

文章编号: 1000_0887(2002) 08_0805_06

悬浮流中柱状粒子取向分布函数的数值模拟^{*}

林建忠, 张凌新

(浙江大学 力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

(本刊编委林建忠来稿)

摘要: 推导并数值模拟了悬浮流中柱状粒子取向的分布函数, 并将其用于楔形流场计算, 得到了取向分布函数与粒子方向角的关系。说明与短时间内形成的最可几角分布相比, 稳定状态的分布变化幅度不大, 主要变化在于右上区域的逆时针转动, 速度梯度值大的地方, 转动角度也越大; 粒子最可几方向接近于流线方向: 在流线方向上, 随着极径减小, 最可几角增大, 同时它与流线夹角减小。

关键词: 柱状粒子悬浮流; 楔形流; 取向分布函数; 最可几角; 数值模拟
中图分类号: O359 **文献标识码:** A

引 言

固态的柱状物包含在流体中运动的悬浮流, 涉及到多相流和非牛顿流理论研究中的一些难点问题, 在工程中具有广泛的应用, 例如在一些材料的加工处理中, 加入柱状物可以强化或改变原来材料的属性, 从而影响成品的质量。

流体与柱状物的相互作用会改变流体的性质, 而柱状物在流体的作用下, 也会不断地移动和转动, 正是柱状物在流体中的分布和取向决定了材料的特性。因此, 为了发挥柱状物的作用, 需要研究柱状悬浮流的运动特征以及柱状物的分布和取向, 为设计和控制生产进程、使成品的属性朝着期望的方向发展提供最佳条件。

关于柱状悬浮流的研究涉及到很多方面, 例如柱状体的受力分析、运动特征、取向分布等, 其中取向分布占有重要的地位。例如在短纤维增固的聚合物中, 纤维的取向决定了材料的结构特性, 若纤维整齐排列, 则在纤维轴线所指的方向上, 材料具有最大的强度和硬度, 在垂直于轴线的方向上则最弱。因此柱状体的取向成了研究的热点。Givler 等^[1,2]研究了平面流中柱状体取向的计算方法, 给出了流场中每一点上单个柱状体取向角的特性, 这种描述无法给出更切合实际的取向统计特征。Folgar 和 Tucker^[3]提出了更接近于复合材料情形的半浓悬浮流中柱状体的方向分布函数模型, 通过给出柱状体的概率密度分布来描述柱状体取向的统计特征, Jackson 等^[4]应用这一模型对一填模过程进行了模拟, 得到了与实验吻合较好的结果, 但这一模型只能描述当流场的速度梯度沿柱状体的长度是常量时的均匀流场。LIN Jian_zhong 等^[5]采

* 收稿日期: 2001_03_02; 修订日期: 2002_03_26

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(19925210)

作者简介: 林建忠(1958—), 男, 福建建阳人, 教授, 博士生导师;
张凌新(1978—), 江苏通州人, 博士生。

用忽略对流项的柱状体分布函数方程, 在楔形流场中逐点计算了分布函数, 该方法只使用于计算点较少的情形。因此, 本文在文献[4, 5]的基础上, 求解考虑对流项的分布函数方程, 并应用于对非均匀的楔形流场的模拟。

1 分布函数方程及计算

分布函数 $\varphi(r_c, P, t)$ 定义为时刻 t 、位置 r_c 处, 在方向 P 上存在粒子的可能性, 即概率。这样, 在 dP 范围内, 存在粒子的数目就可以简单地写为 $\varphi(r_c, P, t)dP$ 。可见, 分布函数既方便地描述了方向状态, 又直接同粒子的数目联系在了一起。

二维情况下, 即当所有的粒子在同一个平面中时, 分布函数有一 π 的周期:

$$\varphi(\phi) = \varphi(\phi + \pi). \quad (1)$$

函数也必须归一化, 为了后面计算的方便, 将函数在 π 的积分上归一化:

$$\int_0^\pi \varphi(\phi) d\phi = 1, \quad (2)$$

其中, ϕ 是柱状粒子轴线与流场对称轴线的夹角。

忽略对流项的分布函数控制方程由 Fokker-Planck 方程描述^[6]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \phi} (\dot{\varphi} \varphi).$$

