应用数学和力学, 第 23 卷 第 7 期(2002 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0673_09

具有非局部边界的奇异摄动问题的数值解*

G. M. 艾米雷利耶弗, M. 扎克耳

(YY 大学 数学系, 土耳其 65080; E_mail: gamirali2000@yahoo.com)

(何吉欢推荐)

摘要: 研究了具有非局部边界的奇异摄动问题. 对于正的小摄动参数, 其解显示出边界层特性. 为了求解该问题, 构造了非等距网格上的指数型有限差分. 还给出了小参数时的一致收敛性分析, 同时给出了一个数值例子.

关 键 词: 指数型差分格式; 奇异摄动; 非局部边界条件

中图分类号: O175.1; O241.81 文献标识码: A

引 言

本文将应用有限差分法, 对下列具有非局部边界值的奇异摄动问题进行数值研究:

$$Lu \equiv -\varepsilon u'' + a(x)u = f(x) \qquad (0 < x < l), \tag{1}$$

$$L_0 u \equiv -\sqrt{\varepsilon}u'(0) + \gamma u(0) = \mu_0, \tag{2}$$

$$L_1 u \equiv u(l) - \delta u(d) = \mu_l \qquad (0 < d < l), \tag{3}$$

这里 ε 是正的小参数, $\gamma > 0$, δ, μ_0 和 μ_l 是给定的常数, $a(x) \geqslant \alpha > 0$ 和 $f(x)$ 是充分光滑的 x 的实函数, 这样保证对于所有小的 ε 均存在唯一解 $u(x)$. 当 ε 在零附近时, 该解在 $x = 0$ 和 $x = l$ 存在边界层(参考第 1 节).

奇异摄动微分方程(小参数 ε 出现在最高阶导数项上)在科学与工程中具有很多应用. 譬如, 高 Reynolds 数流体的 Navier_Stokes 方程[1,2], 液晶材料和化学反应的数学模型[3], 控制理论[4], 电子网络[2,5].

当 ε 很小时, 用传统的数值方法求解这类问题将带来很多困难[1,6,2,7,8]. 因此, 有必要发展一种适合这类方程的有效的数值方法. 有很多文献研究了当方程(1)是两点型边界条件时的情形, 如[1,6,2]. 文献[9,10]给出了当方程(1)具有非局部边界和第一类边界时的等距网格上的差分格式(关于非局部边界值问题及其应用可参考[11,12]). 最近 He[13~19]提出了一些新的摄动方法, 这些方法不仅适合于小参数, 而且当参数很大时也一致有效. 文献[17]给出了最新非线性分析方法的综述.

本文给出了方程(1)~(3)一致收敛的非等距网格的差分格式. 这里我们感兴趣的是: 构造这样一个格式, 使得该方法对所有的摄动参数都有效. 我们的方法是根据积分恒等式, 应用指数基函数和平方插值原理构造一差分格式[20~22]. 我们还建立最大误差估计, 并给出了

---

* 收稿日期: 2001_09_10;

注: 本文原稿为英文, 由何吉欢翻译.

一个例子•

本文将应用文献[23]的有关术语•

1 主要结果

这里先给出方程(1)~(3)的渐近估计, 为下面的数值分析奠定基础•

引理 1 设 $u(x)$ 是方程(1)~(3)的解, 并假设 $a, f \in C^1[0, l]$, 且

$$1-\delta u_1(d) \neq 0, \tag{4}$$

这里 $u_1(x)$ 是两点边值问题的解:

$$Lu_1 = 0 \quad (0 < x < l), \tag{5}$$

$$L_0 u_1 = 0,\ u_1(l) = 1 \text{•} \tag{6}$$

那么下面的估计成立:

$$\| u \|_{C[0, l]} \leqslant C, \tag{7}$$

$$| u'(x) | \leqslant C\left\{1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left[\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+\exp\left[\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{8}$$

