, \quad)$ 而且 $\sum_{n=0} \ _n = \qquad$ 对任给的 $x_0 \quad E$, 定义序列$\left\{x_n\right\}$ 如下:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = w(x_n, Ty_n, u_n; \ _n, \ _n, \ _n) \\ y_n = w(x_n, Tx_n, v_n; \ _n, \ _n, \ _n) \end{array} \quad (n \quad 0), \right\} \tag{5}$$

其中$\left\{u_n\right\}, \left\{v_n\right\}$ 是E 中满足下述条件的二序列: 对任意的非负整数 $n, m, 0 \quad n < m$, 如果 $(A_{n, m}) > 0$, 则有

$$\max_{n \quad i, j \quad m}\left\{d(x, y): x \quad \left\{u_i, v_i\right\}, y \quad \left\{x_j, y_j, Tx_j, Ty_j, u_j, v_j\right\}\right\} < \quad (A_n, m), \tag{6}$$

其中

$$A_{n, m} = \left\{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i: n \quad i \quad m\right\},$$

$$(A_{n,m}) = \sup_{x,y\ \ A_{n,m}} d(x,y),$$

则$\{x_n\}$称为T 的具误差的 Ishikawa 型迭代序列

特别, 如果 $_n = 0$, $_n = 0$, n 0, 由(3) 知 $y_n = x_n$ 故由(5) 有

$$x_{n+1} = w(x_n, Tx_n, u_n;\ _n,\ _n,\ _n), \tag{7}$$

由(7) 定义的序列$\{x_n\}$称为T 的具有误差的 Mann 型迭代序列

应该指出, 如果 E 是一线性赋范空间, 则E 是具凸结构$w(x, y; 1- ,) = (1-)x + y$, $(x, y E, I)$ 的凸度量空间, 故 Ishikawa 迭代序列(1) 是(5) 当 $_n = 0$, $_n = 0$, $u_n = v_n = 0$, n 0 的特例

2 主 要 结 果

现在我们来证明本文的主要结果

定理2 1 设(E, d, w) 是一完备的凸度量空间, $w: E^3\ \ I^3\ \ E$ 是E 的凸结构, T 是满足条件(4) 的一般的拟压缩映象, $\{x_n\}$ 是由(5) 定义的T 的具误差的Ishikawa 型迭代序列 则下列结论成立:

1) 在 E 中存在T 的唯一的不动点p;

2) $\{x_n\}$ 在E 中收敛于p

证 令N 为一切非负整数的集合 对任意的 n, m $N, 0$ $n < m$, 记

$$A_{n,m} = \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i: n\ \ i\ \ m\};$$

$$(A_{n,m}) = \sup_{x,y\ \ A_{n,m}} d(x,y)$$

于是有 $(A_{n,m}) = \max\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$,

其中

$$D_1 = \max\{d(x_n, Tx_i), d(x_n, Ty_i): n\ \ i\ \ m\};$$
$$D_2 = \max\{d(Tx_i, Tx_j), d(Tx_i, Ty_j), d(Ty_i, Ty_j): n\ \ i,j\ \ m\};$$
$$D_3 = \max\{d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j): n < i\ \ m, n\ \ j\ \ m\};$$
$$D_4 = \max\{d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j): n\ \ i,j\ \ m\};$$
$$D_5 = \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j): n\ \ i,j\ \ m\};$$
$$D_6 = \max\{d(x,y): x\ \ \{u_i, v_i\}, y\ \ \{x_j, y_j, Tx_j, Ty_j, u_j, v_j: n\ \ i,j\ \ m\}\}$$

下证 $(A_{n,m}) = D_1$ (8)

为此, 我们把证明分为四步

) 由(4) 知

$$D_2\ \ \ (\ (A_{n,m})) \tag{9}$$

) 由(5) 和(3) 得知, 当 $n < i$ m, n j m 时有

$$d(x_i, Tx_j) = d(w(x_{i-1}, Ty_{i-1}, u_{i-1},\ _{i-1},\ _{i-1},\ _{i-1}), Tx_j)$$
$$_{i-1}d(x_{i-1}, Tx_j) + \ _{i-1}d(Ty_{i-1}, Tx_j) + \ _{i-1}d(u_{i-1}, Tx_j)$$
$$\max\{d(x_{i-1}, Tx_j),\ (\ (A_{n,m})), D_6\}$$

