

文章编号: 1000-0887(2002 09-0943_08)

周期函数和非平稳周期函数的小波变换^{*}

刘海峰, 周炜星, 王辅臣, 龚欣, 于遵宏

(华东理工大学 资源与环境工程学院, 上海 200237)

(戴世强推荐)

摘要: 探讨了三角函数、周期函数以及一类非平稳周期函数小波变换的一些性质, 发现周期函数的小波能谱的峰高和峰宽均正比于信号的周期。提出了一个新的只利用与信号周期有关的一个尺度小波变换系数的重构公式, 它可准确地重构三角函数, 对一般周期函数的重构结果优于其 Fourier 级数中的任何一项, 对一类均值和振幅变化的非平稳周期函数的重构结果与信号非常吻合。

关键词: 小波变换; 周期函数; 非平稳周期函数; 傅立叶变换

中图分类号: O174 文献标识码: A

引 言

小波分析^[1]是当前应用数学中一个迅速发展的领域, 是一种时频双局部化方法, 被誉为“数学显微镜”, 在诸如湍流^[2]、分形^[3]、信号处理^[4]等各种应用领域获得了广泛的应用。

当前, 以三角函数为基函数的傅立叶分析和由此得到的傅立叶能谱在许多学科领域都得到了广泛的应用, 如信号处理、湍流^[5]、非线性动力学^[6]等。但傅立叶分析不适用于对非平稳信号的分析, 此时小波分析则特别适用。

本文首先探讨了 $f(x) = e^{ix}$ 的小波变换的一些性质, 如能谱、信号的重构等。在此基础上研究了周期函数小波变换的一些性质。最后探讨了非平稳周期函数小波变换的性质。

1 小波分析

如果 $\phi \in L^2(\mathbf{R})$ 满足“容许性”条件:

$$C_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (1)$$

那么 ϕ 称为是一个“基小波”。关于每一个基小波 ϕ , 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一维连续小波变换为

$$(W_\phi f)(b, a) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{W_{a,b}(x)} dx \quad (f \in L^2(\mathbf{R})), \quad (2)$$

其中 $a, b \in \mathbf{R}$ 而 $a \neq 0$, $W_{a,b}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ 。

* 收稿日期: 2000_10_16; 修订日期: 2002_03_28

基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999022103); 高等学校骨干教师资助计划项目

作者简介: 刘海峰(1971—), 男, 山东文登人, 副教授, 博士(E-mail: hfliu@ecust.edu.cn).

小波逆变换公式为^[1]

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \quad (3)$$

在尺度空间小波能谱为^[2]

$$E(a) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(b, a)|^2 db = \frac{1}{C_\psi} P(a), \quad (4)$$

式中 $P(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(b, a)|^2 db$.

小波能谱与 Fourier 能谱的关系为^[7]

$$E(k) = \frac{2}{C_\psi k} \int_0^{\infty} E(\omega) \left| \psi\left(\frac{k_0 \omega}{k}\right) \right|^2 d\omega \quad (5)$$

2 $f(x) = e^{i\omega x}$ 的小波变换性质

2.1 小波能谱

由傅立叶分析, 如果 $f(x) = (2n\pi)^{-1/2} e^{i\omega_1 x}$, $x \in [-n\pi, n\pi]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时相应的 Fourier 能谱正比于 $\delta(\omega - \omega_1)$. 根据小波能谱与 Fourier 能谱的关系式(4), 当信号的 Fourier 能谱 $E(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$ 时, 有如下两个性质:

性质 1 当信号的 Fourier 能谱 $E(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$ 时, 则 $\max\{P(a)\} \propto \omega_1^{-1}$, 而 $\max\{P(a)/a\} \propto \omega_1^0$.