这里 C 是一个与 ε 无关的正常数(在我们的数值讨论中, 也与网格大小无关)•

证明 设 $u(l) = \lambda$• 那么 $u(x)$ 可以表示为

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x), \tag{9}$$

这里 $u_0(x)$ 是下列两点边界问题的解:

$$Lu_0 = f(x) \quad (0 < x < l), \tag{10}$$

$$L_0 u_0 = \mu_0, \quad u_0(l) = 0 \text{•} \tag{11}$$

由方程(3)和(9), 我们得

$$\lambda = \frac{\mu_1 + \delta u_0(d)}{1-\delta u_1(d)} \text{•} \tag{12}$$

方程(5), (6) 和 (10), (11) 通常是具有第一类和第三类边界条件的两点边界值问题• 这里传统的最大原理是成立的(参考[24, 25]), 如果当 $v(x) \in C^2[0, l]$ 时 $Lv \geqslant 0$(在$[0, l]$ 上)和 $L_0 v \geqslant 0$, $v(l) \geqslant 0$ 成立, 那么对于所有的 $x \in [0, l]$ 有 $v(x) \geqslant 0$•

易知

$$\| u_0 \|_{C[0, l]} \leqslant \alpha^{-1} \| f \|_{C[0, l]} + \gamma^{-1} | \mu_0 |,$$

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{•}$$

应用最大原理, 方程(7)成立, 这是因为:

$$\| u \|_{C[0, l]} \leqslant \| u_0 \|_{C[0, l]} + | \lambda | \, \| u_1 \|_{C[0, l]} \text{•}$$

但方程(8)还未得到, 它可以由:

$$| u'(x) | \leqslant | u_0'(x) | + | \lambda | \, \| u_1'(x) \|$$

及以下著名的两点边界值问题[1, 6]得到

$$| u_0'(x) | \leqslant C\left\{1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\exp\left[\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+\exp\left[\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\right)\right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

$$| u_1'(x) | \leqslant C\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left[\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right] \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \text{•}$$

评注 1 (4)成立的充分条件是:

$$\delta < \frac{\gamma\sinh(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\alpha}\cosh(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon})}{\gamma\sinh(\sqrt{\alpha}d/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\alpha}\cosh(\sqrt{\alpha}d/\sqrt{\alpha})}, \tag{13}$$

$$\delta \leqslant 1. \tag{14}$$

事实上, 把最大原理应用于方程(5) 和(6), 可得

$$u_1(x) \leqslant w(x), \tag{15}$$

这里 $w(x)$ 是下列方程的解:

$$-\varepsilon w'' + \alpha w = 0 \quad (0 < x < l), \tag{16}$$

$$L_0 w = 0, \quad w(l) = 1. \tag{17}$$

方程 (16), (17) 的解可显式表示:

$$w(x) = \frac{\gamma\sinh(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\alpha}\cosh(\sqrt{\alpha}x/\sqrt{\varepsilon})}{\gamma\sinh(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon}) + \sqrt{\alpha}\cosh(\sqrt{\alpha}l/\sqrt{\varepsilon})}.$$

于是由上式方程和方程 (13), (15), 我们可得 (当 $\delta > 0$ 时):

$$1 - \delta u_1(d) \geqslant 1 - \delta w(d) > 0,$$

即条件(4) 在满足(13) 时才成立. 在条件(14) 下, 由于 $u_1(d) \leqslant w(d) < 1$, 我们同时可得

$$1 - \delta u_1(d) > 1 - \delta \geqslant 0.$$

2 通用差分格式

下面我们用 ω 表示在区间[0, l] 上的非均匀网格:

$$\omega = \left\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N_0} < x_{N_0+1} < \cdots < x_N = l, x_{N_0} = d\right\},$$

$$\bar{\omega} = \omega \cup \left\{x = 0, l\right\}.$$

在离散方程(1) 前, 我们先应用恒等式:

$$\eta_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \eta_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1), \tag{18}$$

这里

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \eta_i = (h_i + h_{i+1})/2.$$

基函数$\left\{\varphi_i(x)\right\}_{i=1}^{N-1}$ 具有以下形式:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \dfrac{\sinh(\nu_{i-1/2}(x - x_{i-1}))}{\sinh(\nu_{i-1/2}h_i)} & (x_{i-1} < x < x_i), \\ \varphi_i^{(2)}(x) = \dfrac{\sinh(\nu_{i+1/2}(x_{i+1} - x))}{\sinh(\nu_{i+1/2}h_{i+1})} & (x_i < x < x_{i+1}), \\ 0 \quad (x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

这里 $\nu_{i\pm1/2} = \sqrt{a_{i\pm1/2}/\varepsilon}$, $a_{i\pm1/2} = a((x_i + x_{i\pm1})/2)$.