利用 F-P 方程计算全流场的函数分布情况是困难的, 而且上述方程只适用于均匀流场。因此对于不均匀的楔形流场, 应当采用考虑对流项的方程:

$$\frac{D \varphi}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial \phi} (\dot{\varphi} \varphi), \quad (3)$$

式中, $\dot{\varphi}$ 是粒子角度 ϕ 和位置的函数, 对于单根粒子, 使用下面的方程式^[6]:

$$\dot{\varphi} = - \frac{C_i \triangleright \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \frac{\omega_{12}}{2} + \frac{\triangleright_{12}}{2} \cos 2\phi - \frac{1}{4} (\triangleright_{11} - \triangleright_{22}) \sin 2\phi, \quad (4)$$

其中 \triangleright_j 是应变率张量的分量, ω_{ij} 是涡状态张量, 它们表达为:

$$[\triangleright_j] = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{bmatrix},$$

C_i 是模拟粒子间相互作用的系数, \triangleright 是应变率张量的量纲尺度, 这里取为 $|\triangleright_{12}|$ 。极坐标下, 楔形流场中 $V_\theta = 0$, 利用式(4), 方程(3) 可写为:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_i \triangleright \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\varphi \left[\frac{\omega_{12}}{2} + \frac{\triangleright_{12}}{2} \cos 2\phi + \frac{1}{4} (\triangleright_{22} - \triangleright_{11}) \sin 2\phi \right] \right]. \quad (5)$$

分布函数既是柱状粒子方向角的函数, 又是位置和时间的函数。对方程(5) 差分可得到:

$$\frac{\varphi_{ijk}^{n+1} - \varphi_{jk}^n}{\Delta t} = - (V_r)_{j\bar{j}} \frac{\varphi_{i+1jk}^{n+1} - \varphi_{i-1jk}^{n+1}}{2\Delta r} - C_i \triangleright \frac{\varphi_{jk+1}^{n+1} - 2\varphi_{jk}^{n+1} + \varphi_{jk-1}^{n+1}}{(\Delta \phi)^2} - \varphi_{jk}^* \frac{\varphi_{ijk+1}^{n+1} - \varphi_{ijk-1}^{n+1}}{2\Delta \phi} - \varphi_{jk}^* \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial \phi} \right)_{jk}, \quad (6)$$

其中 n 是时间步, i 和 j 分别是极径和极角, k 对应于粒子方向角。 φ_{jk}^* 和 $(\partial \varphi^* / \partial \phi)_{jk}$ 的表达式为:

$$\dot{\phi}_{ijk}^* = \frac{(\omega_{12})_{ij}}{2} + \frac{(\nu_{12})_{ij}}{2} \cos 2\phi_k + \frac{1}{4} [(\nu_{22})_{j\bar{j}} - (\nu_{11})_{ij}] \sin 2\phi_k,$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\phi}^*}{\partial \phi} \right)_{j\bar{k}} = -(\nu_{12})_{j\bar{j}} \sin 2\phi_k + \frac{1}{2} [(\nu_{22})_{j\bar{j}} - (\nu_{11})_{ij}] \cos 2\phi_k.$$

2 楔形流场及计算

2.1 速度及速度梯度

流场为平面楔形流, 取两平板的延伸交点为坐标原点, 建立极坐标系如图 1 所示:

该流场是一原点的汇流, 并受角度为 $\pm \beta_0$ 的固壁所限制。由于 $u_\beta = 0$, 所以连续性方程和动量方程为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0,$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \beta^2} \right],$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \beta}.$$

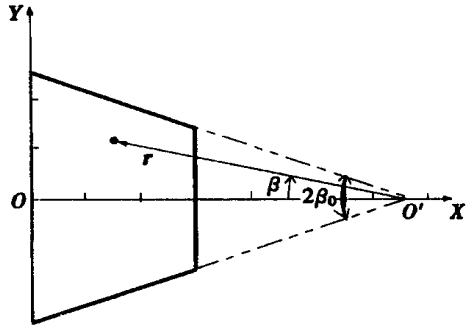


图 1 楔形流场

令 $Re = u_{max} r \beta_0 / \nu$, 经过无量纲化处理, 最终得到径向速度的表达式:

$$u_r = Re f(\eta) / (r \beta_0), \tag{7}$$

其中极角系数 $\eta = \beta / \beta_0$, 无量纲量 $f(\eta)$ 满足方程 $f'' + 2Re\beta_0 f f' + 4\beta_0^2 f' = 0$. 将极坐标下的 u_r 投影到直角坐标, 利用复合求导, 得到直角坐标系下速度的偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Re}{r^2 \beta_0} \left[f'(\eta) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\beta + \beta_0 f(\eta) \cos 2\beta \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Re}{r^2 \beta_0} [f'(\eta) \cos^2 \beta - \beta_0 f(\eta) \sin 2\beta], \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Re}{r^2 \beta_0} [f'(\eta) \sin^2 \beta + \beta_0 f(\eta) \sin 2\beta], \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \tag{8}$$

2.2 流场的特征及边值条件

选取的楔形流场长度为 0.05 m, 两平板之间的夹角为 $\pi/6$, 即 $\beta_0 = \pi/12$. 由于流场对称, 截取一半区域计算。由式(7), 速度大小与 r^{-1} 成正比, 并且随着 η 的增大而减小。计算式(8)知道, $\partial u / \partial y$ 是速度变形率张量中的主导量, 它的绝对值与 r^{-2} 成正比, 而且随着 η 的增大而增大。取 $Re = 380$, 图 2 和图 3 分别是流场速度矢量图和 $|\partial u / \partial y|$ 的等值线图。

分布函数是 4 个变量的函数, 其中由于极角方向没有速度, 所以只需要给出 3 个变量的边值条件。结合式(1)和式(2), 给定:

$$\varphi(r, \eta, \phi, t) |_{t=0} = 1/\pi,$$

$$\varphi(\phi + n\pi) |_{\phi=0} = 1/\pi.$$

另外在极坐标下, 考虑到计算的方便, 入口和出口的边界条件简化为:

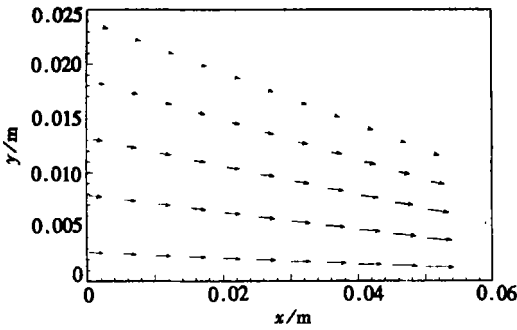


图2 速度矢量分布

$$r = r_{\max}, \quad \varphi = 1/\pi,$$

$$r = r_{\min}, \quad \partial\varphi/\partial r = 0$$

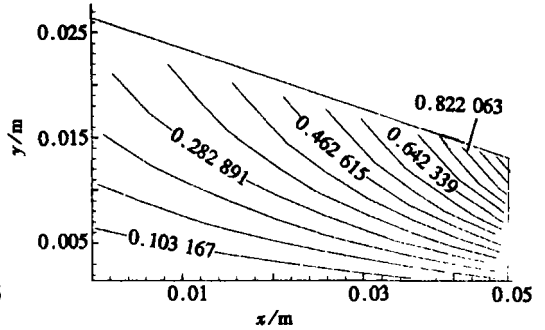


图3 $|\partial u/\partial y|$ 的等值线图

3 计算结果及讨论

3.1 分布函数

分布函数既是时间的函数, 又是空间的函数。随着时间的增长, 在 ϕ 上分布函数的曲线将会出现峰值, 而且峰值将越来越大, 峰值所对应的 ϕ 逐渐接近于流线方向。同一时刻, 不同位置上的分布函数曲线也有所区别。取 $C_i = 0.01$, 如图4所示, 当极角系数相同时, 随着极径的减小, 函数的峰值增大, 峰值所对应的角度也变大; 当极径相等时, 随着极角系数的增大, 函数的峰值增大, 但峰值所对应的角度减小。该结果与文[5]的结果吻合。