证明 根据 Dirac 函数的基本性质由式(5)得

$$E(k) = \frac{1}{C_\psi k} \left| \psi\left(\frac{k_0 \omega_1}{k}\right) \right|^2, \quad (6)$$

$$P(a) \propto a \left| \psi(\omega_1 a) \right|^2. \quad (7)$$

令 $F(x) = \left| \psi(x) \right|$, $x = \omega_1 a$, $M = \max\{P(a)\}$, 则

$$\partial P / \partial a = \omega_1 [F(x)^2 + 2xF'(x)F'(x)], \quad (8)$$

由 $\partial P / \partial a |_{a=a_m} = 0$ 得

$$F(x_m) + 2xF'(x_m) = 0, \quad (9)$$

其中 $x_m = \text{const}$, 则

$$a_m = x_m / \omega_1, \quad (10)$$

$$M \propto \frac{x_m}{\omega_1} \left| \psi(x_m) \right|^2 = \frac{c_0}{\omega_1} \propto a_m, \quad (11)$$

其中常数 $c_0 = x_m \left| \psi(x_m) \right|^2$.

由(7)还可得 $\max\{P(a)/a\} \propto \max\{\left| \psi(x) \right|^2\} \propto \omega_1^0$, 并且 $a_m = c/\omega_1$, c 满足 $\left| \psi(x) \right| = \max\{\left| \psi(x) \right|\}$.

Q. E. D

对于单频率的正(余弦)信号, 采用使其 $A = \left\{ a \in \mathbf{R}; \frac{P(a)}{\max\{P(a)\}} > \varepsilon \right\}$ (ε 为一小于 1 的正数) 的区间 A 的长度 L 代表峰宽, 则有如下命题:

性质 2 当信号的 Fourier 能谱 $E(\omega) = \delta(\omega - \omega_1)$ 时, 则其小波能谱的峰宽 $L \propto \omega_1^{-1}$.

证明 因为

$$\frac{P(a)}{\max\{P(a)\}} \propto \frac{a \left| \psi(\omega_1 a) \right|^2}{M} = \frac{\omega_1 a \left| \psi(\omega_1 a) \right|^2}{c_0} = \frac{x \left| \psi(x) \right|^2}{c_0} > \varepsilon, \quad (12)$$

所以满足上式的 x 的区间与信号频率无关, 其长度为常数 L_0 , 则区间 A 的长度

$$L = L_0 \omega_1 \propto 1/\omega_1 \propto a_m \cdot \tag{13}$$

Q. E. D

2.2 信号的重构

针对 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$ 这类信号经由小波变换之后的重构, 有如下两个性质:

性质3 设 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$, 则 $f(x) = f_1(x, a_m)$, 其中, $a_m = c/\omega_0, f_1(x, a)$ 为

$$f_1(x, a) = \frac{1}{H_\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a, b)}{a^{3/2}} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \tag{14}$$

其中 H_ϕ 是仅与小波函数有关的常数, $H_\phi = |\Phi(c)|^2$.

证明 根据 Parseval 恒等式^[8]可得

$$f(a, b) = \langle f, \phi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, \phi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f} \phi_{a,b} d\omega, \tag{15}$$

又 $f^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 x} e^{-i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, 将 f 代入(15) 式得

$$f(a, b) = \overline{\phi_{a,b}(\omega_0)}. \tag{16}$$

因为 $\phi_{a,b}(\omega) = a |a|^{-1/2} \phi(a\omega) e^{-ib\omega}$, 将(16) 式代入(14) 式得

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_\phi} \int_{-\infty}^{\infty} a_m^{-1} e^{-ib\omega_0} \overline{\phi(c)} \phi\left(\frac{x-b}{a_m}\right) db = \frac{1}{H_\phi} \overline{\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} a_m^{-1} e^{ib\omega_0} \phi\left(\frac{x-b}{a_m}\right) db, \tag{17}$$

令 $y = (x - b)/a_m$, 则 $b = x - a_m y$, 代入(17) 式得

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_\phi} \overline{\phi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x - a_m y)\omega_0} \phi(y) dy = \frac{1}{H_\phi} e^{i\omega_0 x} \overline{\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega_0} \phi(y) dy, \tag{18}$$

又 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\omega_0} \phi(y) dy = \phi(c)$, 代入(18) 式得

$$f_1(x, a_m) = e^{i\omega_0 x} \frac{1}{H_\phi} |\phi(c)|^2 = f(x). \tag{19}$$

Q. E. D.

性质3 说明, 对 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$ 这类周期函数, 只用与信号频率有关的一个尺度的小波变换系数就可准确重构出信号本身, 而不必采用含有对尺度进行无穷积分的小波逆变换公式.