注意到 $\varphi_i^{(1)}(x)$ 和 $\varphi_i^{(2)}(x)$ 分别是下列问题的解:

$$-\varepsilon\varphi'' + a_{i-1/2}\varphi = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad \varphi(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi(x_i) = 1, \tag{19}$$

$$-\varepsilon\varphi'' + a_{i+1/2}\varphi = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad \varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0. \tag{20}$$

经过分部积分及重新组合, 方程(18) 可写成:

$$\eta_i^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\varepsilon u'\varphi_i^{(1)'} + a_{i-1/2}u\varphi_i^{(1)}]\,\mathrm{d}x + \eta_i^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[\varepsilon u'\varphi_i^{(2)'} + a_{i+1/2}u\varphi_i^{(2)}]\,\mathrm{d}x = F_i - R_i$$

$$(i = 1, 2, \cdots, N-1), \tag{21}$$

这里

$$F_i = \eta_i^{-1} f_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x + \eta_i^{-1} f_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} R_i = {} & \eta_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a_{i-1/2}]\, u(x)\, \varphi_i^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x + \\ & \eta_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a(x) - a_{i+1/2}]\, u(x)\, \varphi_i^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x + \\ & \eta_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f_{i-1/2} - f(x)]\, \varphi_i^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x + \\ & \eta_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f_{i+1/2} - f(x)]\, \varphi_i^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x \cdot \end{aligned} \tag{23}$$

在权函数为 $\varphi_i^{(1)}(x)$ 和 $\varphi_i^{(2)}(x)$ 的区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ 内应用文献[22] 的公式 (2.1) 和 (2.2), 考虑到方程 (19) 和 (20), 我们得到下面精确的关系式:

$$\begin{aligned} & \eta_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u' \varphi_i^{(1)'} + a_{i-1/2} u \varphi_i^{(1)}]\,\mathrm{d}x + \eta_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varepsilon u' \varphi_i^{(2)'} + a_{i+1/2} u \varphi_i^{(2)}]\,\mathrm{d}x = \\ & \varepsilon \eta_i^{-1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-1} a_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)(x_i - x)\,\mathrm{d}x \right\} u_{\bar{x}, i} - \\ & \varepsilon \eta_i^{-1} \left\{ 1 - \varepsilon^{-1} a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)(x - x_i)\,\mathrm{d}x \right\} u_{x, i} + \\ & \left\{ \eta_i^{-1} a_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x + \eta_i^{-1} a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x \right\} u_i = \\ & \varepsilon \eta_i^{-1} \theta_i u_{\bar{x}, i} - \varepsilon \eta_i^{-1} \theta_{i+1} u_{x, i} + A_i u_i, \end{aligned} \tag{24}$$

这里

$$u_{\bar{x}, i} = (u_i - u_{i-1})/h_i \equiv (u(x_i) - u(x_{i-1}))/h_i,$$

$$u_{x, i} = (u_{i+1} - u_i)/h_{i+1},$$

$$\theta_i = 1 - \varepsilon^{-1} a_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)(x_i - x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} = {} & 1 - \varepsilon^{-1} a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)(x - x_i)\,\mathrm{d}x \equiv \\ & 1 - \varepsilon^{-1} a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{i+1}^{(1)}(x)(x_{i+1} - x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

$$A_i = \eta_i^{-1} a_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x + \eta_1^{-1} a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)\,\mathrm{d}x \cdot$$

通过简单的计算得:

$$\theta_i = \frac{h_i \nu_{i-1/2}}{\sinh(h_i \nu_{i-1/2})}, \tag{25}$$

$$A_i = \frac{a_{i-1/2}}{\eta \nu_{i-1/2}} \tanh\left(\frac{h_i \nu_{i-1/2}}{2}\right) + \frac{a_{i+1/2}}{\eta \nu_{i+1/2}} \tanh\left(\frac{h_{i+1} \nu_{i+1/2}}{2}\right), \tag{26}$$

$$F_i = \frac{f_{i-1/2}}{\eta \nu_{i-1/2}} \tanh\left(\frac{h_i \nu_{i-1/2}}{2}\right) + \frac{f_{i+1/2}}{\eta \nu_{i+1/2}} \tanh\left(\frac{h_{i+1} \nu_{i+1/2}}{2}\right) \cdot \tag{27}$$