如果 $i - 1 > n$, 用同样的方法可证

$$d(x_{i-1}, Tx_j)\ \ \max\{d(x_{i-2}, Tx_j),\ (\ (A_{n,m})), D_6\}$$

用归纳法, 当 $n < i$ m, n j m 时可证

$$d(x_i, Tx_j) \quad \max\left\{ d(x_{i-1}, Tx_j), \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$
$$\max\left\{ d(x_{i-2}, Tx_j) \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$
$$\max\left\{ d(x_n, Tx_j), \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$

同理可证, 当 $n < \ i \quad m, n \quad j \quad m$ 时,

$$d(x_i, Ty_j) \quad \max\left\{ d(x_n, Ty_j), \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$

于是得知

$$D_3 = \max\left\{ d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j): n < \ i \quad m, n \quad j \quad m \right\}$$
$$\max\left\{ d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j), \quad (\quad (A_{n,m})), D_6: n \quad j \quad m \right\} =$$
$$\max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\} \tag{10}$$

) 当 $n \quad i, j \quad m$ 时, 由(9)、(10) 有

$$d(y_i, Tx_j) = d(w(x_i, Tx_i, v_i, \ _i, \ _i, \ _i), Tx_j)$$
$$_i d(x_i, Tx_j) + \ _i d(Tx_i, Tx_j) + \ _i d(v_i, Tx_j)$$
$$\max\left\{ d(x_i, Tx_j), \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$
$$\max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$

同理可证

$$d(y_i, Ty_j) \quad \max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\}$$

于是有

$$D_4 = \max\left\{ d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j); n \quad i, j \quad m \right\}$$
$$\max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{m,m})), D_6 \right\} \tag{11}$$

) 因 $D_5 = \max\left\{ d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\}$

a) 我们先对 $\max\left\{ d(x_i, x_j): n \quad i, j \quad m \right\}$ 作估计, 记

$$A_1 = \max\left\{ d(x_i, x_j): n \quad i, j \quad m \right\}$$

则存在 $k, l: n \quad k < \ l \quad m$ 使得 $A_1 = d(x_k, x_l)$, 而且

$$d(x_k, x_{l-1}) < d(x_k, x_l) = A_1 \tag{12}$$

于是有

$$A_1 = d(x_k, x_l) = d(x_k, w(x_{l-1}, Ty_{l-1}, u_{l-1}; \ _{l-1}, \ _{l-1}, \ _{l-1}))$$
$$_{l-1} d(x_k, x_{l-1}) + \ _{l-1} d(x_k, Ty_{l-1}) + \ _{l-1} d(x_k, u_{l-1})$$
$$_{l-1} d(x_k, x_{l-1}) + \ _{l-1} D_1 + \ _{l-1} D_6 \tag{13}$$

如果 $_{l-1} = 0$, 由(13) 有 $A_1 \quad \max\left\{ D_1, D_6 \right\}$;

如果 $_{l-1} \quad 0$, 则由(12) 和(13) 有

$$A_1 < \ _{l-1} d(x_k, x_l) + \ _{l-1} D_1 + \ _{l-1} D_6$$
$$\max\left\{ A_1, D_1, D_6 \right\} = \max\left\{ D_1, D_6 \right\} \tag{14}$$

b) 现对 $\max\left\{ d(x_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\}$ 进行估计, 记

$$A_2 = \max\left\{ d(x_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\}$$

因 $y_j = w(x_i, Tx_j, v_j, \ _j, \ _j, \ _j)$ 于是由(14) 和(10) 有

$$A_2 = \max\left\{ d(x_i, w(x_j, Tx_j, v_j, \ _j, \ _j, \ _j): n \quad i, j \quad m \right\}$$
$$\max\left\{ \ _j d(x_i, x_j) + \ _j d(x_i, Tx_j) + \ _j d(x_i, v_j): n \quad i, j \quad m \right\}$$
$$\max\left\{ D_1, D_6, \quad (\quad (A_{n,m}) \right\} \tag{15}$$

c) 最后估计: $\max\left\{ d(y_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\}$ 记

$$A_3 = \max\left\{ d(y_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\}$$

由(15)和(11)有

$$\begin{aligned} A_3 = & \max\left\{ d(y_i, w(x_j, Tx_j, v_j, \quad_j, \quad_j, \quad_j)): n \quad i, j \quad m \right\} \\ & \max\left\{ \quad_j d(y_i, x_j) + \quad_j d(y_i, Tx_j) + \quad_j d(y_i, v_j): n \quad i, j \quad m \right\} \\ & \max\left\{ d(y_i, x_j), d(y_i, Tx_j), d(y_i, v_j): n \quad i, j \quad m \right\} \\ & \max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

由(14)、(15)和(16)得

$$\begin{aligned} D_5 = & \max\left\{ d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j): n \quad i, j \quad m \right\} \\ & \max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\} \end{aligned} \tag{17}$$

