文章编号: 1000_0887(2002) 09_0987_04

Theta(t) 型振荡奇异积分的一个权模不等式*

赵 凯, 王 梅, 王春杰

(青岛大学 数学系, 青岛 266071)

(云天铨推荐)

摘要: 讨论了 theta(t) 型振荡奇异积分算子, 对于非负、局部可积的权函数, 证明了 theta(t) 型振荡奇异积分算子的一个加权模不等式, 只是权函数被它作用几次 Hardy_Littlewood 极大算子的权函数所代替•

关 键 词: theta(t) 型振荡奇异积分; 权模不等式; Hardy_Littlewood 极大算子
中图分类号: O174.2 文献标识码: A

振荡奇异积分算子是

$$Tf(x) = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbf{R}^n} \exp[iP(x,y)]K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

此处 $P(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 上的实值多项式, 核函数 $K(x,y)$ 满足

i) $|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n} \quad (x \neq y)$,

ii) $|\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-n-1} \quad (x \neq y)$•

对如此定义的振荡奇异积分算子, 我们知道有 L^p 有界性及加权 $L^p(w)$ 的有界性(参见[1]、[2]等), $(1<p<+\infty)$, 最近, 胡国恩又证明了这样一个权模不等式[3]:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p M^{[p]+1}w(x)\,\mathrm{d}x \qquad (1<p<+\infty)•$$

这里我们考虑的是核函数 $K(x,y)$ 满足的条件有所改变的一类 $\theta(t)$ 型振荡奇异积分算子, 它是原振荡奇异积分算子的一个推广算子, 所谓 $\theta(t)$ 型振荡奇异积分算子是指核函数 $K(x,y)$ 除满足 i) 外, 还满足:

iii) $$|K(x,y)-K(x_0,y)| + |K(y,x)-K(y,x_0)| \leqslant C\theta\left(\frac{|x_0-x|}{|x_0-y|}\right)|x_0-y|^{-n},$$

$$2|x_0-x| < |x_0-y|,$$

其中 $\theta(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非减函数, $\theta(0)=0$, $\theta(2t) \leqslant C\theta(t)$, 且

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty•$$

对于如上定义的 $\theta(t)$ 型振荡奇异积分算子, 我们曾在[4] 中得到过加权 $L^p(w)$ 的有界性 $(1<p<+\infty)$, 由以前的结果([4] 和[5] 等), 我们猜测它也应有类似于[3] 中的权模不等式,

* 收稿日期: 1999_05_20; 修订日期: 2002_05_16
基金项目: 山东省教委资助项目(J98P51)
作者简介: 赵凯(1960—) , 男, 山东高密市人, 教授(E_mail: zhkai01@ sina. com) .

借助于已有的知识和结果, 我们通过直接证明一个权模控制不等式, 进而得到如下的权模不等式:

定理 设 T 为 $\theta(t)$ 型振荡奇异积分算子, 则成立权模不等式 $(1 < p < +\infty)$:

$$\int_{R^n} |Tf(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{R^n} |f(x)|^p M^{[p]+1} w(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$

其中 $w(x)$ 是非负、局部可积的权函数, M^k 表示取 k 次 Hardy_Littlewood 极大算子 M, $[p]$ 表示 p 的整数部分•

证明 设结论对 $P(x, y)$ 为形如次数小于 k 的 x 单项式乘以任意次数的 y 单项式、以及次数小于 l 的 y 单项式乘以 k 次的 x 单项式作和式所成的实多项式成立(由[5] 的结论知这是合理的)• 记

$$P(x, y) = \sum_{|\alpha| = k, |\beta| = l} c_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} + R(x, y),$$

