

文章编号: 1000-0887(2002) 08_0778_05

幂律流体在分形介质中不定常椭圆渗流^{*}

宋付权¹, 刘慈群²

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 中国科学院 渗流流体力学研究所, 河北廊坊 065007)

(本刊编委刘慈群来稿)

摘要: 以椭圆渗流模型为基础, 得到了分形油藏中, 垂直裂缝井的幂律型非牛顿流体的定常渗流的压力分布公式和产量公式; 并用数值差分的方法研究了分形油藏中, 垂直裂缝井的不定常渗流, 分析了分形参数对不定常压力的影响; 同时从平均质量守恒方程出发, 得到了相应的不定常渗流的近似解析解。分析表明: 用椭圆渗流模型研究垂直裂缝井的渗流, 大大简化了渗流问题的复杂性。

关键词: 垂直裂缝井; 不定常渗流; 分形介质; 幂律流体
中图分类号: TE312 文献标识码: A

1 幂律流体在分形多孔介质中的渗流模型

文[1]研究了幂律流体在分形介质中径向不定常渗流, 得到了在 Laplace 空间解析解, 文[2]用发展的矩形思想, 研究椭圆形不定常渗流。椭圆渗流大大简化了垂直裂缝井的渗流模型。本文以椭圆渗流模型为基础, 分别用数值方法和近似解方法来研究在分形油藏中, 垂直裂缝井非牛顿流体渗流的压力动态。并分析各参数对油田生产的影响。

假定一油藏中心有一口垂直裂缝井, 沿 x 坐标方向垂直裂缝(简化为线源) 的长度为 $2L$, 当油井生产时, 在地层中形成等压椭圆柱面。椭圆柱剖面如图 1 所示。

直角坐标和椭圆坐标的关系为:

$$x = a \cos \eta, \quad y = b \sin \eta, \quad (1)$$

$$a = L \cosh(\xi), \quad b = L \sinh(\xi), \quad (2)$$

式中: x, y — 直角坐标, m; a, b — 椭圆的长半轴和短半轴, m; η, ξ — 椭圆坐标; L — 裂缝半长, m; $\sinh(\cdot)$ 和 $\cosh(\cdot)$ — 双曲正弦和双曲余弦函数。

椭圆柱的体积为:

$$V = \pi abh = \pi L^2 h \sinh(\xi) \cosh(\xi), \quad (3)$$

式中: V — 体积, m^3 ; h — 油层厚度, m。

假设 A 为 y 方向椭圆柱过流断面的面积, 可近似为:

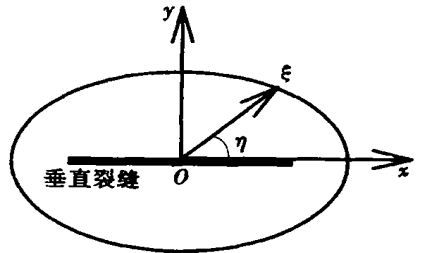


图 1 直角坐标和椭圆坐标的关系

* 收稿日期: 2001_06_12; 修订日期: 2002_03_22

作者简介: 宋付权(1970—), 男, 河南人, 副教授, 博士, 现从事工业与环境流体力学方面的研究(E-mail: fqsong@sina.com)

$$A = 4ah = 4Lh \cosh(\xi), \quad (4)$$

式中: A — 过流面积, m^2 。

平均短轴半径为:

$$y = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} y d\eta = \frac{2b}{\pi} = \frac{2L}{\pi} \sinh(\xi). \quad (5)$$

对于分形油藏, 孔隙度、渗透率和非牛顿流体的黏度的变化规律如下

$$\phi(\xi) = \phi_0 \exp(\theta_\phi \xi) \quad -1 \leq \theta_\phi \leq 1, \quad (6)$$

$$K(\xi) = K_0 \exp(\theta_k \xi) \quad -1 \leq \theta_k \leq 1, \quad (7)$$

$$\mu(\xi) = \mu_0 \exp(1-n)\xi \quad 0 \leq n \leq 2, \quad (8)$$

式中: ϕ — 孔隙度; K — 渗透率, m^2 ; μ — 粘度, $\text{Pa}\cdot\text{s}$; n — 幂率流体指数; θ_ϕ, θ_k — 孔隙度、渗透率分形系数。下标: 0 — 基准参数。