性质3 中 f 的小波变换及其重构是同一个波, 实际上, 可以使用不同的小波进行变换, 这时有如下性质:

性质4 设 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$, 则 $f(x) = f_1(x, a_m)$, 其中 $a_m = c_\phi/\omega_0, c_\phi$ 满足 $|\phi_1(c_\phi)| = \max\{|\phi_1(x)|\}$,

$$f_1(x, a) = \frac{1}{H_{\phi_1\phi_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\phi_1}(a, b)}{a^{3/2}} \phi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) db, \tag{20}$$

其中 $f_{\phi_1}(a, b)$ 是 f 的小波变换(使用 ϕ_1), $H_{\phi_1\phi_2} = \overline{\phi_1(c_\phi)} \phi_2(c_\phi)$.

证明 与性质3 的证明相似, 将式(16) 所示的 f 的小波变换(使用 ϕ_1) 代入式(20) 得

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_{\phi_1\phi_2}} \overline{\phi_1(c_\phi)} \int_{-\infty}^{\infty} a_m^{-1} e^{ib\omega_0} \phi_2\left(\frac{x-b}{a_m}\right) db. \tag{21}$$

令 $y = (x - b)/a_m$, 则 $b = x - a_m y$, 代入(21) 式得

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_{\phi_1\phi_2}} e^{i\omega_0 x} \overline{\phi_1(c_\phi)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ic_\phi y} \phi_2(y) dy, \tag{22}$$

$$f_1(x, a_m) = e^{i\omega_0 x} \frac{1}{H_{\phi_1 \phi_2}} \overline{\phi_1(c_{\phi_1})} \phi_2(c_{\phi_1}) = f(x). \quad (23)$$

3 周期函数的小波变换性质

由 Fourier 分析可知, 在全实轴 \mathbf{R} 上一个以 T 为周期且在 $(0, T)$ 上平方可积的函数 $f(x)$ 可展开成 Fourier 级数^[9]

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i2\pi/T mx}, \quad (24)$$

其中, $c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T} mx} dx$. 易知当信号周期改变时 c_m 不变. 由 Riemann 引理^[10] 知, c_m

$\rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$. 同时, 序列 $\{c_m\}$ 属于 l^2 , 并且满足 Bessel 不等式 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \leq \|f\|_{(0, T)}^2$.

对于 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{nT}} f(x)$, $x \in \left[-n\frac{T}{2}, n\frac{T}{2}\right]$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时平方可积. 易知此时其 Fourier 能谱正比于 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} m\right)$.

性质 5 若 \mathbf{R} 上一以 T 为周期的函数 Fourier 能谱 $E(\omega) \propto \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} m\right)$, 其中序列 $\{c_m\}$ 属于 l^2 , 则 $\max\{P(a)\} \propto T$, 小波能谱的峰宽 $L \propto T$.

证明 因 $\{c_m\}$ 属于 l^2 , 由式(5)可以得到

$$P(a) \propto a \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T} ma\right) \right|. \quad (25)$$

令 $(2\pi/T)a = x$, 则由 $\partial P/\partial a = 0$ 得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 |\phi(mx)| + x \sum_{m=-\infty}^{\infty} m |c_m|^2 |\phi(mx)| |\phi(mx)|' = 0, \quad (26)$$

其非平凡解 $x_m = \text{const}$ 仅与序列 $\{c_m\}$ 和小波函数本身有关.

$$\max\{P(a)\} \propto \frac{x_m T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 |\phi(mx_m)| \propto T, \quad (27)$$

由(25) 还可得 $\max\{P(a)/a\} \propto T^0$, 并且 $a_m = \frac{cT}{2\pi}$ 仅与小波函数有关.