这里 $R(x, y)$ 是满足归纳假设条件的多项式• 又不妨设 $k \neq 0$, $l \neq 0$, 以及 $\sum_{|\alpha| = k, |\beta| = l} |c_{\alpha\beta}| = 1$• 此时记

$$\begin{aligned} Tf(x) = & \int_{|x-y| \leqslant 1} \exp[\mathrm{i}p(x, y)] K(x, y) f(y)\mathrm{d}y + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1} < |x-y| \leqslant 2^j} \exp[\mathrm{i}p(x, y)] K(x, y), f(y)\mathrm{d}y \triangleq \\ & T_0 f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} T_j f(x) \bullet \end{aligned}$$

先看 $T_0 f(x)$, 记 $R^n = \bigcup_j Q_j$, 其中 Q_j 是互不相交的长度为 1 的方体, 同时记 $f_j = f\chi_{Q_j}$, 则有

$$\| T_0 f \|_{p,w}^p \leqslant C \sum_j \| T_0 f_j \|_{p,w}^p$$

设 Q_0 是中心为坐标原点的那个方体, 则当 $y \in Q_0$, 且 $|x - y| \leqslant 1$ 时, 有

$$\left| \exp[\mathrm{i}p(x, y)] - \exp[\mathrm{i}R(x, y) + \sum_{|\alpha| = k, |\beta| = l} c_{\alpha\beta} y^{\alpha+\beta})] \right| \leqslant C |x - y| \bullet \tag{3}$$

从而

$$\begin{aligned} |T_0 f_0(x)| \leqslant & \left| \int_{|x-y| \leqslant 1} \exp[\mathrm{i}(R(x, y) + \sum_{|\alpha| = k, |\beta| = l} c_{\alpha\beta} y^{\alpha+\beta})] K(x, y) f_0(y)\mathrm{d}y \right| + \\ & CMf_0(x) \bullet \end{aligned} \tag{4}$$

这样, 由[3] 中的引理、归纳假设以及[5, 6], 我们得到

$$\| T_0 f_0 \|_{p,w}^p \leqslant C \| f_0 \|_{p, M^{[p]+1} w}^p \bullet \tag{5}$$

对于 f_j, 设 x_j 是 Q_j 的中心, 因

$$T_0 f_j(x + x_j) = \int_{|x-y| \leqslant 1} \exp[\mathrm{i}p(x + x_j, y + x_j)] K(x + x_j, y + x_j) f_j(y + x_j)\mathrm{d}y,$$

又 Hardy_Littlewood 极大算子 M 是平移不变的, 因此, 由以上的推导, 同样有

$$\| T_0 f_j \|_{p,w}^p \leqslant C \| f_j \|_{p, M^{[p]+1} w}^p \bullet \tag{6}$$

这样由(5)、(6) 两式, 我们可以得到

$$\| T_0 f \|_{p,w}^p \leqslant C \| f \|_{p, M^{[p]+1} w}^p \bullet \tag{7}$$

现在我们考虑 $T_j f(x)$, $(j \geqslant 1)$, 因为

$$|T_j f(x)| \leqslant \int_{2^{j-1} < |x-y| \leqslant 2^j} \frac{|f(y)|}{|x - y|^n}\mathrm{d}y \leqslant CMf(x) \bullet$$

所以由 Hardy_Littlewood 极大算子的性质，以及权函数的逆 Hölder 不等式，我们知道：存在 $\varepsilon >0$，使有

$$\| T_j f \|_{p, w^{1+\varepsilon}} \leqslant C \| f \|_{p, w^{1+\varepsilon}}, \tag{8}$$

下面我们直接证明还有不等式

$$\| T_j f \|_p \leqslant C 2^{-j\sigma} \| f \|_p, \quad (\text{其中 } \sigma > 0, 1 < p < +\infty). \tag{9}$$