应用(24), 由方程(21) 可得:

$$\lambda u_i \equiv - \varepsilon(\theta_i u_{\bar{x}})_{\hat{x}, i} + A_i u_i = F_i - R_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, N - 1), \tag{28}$$

这里我们引进了差分商:

$v_{\bar{x},i}=(v_{i+1}-v_i)/\eta_i$.

为了确定在边界条件(2)的情况下的近似解，我们先考虑下面的恒等式:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\chi\int_0^{x_1}Lu\varphi_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\chi\int_0^{x_1}f(x)\varphi_0(x)\,dx, \tag{29}$$

这里

$$\chi=\left\{1+\frac{a_0}{\gamma\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{x_1}\varphi_0(x)\,dx\right\}^{-1}=\left\{1+\gamma^{-1}\sqrt{a_0}\tanh\left(\frac{v_0h_1}{2}\right)\right\}^{-1}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{a_0}{\varepsilon}},\ a_0\equiv a(0), \tag{30}$$

其中

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\varphi_0^{(2)}(x)\equiv\dfrac{\sinh(v_0(x_1-x))}{\sinh(v_0h_1)} & (x_0<x<x_1),\\ 0 & (x\notin(x_0,x_1)).\end{cases}$$

注意到基函数 $\varphi_0(x)$ 是下列方程的解:

$$-\varepsilon\varphi''+a_0\varphi=0,\quad x_0<x<x_1,\quad \varphi(x_0)=1,\quad \varphi(x_1)=0.$$

类似于方程(28)的构造，对方程(29)作同样的处理，我们得

$$-\sqrt{\varepsilon}\theta_0u_{x,0}+\gamma u_0-\mu_0\chi=\theta_1f_0-r, \tag{31}$$

这里

$$\theta_0=\chi\left\{1-\varepsilon^{-1}a_0\int_0^{x_1}x\varphi_0(x)\,dx\right\}=\frac{v_0h_1}{\sinh(v_0h_1)+2\sqrt{a_0}\gamma^{-1}\sinh^2(v_0h_1/2)}, \tag{32}$$

$$\theta_1=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\chi\int_0^{x_1}\varphi_0(x)\,dx=\frac{\tanh(v_0h_1/2)}{\sqrt{a_0}+\gamma^{-1}a_0\tanh(v_0h_1/2)}, \tag{33}$$

$$r=\frac{\chi}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{x_1}[a(x)-a(0)]u(x)\varphi_0(x)\,dx+\frac{\chi}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{x_1}[f(0)-f(x)]\varphi_0(x)\,dx. \tag{34}$$

根据(28)和(31)，我们构造以下适合于方程(1)~(3)的差分格式:

$$\lambda y_i\equiv-\varepsilon(\theta_iy_x)_{\hat{x},i}+A_iy_i=F_i\qquad(i=1,2,\cdots,N-1), \tag{35}$$

$$\lambda_0y\equiv-\sqrt{\varepsilon}\theta_0y_{x,0}+\gamma y_0=\mu_0\chi+\theta_1f_0, \tag{36}$$

$$\lambda_1y\equiv y_N-\delta y_{N_0}=\mu_i, \tag{37}$$

这里 $\theta_i, A_i, F_i(i=1,2,\cdots,N-1)$, χ, θ_0, θ_1 由分别方程(25)~(27), (30), (32), (33)确定.

3 收敛性

我们先关注差分算子 λv_i, λ_0v 的一些性质(参考[1, 23])，这些性质将在下面得到应用:

1° (离散最大原理). 假设网格函数 v_i 满足 $\lambda v_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,N-1)$ 和 $\lambda_0v\geqslant0$, $v_N\geqslant0$, 那么对于所有的 $0\leqslant i\leqslant N$, 成立 $v_i\geqslant0$.