又由峰宽定义得

$$\frac{P(a)}{\max\{P(a)\}} = \frac{a \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \left| \phi\left(\frac{2\pi}{T} ma\right) \right|}{\frac{x_m T}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 |\phi(mx_m)|} = \frac{x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 |\phi(mx)|}{x_m \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 |\phi(mx_m)|} > \varepsilon, \quad (28)$$

可以发现满足上式的 x 的区间与信号周期无关, 其长度为常数 L_0 , 则相应的尺度区间长度

$$L = TL_0/2\pi \propto T. \quad (29)$$

Q. E. D.

性质 6 $f(x)$ 是在 \mathbf{R} 上一个以 T 为周期且在 $(0, T)$ 上平方可积的函数, $\{c_n\}$ 是其 Fourier 级数系数, 则

$$f_1(x, a_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(cn)|^2}{H_\Phi} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \tag{30}$$

当 $c_0 = 0$ 并且至少有一项 $c_i \neq 0, i > 1$ 和 $|c_1| = \max\{|c_n|\}$ 时, 对于任意的 $m \in \mathbf{Z}$ 有

$$\|f(x) - f_1(x, a_m)\|_{L^2(0,T)} < \|f(x) - c_m e^{i\frac{2\pi}{T}mx}\|_{L^2(0,T)} \tag{31}$$

证明 因 Fourier 级数可逐项积分^[10], 由 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ 可得

$$f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T}nx} e^{-i\omega x} dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) \tag{32}$$

根据 Parseval 恒等式^[8]得

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \Phi_{a,b}\left[\frac{2\pi}{T}n\right], \tag{33}$$

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_\Phi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} a_m^{-1} e^{ib\frac{2\pi}{T}n} \Phi\left[\frac{2\pi}{T}na_m\right] \Phi\left[\frac{x-b}{a_m}\right] db \tag{34}$$

令 $y = \frac{x-b}{a_m}$, 则 $b = x - a_m y$, 并利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi}{T}na_m y} \Phi(y) dy = \Phi\left[\frac{2\pi}{T}na_m\right]$ 得

$$f_1(x, a_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi(cn)|^2}{H_\Phi} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \tag{35}$$

由 Riesz-Fischer 定理^[11]得

$$\|f(x) - f_1(x, a_m)\|_{L^2(0,T)}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{|\Phi(cn)|^2}{|\Phi(c)|^2}\right) c_n \right|^2, \tag{36}$$

$$\|f(x) - c_m e^{i\frac{2\pi}{T}mx}\|_{L^2(0,T)}^2 = \sum_{n=-\infty, n \neq m}^{\infty} |c_n|^2 \geq \sum_{n=-\infty, n \neq 1}^{\infty} |c_n|^2 \quad (m \in \mathbf{Z}) \tag{37}$$

因为 $0 \leq |\Phi(cn)|^2 / |\Phi(c)|^2 < 1, n \neq 1$, 所以

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{|\Phi(cn)|^2}{|\Phi(c)|^2}\right) c_n \right|^2 < \sum_{n=-\infty, n \neq 1}^{\infty} |c_n|^2, \tag{38}$$

$$\|f(x) - f_1(x, a_m)\|_{L^2(0,T)} < \|f(x) - c_m e^{i\frac{2\pi}{T}mx}\|_{L^2(0,T)} \quad (m \in \mathbf{Z}) \tag{39}$$

Q. E. D.

与性质 3 相似, 性质 6 中可以使用不同的小波进行变换和重构.

4 非平稳周期函数的小波变换性质

本节讨论 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$ 的振幅和时均值变化时, $f(x) = f_p(x) + f_A(x) e^{i\omega_0 x}$ 的小波变换性质.