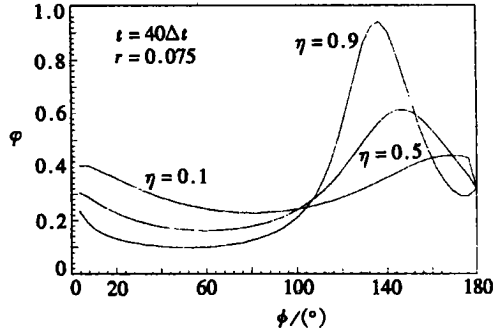
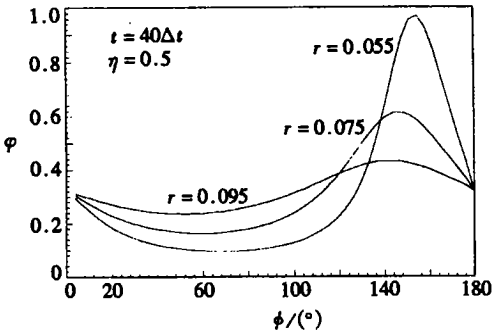


图4 分布函数在 ϕ 上的分布曲线比较

3.2 最可几角分布

函数峰值对应的 ϕ 值称为最可几角。分布函数是概率函数, 即用来反映柱状粒子取向的概率大小。峰值对应的方向角反映了柱状粒子最可能的取向, 所以是一个比较简洁的量。

柱状粒子的最可几角分布随着时间的发展而变化, 最终它将趋向于一个稳定的状态。取 $\Delta t = 0.015$ s, 图5是 $T = 2\Delta t$ 和 $T = 40\Delta t$ 时, 最可几角在全流场中分布的情况。可以看出: ①与 $T = 2\Delta t$ 的最可几角分布相比, $T = 40\Delta t$ 的分布变化幅度不大; ②柱状物的方向角随着极角系数的增大而减小, 比较接近所在位置的流线方向。

为了得到更多的信息, 计算时给出了部分过程。通过比较计算式(6)各项的数值大小, 发现右边第4项 $-\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2 k} (\partial \phi^* / \partial \phi)_{jk}$ 起到了重要作用。于是对 $(-\partial \phi^* / \partial \phi)$ 在 ϕ 上的分布曲线进行了分析, 给出了其最大值对应的 ϕ 角在全流场中的分布, 如图6所示。显然, 它的结果与短

时间内形成的最可几角分布比较吻合。另外,如果把图5中两幅图叠在一起,可以发现,在时间发展的过程中,区域左下角部分的角度分布变化不大,角度转动比较大的是区域右上角的部分,均为逆时针方向,如图7所示。这样的特征与图3所示的 $|\partial u/\partial y|$ 的等值线图非常一致,即梯度大的位置角度转动大,梯度小的位置角度转动小。以上两点的讨论有助于了解制约最可几角分布的各种因素。