2° 设 v_i 为网格函数. 那么下面估算成立:

$$\|v\|_{C(\omega)}\leqslant\gamma^{-1}|\lambda_0v|+|v_N|+\left\|\frac{\lambda v}{A}\right\|_{C(\omega)}. \tag{38}$$

现在我们考虑差分方程(35)~(37)，定义 $z_i=y_i-u_i$，这里 y_i 是方程(35)~(37)的解，u_i 是在网格点 x_i 上方程(1)~(3)的解. 那么考虑到(28)和(31)，对于误差 z_i，我们可得

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda z_i = R_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1),\\&\Lambda_0 z = r,\\&z_N - \kappa z_{N_0} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

这里截断误差 R_i, r 分别由 (23) 和 (34) 确定•

很明显 z_i 能分解成:

$$z_i = z_i^{(0)} + \lambda z_i^{(1)}, \tag{40}$$

这里 $z_i^{(0)}$ 和 $z_i^{(1)} (i = 0, 1, \cdots, N)$ 分别是下列问题的解:

$$\Lambda z_i = R_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1), \qquad \Lambda_0 z = r, \qquad z_N = 0, \tag{41}$$

$$\Lambda z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N-1), \qquad \Lambda_0 z = 0, \qquad z_N = 1, \tag{42}$$

和

$$\lambda = \frac{\kappa z_{N_0}^{(0)}}{1 - \kappa z_{N_0}^{(1)}}• \tag{43}$$

这里我们假定

$$1 - \kappa z_{N_0}^{(1)} \neq 0• \tag{44}$$

定理 1　设和引理 1 具有相同的光滑性, 并满足条件 (44), 那么在任意非均匀网格上, 格式(35) ~ (37) 的误差满足

$$\| y - u \|_{C(\omega)} \leqslant Ch^*, \tag{45}$$

这里 $h^* = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i$•

证明　对于解(39), 我们有下面估算:

$$\| z \|_{C(\omega)} \leqslant C\left(| r | + \left\| \frac{R}{A} \right\|_{C(\omega)} \right), \tag{46}$$

由关系式(40), 我们得

$$\| z \|_{C(\omega)} \leqslant \| z^{(0)} \|_{C(\omega)} + | \lambda | \, \| z^{(1)} \|_{C(\omega)}• \tag{47}$$

为了估算 $\| z^{(0)} \|_{C(\omega)}$, 我们应用不等式(38), 由 (41) 得:

$$\| z^{(0)} \|_{C(\omega)} \leqslant \gamma^{-1} | r | + \left\| \frac{R}{A} \right\|_{C(\omega)}• \tag{48}$$

由于(43) 和 (44), 类似的估算也适合于对 λ•　最后, 由(42) 下列估算

$$\| z^{(1)} \|_{C(\omega)} \leqslant 1$$

可由(38) 直接得到•　把上面几项相加, 我们即可得(46)•

最后我们将说明由(23) 和(34) 定义的截断误差 R 和 r 满足下面的关系式:

$$\left\| \frac{R}{A} \right\|_{C(\omega)} \leqslant Ch^*, \tag{49}$$

和

$$| r | \leqslant Ch_1, \tag{50}$$

根据(23), 对于 R, 我们有:

$$\left| \frac{R_i}{A_i} \right| \leqslant \frac{\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a_{i-1/2}] u(x) \varphi_i^{(1)}(x) \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [a(x) - a_{i+1/2}] u(x) \varphi_i^{(2)}(x) \mathrm{d}x \right|}{a_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) \mathrm{d}x + a_{i+1/2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) \mathrm{d}x} +$$

$$\frac{\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f_{i-1/2}-f(x)]\varphi_i^{(1)}(x)\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f_{i+1/2}-f(x)]\varphi_i^{(2)}(x)\,dx\right|}{a_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)\,dx+a_{i+1/2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)\,dx}.$$

既然 $a,f\in C^1[0,l]$，和 $|u(x)|\leqslant C\ (0\leqslant x\leqslant l)$ 由 (7)，因此我们有

$$\left|\frac{R_i}{A_i}\right|\leqslant\frac{C\left(h_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)\,dx+h_{i+1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)\,dx\right)}{\alpha\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)\,dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)\,dx\right)}\leqslant C\alpha^{-1}h^*,$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1),$$