性质 7 设 $f(x) = f_A(x) e^{i\omega_0 x}$, 其中振幅 f_A 连续且 $f_A \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$|f_1(x, a_m) - f_A(x) e^{i\omega_0 x}| \propto O\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2, \tag{40}$$

其中 $a_m = c/\omega_0$.

证明

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \tag{41}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\omega) e^{i(\omega_0 + \omega)x} d\omega \tag{42}$$

根据 Parseval 恒等式得

$$f_1(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\omega) \overline{\phi_{a,b}(\omega_0 + \omega)} d\omega, \quad (43)$$

$$f_1(x, a_m) = \frac{1}{H_\psi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\omega) e^{i(\omega_0 + \omega)x} \left| \phi\left(c + c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 d\omega, \quad (44)$$

又因为 $\left. \frac{\partial |\phi(x)|^2}{\partial x} \right|_{x=c} = 0$, $\left. \frac{\partial^2 |\phi(x)|^2}{\partial x^2} \right|_{x=c} = 2|\phi(c)| \left. \frac{\partial^2 |\phi(x)|}{\partial x^2} \right|_{x=c}$,

Taylor 展开式得

$$\left| \phi\left(c + c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 = |\phi(c)|^2 + |\phi(c)| \left. \frac{\partial^2 |\phi(x)|}{\partial x^2} \right|_{x=c} \left(c \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \dots \quad (45)$$

即 $\frac{1}{H_\psi} \left| \phi\left(c + c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 = 1 + O\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, (46)

$$|f_1(x, a_m) - f_A(x) e^{i\omega_0 x}| \propto O\left(\frac{\omega_A'}{\omega_0}\right)^2 \quad (\omega_A' \in \mathbf{R}). \quad (47)$$

当振幅 f_A 的能量主要集中在低频时, 此时 $\left(\frac{\omega_A'}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$, 上式中可忽略 $O\left(\frac{\omega_A'}{\omega_0}\right)^2$ 项, 得

$$f_1(x, a_m) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A(\omega) e^{i(\omega_0 + \omega)x} d\omega = f(x). \quad (48)$$

性质 8 设 $f(x) = f_p(x) + e^{i\omega_0 x}$, 其中均值 f_p 连续且 $f_p \in L^1(\mathbf{R})$, 则

$$|f_1(x, a_m) - e^{i\omega_0 x}| \propto O\left(\frac{\omega_p'}{\omega_0}\right)^2, \quad (49)$$

其中 $a_m = c/\omega_0$.

证明 与性质 7 的证明相似, 可得

$$f_1(x, a_m) = e^{i\omega_0 x} + \frac{1}{H_\psi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(\omega) e^{i\omega x} \left| \phi\left(c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 d\omega, \quad (50)$$

又因为 $\left. \frac{\partial |\phi(x)|^2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, $\left. \frac{\partial^2 |\phi(x)|^2}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 2\left(\left. \frac{\partial |\phi(x)|}{\partial x} \right|_{x=0}\right)^2$, 由 Taylor 展开式得

$$\left| \phi\left(c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 = \left(\left. \frac{\partial |\phi(x)|}{\partial x} \right|_{x=c}\right)^2 \left(c \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \dots, \quad (51)$$

$$\frac{1}{H_\psi} \left| \phi\left(c \frac{\omega}{\omega_0}\right) \right|^2 = O\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad (52)$$

$$|f_1(x, a_m) - e^{i\omega_0 x}| \propto O\left(\frac{\omega_p'}{\omega_0}\right)^2 \quad (\omega_p' \in \mathbf{R}). \quad (53)$$