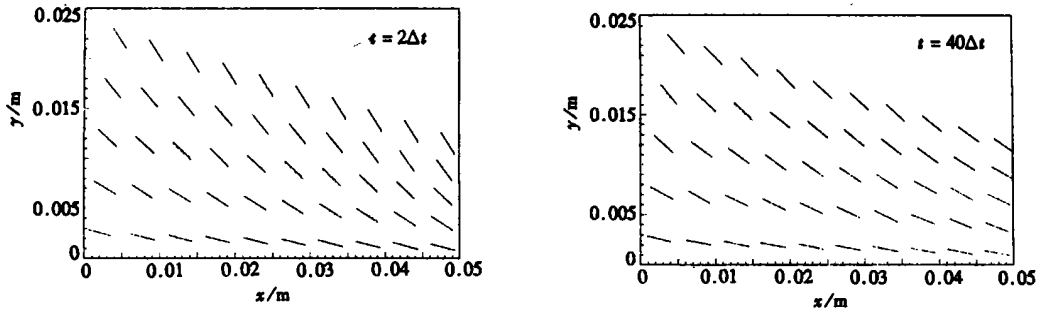


图5 时间步 $n = 2$ 和 $n = 40$ 时的最可几角分布图

最后,当分布达到了稳定状态时(考虑 $n = 40$),可以发现,极径相等时,最可几角随着极角系数的增大而变小;极角系数相等时,最可几角随着极径的减小而变大。

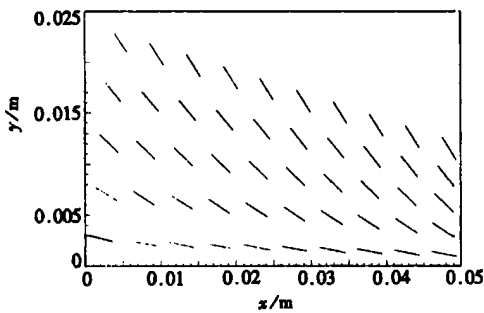


图6 $-\partial\phi^*/\partial\phi$ 最大值对应的取向角度在全流场的显示

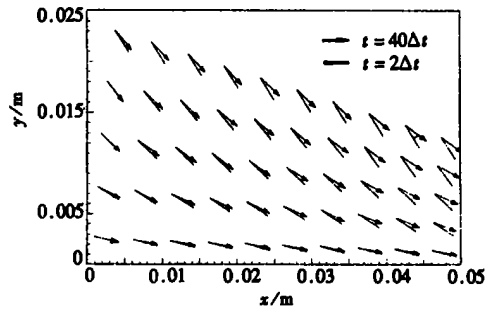


图7 计算结果图5中两幅图的叠加

4 结 论

本文数值模拟了楔形流场中悬浮柱状粒子取向的分布函数,给出了分布函数与粒子方向角的关系曲线和粒子最可几角在全流场的分布。

由于在应用中人们最关心的是流场中粒子的整体分布状态,本文重点放在最可几角的分布上,计算和分析说明:①与短时间内形成的最可几角分布相比,稳定状态的分布变化幅度不大,主要的变化在于右上区域的逆时针转动,速度梯度值越大,粒子转动的角度也越大;②粒子的最可几取向接近于流线方向,粒子最可几角度随着极角系数的增大而减小;③在流线方向上,随着极径的减小,最可几角增大,同时它与流线的夹角减小。

[参 考 文 献]

- [1] Givler R C, Crochet M J, Pipes R B. Numerical prediction for fiber orientation in dilute suspensions [J]. *J Compos Mat*, 1983, **17**: 330—343.
- [2] Givler R C. A numerical technique for the prediction of short fiber orientation resulting from the suspension flow[A]. In: Chen M M, Mazumdar J, Tucker C L Ed. *Transport Phenomena in Material Processing* [C]. New York: ASME, 1983, 99—103.
- [3] Folgar F P, Tucker C L. Orientation behavior of fibers in concentrated suspensions[J]. *J Reinf Plast Compos*, 1984, **3**: 98—119.
- [4] Jackson W C, Folgar F, Tucker C L. Prediction and control of fiber orientation in molded parts[A]. In: Han C D Ed. *Polymer Blends and Composites in Multiphase Systems* [C]. Washington: Adv Chem Ser, 1984, 279—181.
- [5] LIN Jian_zhong, ZHANG Ling_xin, WANG Ye_long. Research on the distribution function and orientation tensors of fiber suspensions in wedge_shaped flow field[J]. *J Hydrodynamics*, 2002, **14**(1): 23—29.
- [6] Jackson W C, Advani S G, Tucker C L. Prediction for the orientation of short fibers in thin compression molding[J]. *J Compos Materials*, 1986, **20**: 539—557.

Numerical Simulation of Orientation Distribution Function of Cylindrical Particle Suspensions

LIN Jian_zhong, ZHANG Ling_xin

(Department of Mechanics , State Key Laboratory of Fluid Power Transmission
and Control , Zhejiang University , Hangzhou 310027, P C China)

Abstract: The orientation distribution function of cylindrical particle suspensions was deduced and numerically simulated, and an application was taken in a wedge_shaped flow field. The relationship between the orientation distribution function and particle orientation angles was obtained. The results show that comparing with the most probable angle distribution which comes to being in short time, the distribution of the steady state doesn't vary much in range; the main difference is the anti_clockwise rotation in the right and upper field, that is, particles rotate more at the points where the velocity gradients are larger. The most probable orientations are close to the direction of local streamlines. In the direction of streamlines, with poleradius decreasing, the most probable angles increase, but the angles between their orientations and the local streamlines decrease.

Key words: cylindrical particle suspension; wedge_shaped flow; orientation distribution function; most probable angle; numerical simulation