事实上

$$\begin{aligned}
\int | T_j f |^p \mathrm{d}x = & \int \left| \int_{2^{j-1} < |x-y| \leqslant 2^j} \exp[\,\mathrm{i}p(x,y)\,] K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& C \int \left(\int_{2^{j-1} < |x-y| \leqslant 2^j} | K(x,y) | \cdot | f(y) | \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& C \int \left(\int_{2^{j-1} < |x-y| \leqslant 2^j} \frac{| f(y) |}{| x-y |^n} \mathrm{d}y \right)^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& C 2^{-jnp} 2^{nj} 2^{jn\frac{1}{q}} \int | f(y) |^p \mathrm{d}y = \\
& C 2^{-jn\left(p + \frac{1}{p} - 2\right)} \| f \|_p^p = C 2^{-j\sigma} \| f \|_p^p,
\end{aligned}$$

因为 $p > 1$，所以 $p + \dfrac{1}{p} - 2 > 0$，从而 $\sigma = n\left(p + \dfrac{1}{p} - 2\right) > 0$.

这样，由(8)、(9)两式，以及变测度算子插值定理可得

$$\| T_j f \|_{p, w} \leqslant C 2^{-j\delta\sigma} \| f \|_{p, w} \quad (0 < \delta < 1). \tag{10}$$

从而

$$\left\| \sum_{j \geqslant 1} T_j f \right\|_{p, w} \leqslant C \| Mf \|_{p, w}. \tag{11}$$

因此有(参见[3, 5, 6])

$$\left\| \sum_{j \geqslant 1} T_j f \right\|_{p, w} \leqslant C \| f \|_{p, M^{[p]+1} w} \quad (1 < p < +\infty), \tag{12}$$

注 上式中的常数 C 与多项式 $P(x,y)$ 的系数无关，结合(7)、(12)可得

$$\| Tf \|_{p, w}^p \leqslant C \| f \|_{p, M^{[p]+1}}^p \quad (1 < p < +\infty).$$

这就是我们要证的权模不等式：

$$\int_{\mathbf{R}^n} | Tf(x) |^p w(x) \mathrm{d}x \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} | f(x) |^p M^{[p]+1} w(x) \mathrm{d}x.$$

证毕.

[参 考 文 献]

[1] Ricci F, Stein E M. Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integral Ⅰ: Oscillatory Integrals[J]. J Funct Anal, 1987, **73**(1): 179—194.

[2] 陆善镇, 张严. 一类振荡积分算子的加权模不等式[J]. 科学通报, 1991, **36**(13): 961—964.

[3] HU Guo_en. A weighted norm inequality for oscillatory singular integrals[J]. Adv in Math (China), 1997, **26**(2): 133—138.

[4] 赵凯. 一类奇异积分算子的加权模不等式[J]. 青岛大学学报, 1993, **6**(1): 52—55.

[5] 赵凯. 广义 Calder n_Zygmund 算子的一个权模不等式[J]. 青岛大学学报, 1998, **11**(2): 5—10.

[6] P rez C. Weighted norm inequalities for singular integral operators[J]. J London Math Soc, 1994, **49**(1): 296—308.

[7] Garcia_Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weightednorm Inequalities and Related Topics[M]. North_Holland Amsterdan, North_Holland Math Studies, , 1985.

[8] Fefferman C, Stein E M. Some maximal inequalities[J]. Amer J Math, 1971, **93**(1): 107—115.
[9] ZHAO Kai. On generalized calder n_Zygmund operators[J]. J Math Research & Exposition, 1995, **15** (2): 211—215.

A Weighted Norm Inequality for Thela(t)_Type Oscillatory Singular Integrals

ZHAO Kai, WANG Mei, WANG Chun_jie
(Department of Mathematics, Qingdao University, Qingdao 266071, P R China)

Abstract: The theta(t)_type oscillatory singular integral operators has been discussed. With the non_negative Locally integrable weighted funciton, the weighted norm inequalityof theta(t)_type oscillatory singular integral operators is proved, and the weighted function has replaced by action of Hardy_Littlewood maximal operators several times.

Key words: theta(t)_type oscillatory singular integral; weighted norm inequality; Hardy_Littlewood maximal operator