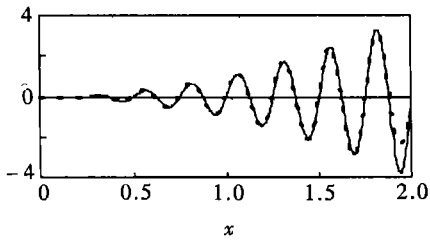
当均值 f_p 的能量主要集中在低频时, 此时 $\left(\frac{\omega_p'}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$, 上式中可忽略 $O\left(\frac{\omega_p'}{\omega_0}\right)^2$ 项, 得

$$f_1(x, a_m) \approx e^{i\omega_0 x}. \quad (54)$$

性质 9 设 $f(x) = f_p(x) = f_A(x) e^{i\omega_0 x}$, 其中 f_p 连续且 $f_p \in L^1(\mathbf{R})$, f_A 连续且 $f_A \in L^1(\mathbf{R})$, 则

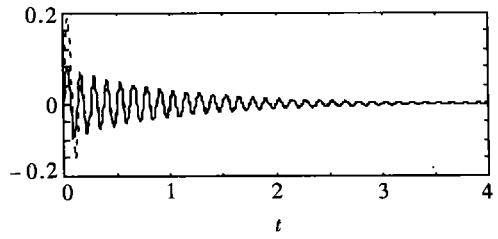
$$|f_1(x, a_m) - f_A(x) e^{i\omega_0 x}| \propto O\left(\frac{\omega_A'}{\omega_0}\right)^2 + O\left(\frac{\omega_p'}{\omega_0}\right)^2. \quad (55)$$

利用性质 7 和性质 8 很容易证明性质 9. 此处从略. 与性质 3 相似, 性质 7, 8, 9 中可以使用不同的小波进行变换和重构.



$$-f(x) = \sin(8\pi x)x^2, \quad -f_1(x, a_m)$$

$$(a) f(x) = x^2 \sin(8\pi x)$$



$$-0.1e^{-t} \sin(16\pi t), \quad -f_1(t, a_m)$$

$$(b) f(t) = e^{-t} + 0.1e^{-t} \sin(16\pi t)$$

图1 重构的信号波形(Mexican hat 小波^[1])

5 分析与讨论

由性质3可知,对于 $f(x) = e^{i\omega_0 x}$ 这类信号,只用一个尺度(正比于信号周期)的小波变换系数就可以准确重构。由性质5可知,对一般的周期函数而言,用一个尺度的小波变换系数重构的结果优于任何一项傅立叶级数。

由性质7、8、9可知,对一般的非平稳周期函数,只要振幅和均值的变化不特别剧烈,就可以用一个尺度的小波变换系数重构出随振幅变化的波形,而Fourier分析由于基是等振幅的,不具备这一功能。图1中的计算结果表明:a) 振幅 $f_A \propto x^2$ 时, b) 振幅 $f_A \propto e^{-t}$ 且时均值 $f_p \propto e^{-t}$ 时,只用一个尺度的小波变换系数就可以较精确地重构出随振幅变化的波形。

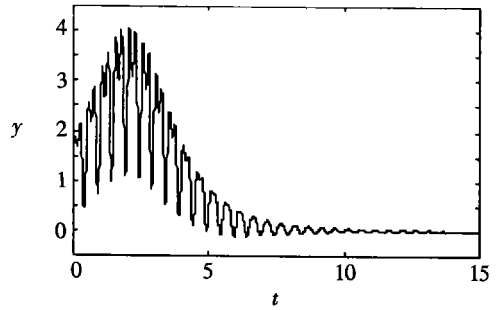


图2 $y(t)$ 随时间的变化

Forinash 和 Lang^[12]用连续小波变换研究了离散通气器模型的频率特征。模型的解最后可简化为如下形式:

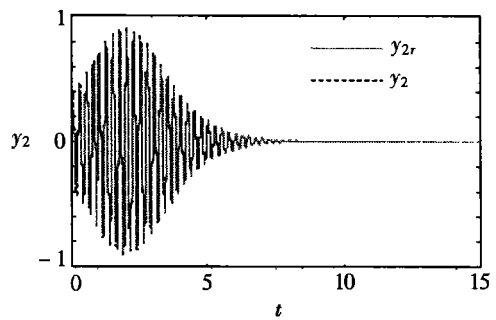
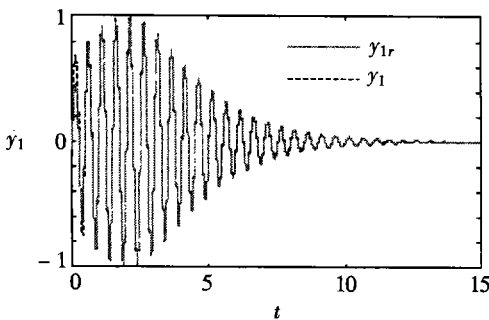


图3 重构的基波和次谐波(Morlet 小波)

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 \tag{56}$$

其中 $y_0 = g \operatorname{sech}^2(b - ct)$, $y_1 = \operatorname{sech}(b - ct) \cos(d - 2\pi ft)$, $y_2 = -a \operatorname{sech}^2(b - ct) \cos(2(d - 2\pi ft))$ 。上式中基波和次谐波的振幅均随时间显著变化,而均值也随时间不断变化。当 $a = 0.9, b = 2, c = 0.5, d = 2, f = 2, g = 3$ 时, $y(t)$ 随时间的变化如图2所示。由图3可以发现,利用性质9可从 $y(t)$ 中通过对应尺度的小波变换系数较精确地分别重构出基波和次谐波

的波形(图中下标 r 表示重构的信号)• 计算中采用了分辨率较高的 Morlet 小波^[1], 它可较好地克服基波和次谐波之间的相互干扰•

[参 考 文 献]

- [1] Daubechies I. Ten lectures on wavelets[A]. In: CBMS_NSF Reg Conf Ser Appl Math. Philadelphia: SIAM Press, 1992.
- [2] Farge M, Kevlahan N, Perrier V, et al. Wavelets and turbulence[J]. Proc IEEE, 1996, **84**(4): 639—669.
- [3] Jaffard S. Some mathematical results about the multifractal formalism for function [A]. In: Wavelet. Theory, Algorithms, and Applications [C]. Academic Press, 1994, 325—361.
- [4] Guillemain P, Kronland_Martinet R. Characterization of acoustic signals through continuous linear time_frequency representations[J]. Proc IEEE, 1996, **84**(4): 561—585.
- [5] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [6] Baker G I, Collub J P. Chaotic Dynamics: An Introduction [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [7] Perrier V. Wavelet Spectra compared to Fourier spectra[J]. J Math Phys, 1995, **36**(3): 1506—1519.
- [8] 程正兴. 小波分析算法与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998.
- [9] 潘文杰. 傅立叶分析及其应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [10] 欧阳光中, 姚允龙. 数学分析[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1999.
- [11] Chui C K. An Introduction to Wavelets [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1995.
- [12] Forinash K, Lang W C. Frequency analysis of discrete breather modes using a continuous wavelet transform[J]. Physica D, 1998, **123**(3): 437—447.

The Wavelet Transform of Periodic Function and Nonstationary Periodic Function

LIU Hai_feng, ZHOU Wei_xing, WANG Fu_chen, GONG Xin, YU Zun_hong

(College of Resource and Environmental Engineering, East China University
of Science and Technology, Shanghai 200237, P R China)

Abstract: Some properties of the wavelet transform of trigonometric function, periodic function and nonstationary periodic function have been investigated. The results show that the peak height and width in wavelet energy spectrum of a periodic function are in proportion to its period. At the same time, a new equation, which can truly reconstruct a trigonometric function with only one scale wavelet coefficient, is presented. The reconstructed wave shape of a periodic function with the equation is better than any term of its Fourier series. And the reconstructed wave shape of a class of nonstationary periodic function with the equation agree well with the function.

Key words: wavelet transform; periodic function; nonstationary periodic function; Fourier transform