结合(9)、(10)、(11)及(17)有

$$(A_{n,m}) = \max\left\{ D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 \right\} \quad \max\left\{ D_1, \quad (\quad (A_{n,m})), D_6 \right\} \tag{18}$$

如果 $D_1 < \quad (\quad (A_{n,m}))$ 且 $D_1 < D_6$, 因而 $(A_{n,m}) > 0$ 因 满足条件$(\quad)$, 并引用(6)得

$$D_1 < \quad (\quad (A_{n,m})) < \quad (A_{n,m}),$$

而且 $D_1 < D_6 < \quad (A_{n,m})$

于是由(18)有

$$(A_{n,m}) < D(A_{n,m}),$$

矛盾# 由此矛盾知 $D_1 \setminus 5(D(A_{n,m}))$, 且 $D_1 \setminus D_6$# 由(18)有 $D(A_{n,m}) [D_1$# 可是, 显然 $D_1 [D(A_{n,m})$# 于是有 $D(A_{n,m}) = D_1$# 结论(8)得证#

在(8)中取 $n = 0$, 有

$$\begin{aligned} D(A_{0,m}) = & \max\left\{ d(x_0, Tx_j), d(x_0, Ty_j): 0 [j [m \right\} [\\ & d(x_0, Tx_0) + \max\left\{ d(Tx_0, Tx_j), d(Tx_0, Ty_j): 0 [j [m \right\} [\\ & d(x_0, Tx_0) + 5(D(A_{0,m}))\# \end{aligned}$$

从而有 $\quad D(A_{0,m}) [(I - 5)^{-1}(d(x_0, Tx_0)) \qquad (P m \setminus 0)\#$ (19)

上式表明序列 $\left\{ D(A_{0,m}) \right\}$ 是有界的#

另一方面, 对任意的正整数 $n, m: 1 [n < m$, 则(8)有

$$\begin{aligned} D(A_{n,m}) = & \max\left\{ d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j): n [j [m \right\} [\\ & \max_{n [j [m} \left\{ \begin{array}{l} d(w(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}), Tx_j), \\ \quad d(w(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}), Ty_j) \end{array} \right\} [\\ & \max_{n [j [m} \left\{ \begin{array}{l} A_{n-1} d(x_{n-1}, Tx_j) + B_{n-1} d(Ty_{n-1}, Tx_j) + C_{n-1} d(u_{n-1}, Tx_j), \\ \quad A_{n-1} d(x_{n-1}, Ty_j) + B_{n-1} d(Ty_{n-1}, Ty_j) + C_{n-1} d(u_{n-1}, Ty_j) \end{array} \right\} [\\ & A_{n-1} D(A_{n-1,m}) + B_{n-1} 5(D(A_{n-1,m})) + C_{n-1} D(A_{n-1,m}) = \\ & (1 - B_{n-1}) D(A_{n-1,m}) + B_{n-1} 5(D(A_{n-1}, m) = \\ & (I - B_{n-1}(I - 5))(D(A_{n-1,m}))\# \end{aligned}$$

由归纳法, 并引用(19)可以证明

$$\begin{aligned} D(A_{n,m}) [& \mathop{F}_{j=0}^{n-1} ((I - B_j(I - 5)) D(A_j, m)) [\\ & \mathop{F}_{j=0}^{n-1} (I - B_j(I - 5))(D(A_{0,m})) [\end{aligned}$$

$$\overset{n-1}{\underset{j=0}{}}(I - B_j(I - 5))(t_0),$$

其中 $t_0 = (I - 5)^{-1}(d(x_0, Tx_0))$#

因函数 $5: [0,]) y [0,])$ 满足条件(5), 故对任一 $t > 0$, $5(t) < t$, 即$(I - 5)(t) > 0$, $P\ t > 0$# 又因 $\underset{j=0}{E}\ B_j =]$, 故有 $\underset{j=0}{F}(I - B_j(I - 5))(t_0) = 0$# 于是有

$$\lim_{n, m\ y\ ]} D(A_{n, m}) = 0\#$$

上式表明$\{x_n\}$是E 中的 Cauchy 列, 而且

$$\lim_{n\ y\ ]} d(x_n, Tx_n) = 0\#$$

因 E 是完备的, 令 $x_n\ y\ p\ I\ E$, 从而有

$$\lim_{n\ y\ ]} x_n = \lim_{n\ y\ ]} Tx_n = p\#$$

于是由(4) 得

$$d(Tx_n, Tp) [5(\max\{d(x_n, p), d(x_n, Tx_n), d(p, Tp), d(x_n, Tp), d(p, Tx_n)\})$$