下面分别从近似解析和数值求解的角度分别对分形油藏中垂直裂缝井的定常渗流和不定常渗流进行分析。

2 非牛顿流体在分形油藏中的定常渗流

假定一分形介质油藏, 外边界为椭圆形定压边界, 中心有一口垂直裂缝井。油井定压工作, 当压力达到稳定时, 油井稳定生产。

渗流符合达西定律, 过流断面上渗流速度的形式为

$$v_y = \frac{K(\xi)}{\mu(\xi)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (9)$$

式中: v — 渗流速度, m/s 。

进一步可得稳态产量与压力梯度的关系式

$$\frac{QB}{4Lh \operatorname{ch}(\xi)} = \frac{K_0}{\mu_0} \frac{\pi}{2L \operatorname{ch}(\xi)} \exp[-(1-\beta_k)\xi] \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad (10)$$

式中: Q — 产量, m^3/s ; B — 原油体积系数; p — 压力, Pa ; $\beta_k = \theta_k + n$ 。

上式分别对 (ξ, p) 积分, 并无量纲化得稳态压力分布公式

$$p_D(\xi) = \frac{1}{1-\beta_k} \left\{ \exp[(1-\beta_k)\xi_e] - \exp[(1-\beta_k)\xi] \right\}, \quad (11)$$

式中: ξ_e — 外边界坐标; p_i — 外边界压力, Pa ; 无量纲压力定义为

$$p_D = \frac{2\pi K_0 h (p_i - p)}{\mu_0 B Q}.$$

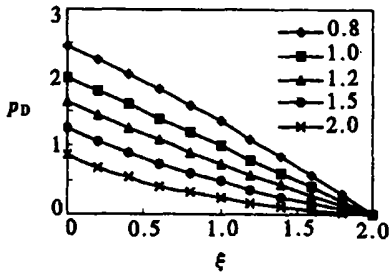
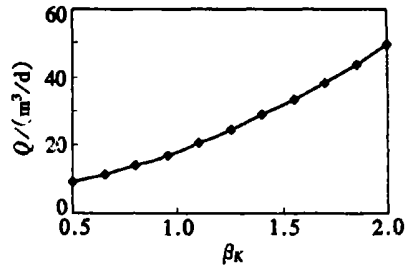
由方程(11)可知, 稳态渗流时, 压力、产量的变化与分形油藏的孔隙度变化无关。

由方程(11), 绘制了 β_k 影响的压力分布曲线, 如图 2 所示: β_k 越大, 即 θ_k 越大(当 $\theta_k < 0$ 时, $K < K_0$; $\theta_k > 0$ 时, $K > K_0$; $\theta_k = 0$ 时, $K = K_0$, 即为渗透率不随空间变化), 或 n 越大, 稳态压力越小。

当 $\xi = 0$ 时, 由压力分布公式可得稳态产量公式

$$Q = \frac{2(1-\beta_k)\pi K_0 h (p_i - p_w)}{\mu_0 B \left\{ \exp[(1-\beta_k)\xi_e] - 1 \right\}}. \quad (12)$$

用公式(12)可得 β_k 影响的稳态产量曲线, 如图 3 所示。所用油藏及油井参数如下: $\Delta p_w = p_i - p_w = 1 \text{ MPa}$, $h = 10 \text{ m}$, $L = 50 \text{ m}$, $a_i = 300 \text{ m}$ ($\xi_e = 2.48$), $B = 1.2$, $K = 0.5 \mu\text{m}^2$, $\mu = 0.005 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。图 3 表明: β_k 增大, 稳态产量增大。

图2 β_K 变化影响的稳态压力分布 ($\xi_e = 2$)图3 β_K 变化影响的稳态产量

3 非牛顿流体在分形油藏中不定常渗流的数值解

弱压缩液体椭圆形渗流的连续性方程的平均形式为

$$\phi C_t \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot v_y), \quad (13)$$

式中: x, y — 平均长半轴、短半轴, m

将式(1)~(4)和(6)代入式(13)中,并无量纲化,得椭圆形不定常渗流方程

$$\exp(\theta_\beta \xi) \frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{\text{ch}^2(\xi)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \exp[-(1-\beta_K)\xi] J \cdot p_D \right\}, \quad (14)$$

式中: t — 时间, s; 无量纲时间为

$$t_D = \frac{\pi^2}{4} \frac{K_0 t}{\phi_0 \mu_0 C L^2}$$

初始条件:

$$p_D(\xi, 0) = 0 \quad (15)$$

内边界条件:

$$\left. \frac{\partial p_D}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -1 \quad (16)$$

外边界条件:

$$p_D(\xi, t_D) |_{\xi=\infty} = 0 \quad (17)$$

用有限差分方法,对控制方程(14)~(17)进行数值差分,采用中心差分方法,

$$\exp(\theta_\beta \xi)_i \frac{p_{Di}^{n+1} - p_{Di}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\text{ch}^2(\xi)} \frac{y_{i-1} p_{D(i-1)}^{n+1} - 2y_i p_{Di}^{n+1} + y_{i+1} p_{D(i+1)}^{n+1}}{\Delta \xi^2} \quad (18)$$

进一步化简为:

$$y_{i-1} p_{D(i-1)}^{n+1} - (2y + \alpha)_i p_{Di}^{n+1} + y_{i+1} p_{D(i+1)}^{n+1} = \alpha_i p_{Di}^n \quad (19)$$

式中: i, n — 空间、时间结点

$$i = 0, \dots, I; n = 0, \dots, N;$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n; \Delta \xi = (\xi_{i+1} - \xi_{i-1})/2,$$

$$\alpha = \Delta \xi^2 \cdot \exp(\theta_\beta \xi) \text{ch}^2(\xi) / \Delta t; y = \exp[-(1-\beta_K)\xi] J \cdot$$

初始条件和边界条件的差分方程为:

$$p_{Di}^0 = 0, \quad (20)$$

$$p_{D0}^{n+1} - p_{D1}^{n+1} = \Delta \xi, \quad (21)$$

$$p_{DI}^{n+1} = 0 \quad (22)$$

用差分控制方程(19)~(22)可以计算垂直裂缝井的不定常压力。图4和5分别为 θ_ϕ 和 β_K 变化影响的垂直裂缝井的不定常压力曲线。 θ_ϕ 越大,或者 θ_K 越大,稳态压力越小。

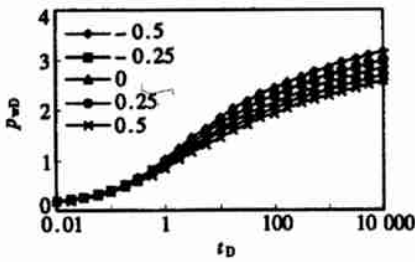


图4 θ_ϕ 变化影响的压力曲线 ($\beta_K = 1.2$)

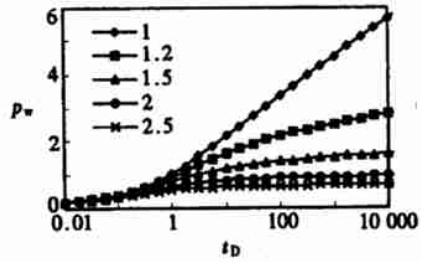


图5 β_K 变化影响的压力曲线 ($\theta_\phi = 0$)

4 不定常渗流近似解的讨论

椭圆渗流的平均质量守恒方程为

$$t_D = \frac{w}{2} \int_0^{\xi_R} p_D \exp(\theta_\phi \xi) \operatorname{ch}(2\xi) d\xi \tag{23}$$

式中: w — 权系数; ξ_R — 动态外边界。

令椭圆不定常的试探解为

$$p_D = \frac{1}{1 - \beta_K} \left\{ \exp[(1 - \beta_K) \xi_R] - \exp[(1 - \beta_K) \xi] \right\} \tag{24}$$

将(24)式代入(23)得

$$t_D = \frac{w}{4(1 - \beta_K)} \left\{ \frac{(1 - \beta_K) \exp[(3 + \theta_\phi - \beta_K) \xi_R]}{(\theta_\phi + 2)(3 + \theta_\phi - \beta_K)} + \frac{(1 - \beta_K) \exp[(\theta_\phi - 1 - \beta_K) \xi_R]}{(\theta_\phi - 2)(\theta_\phi - 1 - \beta_K)} - \frac{2\theta_\phi}{\theta_\phi^2 - 4} \exp[(1 - \beta_K) \xi_R] - \frac{2(\beta_K - 1 - \theta_\phi)}{(3 + \theta_\phi - \beta_K)(\theta_\phi - 1 - \beta_K)} \right\} \tag{25}$$