在上式两端让 $n\ y\ ]$ 取右极限, 得

$$d(p, Tp) [5(\max\{0, 0, d(p, Tp), d(p, Tp), 0\}) [$$
$$5(d(p, Tp))\#$$

于是由命题111 知 $d(p, Tp) = 0$, 即 p 是T 在E 中的不动点#

最后证明 T 在E 中的不动点是唯一的# 设相反, 如果 g 也是T 在E 中的不动点# 于是

$$d(p, g) = d(Tp, Tg) =$$
$$5(\max\{d(p, g), d(p, Tp), d(g, Tg), d(p, Tg), d(g, Tp)\}) =$$
$$5(d(p, g))\#$$

故 $d(p, g) = 0$# 即 $p = g$# 故 p 是T 在E 中的唯一不动点#

综合上面的讨论, 得知 T 在E 中有唯一的不动点, 而且由(5) 定义的 Ishikawa 型迭代序列$\{x_n\}$收敛于p# 证毕#

在定理211 中取 $5(t) = kt$, $k\ I\ [0, 1)$ 是一常数 $t\ I\ [0,])$, 可得下面的定理#

定理212 设(E, d, w) 与定理211 中的相同, 而T 是满足条件(2) 的拟压缩映象, $\{x_n\}$是由(5) 定义的 T 的具误差的 Ishikawa 型迭代序列# 则下面的结论成立:

1) T 在E 中存在唯一的不动点p;

2) $\{x_n\}$在E 中收敛于p#

注 定理211和定理212是凸度量空间中关于一般的拟压缩映象的具误差的Ishikawa型迭代序列的两个新的收敛性定理# 这两个定理在凸度量空间的框架下肯定地回答了Rhoades, Naipally 及Singh 提出的公开问题, 而且也改进和推广了[2, 6~ 10] 中的相应结果#

对具误差的 Mamm 型迭代序列$\{x_n\}$我们有下面的结果#

定理213 设(E, d, w) 与定理 211 中的相同, T 是满足条件(4) 的一般的拟压缩映象, $\{x_n\}$是由(7) 定义的 T 的具误差的Mann 型迭代序列则下列结论成立:

1) T 在E 中存在唯一的不动点P;

2) $\{x_n\}$在E 中收敛于p#

[参 考 文 献]

[1] Chang Shi_sheng, Cho Y J, Jung J S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224(1): 149) 165.

[2] Ciric L B. A generalization of Banach. s contraction principle[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 45(1): 267) 273.

[3] Chidume C E. Convergence theorems for strongly pseudo_contractive and strongly accretive mappings [J]. J Math Anal Appl, 1998, 228(1): 254) 264.

[4] Chidume C E. Global iterative schemes for strongly pseudo_contractive maps[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126(9): 2641) 2649.

[5] Rhoades H E. Convergence of an Ishikawa type iteration scheme for a generalized contraction[J]. J Math Anal Appl, 1994, 185(2): 350) 355.

[6] XU Hong_kun. A note on the Ishikawa iteration scheme[J]. J Math Anal Appl, 1992, 167(2): 582) 587.

[7] Rhoades H E. Comments on two fixed point iteration methods[J]. J Math Anal Appl, 1976, 56(2): 741) 750.

[8] Naimpally S A, Singh K I. Extensions of some fixed point theorems of Rhoades[J]. J Math Anal Appl, 1983, 96(2): 437) 446.

[9] LIU Qi_hou. On Naimpally and Singh. s open questions[J]. J Math Anal Appl, 1987, 124(1): 157) 164.

[10] LIU Qi_hou. A convergence theorem of the sequence of Ishikawa iterates for quasi_contractive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1990, 146(2): 301) 305.

[11] Takahashi W. A convexity in metric space and nonexpansive mappings [J]. Kodai Math Sem Rep, 1970, 22(1): 142) 149.

Convergence of Ishikawa Type Iterative Sequence With Errors for Quasi_Contractive Mappings in Convex Metric Spaces

TIAN You_xan[1], ZHANG Shi_sheng[2]
(1. Institute of Computer Science &Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, P R China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: Some convergence theorems of Ishikawa type iterative sequence with errors for nonlinear general quasi_contractive mapping in convex metric spaces are proved. The results not only extend and improve the corresponding results of L. B. Ciric, Q. H. Liu, H. E. Rhoades and H. K. Xu, at el but also give an affirmative answer to the open question of Rhoades_Naimpally_Singh in convex metric spaces.

Key words: convex metric space; fixed point; generalized Ishikawa (Mann) iterative sequence with errors; general quasi_contractive mapping