当 $\theta_\phi = 0$ 时, 简化为

$$t_D = \frac{w}{4} \left\{ \frac{\exp[(3 - \beta_K) \xi_R]}{2(3 - \beta_K)} + \frac{\exp[-(1 + \beta_K) \xi_R]}{2(1 + \beta_K)} - \frac{2}{(3 - \beta_K)(1 + \beta_K)} \right\} \tag{26}$$

$$p_D = \frac{1}{1 - \beta_K} \left\{ \exp[(1 - \beta_K) \xi_R] - \exp[(1 - \beta_K) \xi] \right\} \tag{27}$$

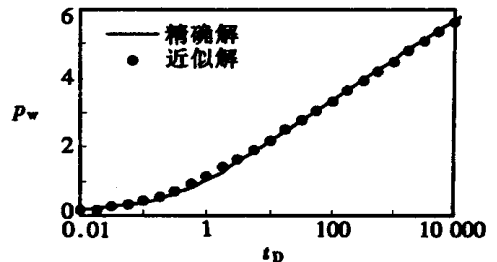
当 $\theta_\phi = \theta_K = 0$, 且 $n = 1$ 时, 简化为

$$t_D = \frac{w}{8} [\operatorname{ch}(2\xi_R) - 1] \tag{28}$$

$$p_D = \xi_R - \xi \tag{29}$$

方程(28)和(29)为常规油藏椭圆渗流的压力近似解^[3]。

用公式(24)和(25)可以计算垂直裂缝井井底不定常压力图, 如图6所示为近似解数值解的计算结果的对比图。当 $\beta_K = 1$, $\theta_\phi = 0$, $w = 1.2$ 时, 近似解和数值解符合得很好。同时研究表明, 在 $\beta_K > 1$ 时, 近似解和数值解出现一定的差



($\beta_K = 1, \theta_\phi = 0, w = 1.2$)

图6 近似解与精确解(数值解)的比较

异, 问题有待进一步的研究。

5 结 论

1. 以椭圆渗流模型为基础, 得到了分形油藏中, 垂直裂缝井幂律流体的定常渗流的压力分布公式和产量公式;
2. 以椭圆渗流模型为基础, 用数值差分 and 近似解方法研究了分形油藏中, 垂直裂缝井的不定常渗流, 并进行分析和对比;
3. 以计算表明了用椭圆渗流模型研究垂直裂缝井渗流的适用性。

[参 考 文 献]

- [1] 刘慈群. 分形油藏非牛顿流体渗流压力动态[J]. 试采技术, 1996, 17(1): 9—12.
- [2] 刘慈群. 单相和两相流体多维渗流问题[A]. 见: 周连第 编. 第十届全国水动力学学术会议论文集[C]. 北京: 海洋工业出版社, 1996, 439—445.
- [3] 宋付权, 刘慈群. 低渗透油藏中垂直裂缝井的不定常渗流[J]. 试采技术, 2000, 21(2): 1—4.
- [4] 刘慈群, 杨介. 垂直裂缝井的压力动态分析方法[J]. 试采技术, 1989, 10(试井特辑): 22—26.

The Transient Elliptic Flow of Power Law Fluid in Fractal Porous Media

SONG Fu_quan¹, LIU Ci_qun²

(1. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai
University, Shanghai 200072, P R China;

2. Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, Academia Sinica, Langfang,
Hebei 065007, P R China)

Abstract: The steady oil production and pressure distribution formulae of vertically fractured well for power law non-Newtonian fluid were derived on the basis of the elliptic flow model in fractal reservoirs. The corresponding transient flow in fractal reservoirs was studied by numerical differentiation method: the influence of fractal index to transient pressure of vertically fractured well was analyzed. Finally the approximate analytical solution of transient flow was given by average mass conservation law. The study shows that using elliptic flow method to analyze the flow of vertically fractured well is a simple method.

Key words: fractal media; vertically fractured well; transient flow; power law fluid