上式我们证明了(49)• 由(34)，对于误差 r，我们可得

$$|r|\leqslant\frac{C\chi}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{x_1}x\varphi_0(x)\,dx\leqslant Ch_1\theta_1=\frac{Ch_1\tanh(\nu_0h_1/2)}{\sqrt{a_0}(1+\gamma^{-1}\sqrt{a_0}\tanh(\nu_0h_1/2))}\leqslant\frac{C_1h_1}{\sqrt{a_0}}.$$

既然 $0\leqslant\tanh(x)\leqslant1\ (x\geqslant0)$，即一致估计 (50) 也满足•

根据估算(46) 和 (49)、(50)，定理得证•

评注 2 在(44) 的假设下，差分问题(35) ~ (37) 有唯一解•

评注 3 对于充分小的 h^*，假设(4) 等价于(44)•

事实上，考虑到构造(35) ~ (37) 的方法，应用离散最大原理，我们容易得到下面的结论:

$$u_1(x_i)-z_i^{(1)}=O(h^*)\quad(i=1,2,\cdots,N-1),$$

因此，如果 $1-\delta u_1(d)\neq0$，那么对于充分小的 h^* 有 $1-\delta z_{N_0}^{(1)}\neq0$• 反之也可得：当 h^* 充分小时，有 $1-\delta u_1(d)\neq0$，那么(44) 成立•

因此充分条件 (13) 和 (14) 可应用于各种情况•

4 数值结果

为了验证上述理论上的收敛分析，方程(1) ~ (3) 的近似解是通过在均匀网格上求解 (35) ~ (37) 得到的• 在下列问题上试用了我们的方法:

$$\varepsilon u''-u=\cos^2\pi x+2\varepsilon\pi^2\cos2\pi x\quad(0<x<1),$$

$$-\sqrt{\varepsilon}u'(0)+u(0)=0,\quad u(1)-\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}\right)=-1,$$

上述方程存在精确解:

$$u(x)=\frac{\exp\left(\frac{2x-1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)-2\exp\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}{4\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-2\exp\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-\cos^2\pi x,$$

表 1

h	$\varepsilon=1$	$\varepsilon=10^{-2}$	$\varepsilon=10^{-4}$	$\varepsilon=10^{-6}$	$\varepsilon=10^{-8}$
0.1	4.328×10^{-2}	1.616×10^{-1}	8.965×10^{-3}	1.074×10^{-2}	7.201×10^{-3}
0.05	1.066×10^{-2}	4.136×10^{-3}	4.438×10^{-3}	5.321×10^{-3}	3.508×10^{-3}

很显然 u 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 上存在典型的边界层•

格式的误差是通过离散最大模测定• 表 1 给出了第 22 步计算结果, 表明计算结果与我们的理论分析相吻合•

[参 考 文 献]

[1] Doolan E P, Miller J J H, Schilders W H A. Uniform Numerical Methods for Problems With Initial and Boundary Layers[M]. Dublin: Boole Press, 1980.

[2] Kadalbajoo M K, Reddy Y N. Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems: a Survey[J]. Appl Math Comput, 1989, **30**: 223—259.

[3] Weekman V W, Gorring R L. Influence of volume change on gas_phase reactions in porous catalysts [J]. J Catalysis, 1965, **4**: 260—270.

[4] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques[M]. New York: Wiley, 1993.

[5] O' Malley R E. Sigular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equation[M]. New York: Springer_Verlag, 1991.

[6] Farrell P A, Hegarty A F, Milier J J H, et al. Robust Computational Techniques for Boundary Layers[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.

[7] Miller J J H, O' Riordan E, Shishkin G I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems[M]. Singapore: World Scientific, 1996.

[8] Roos H G, Stynes M, Tobiska L. Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations: Convection_Diffusion and Flow Problems[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1996.

[9] Cziegis R. The numerical solution of singularly perturbed nonlocal problem[J]. Lietuvas Matem Rink, 1988, **28**: 144—152. (in Russian)

[10] Cziegis R. The difference schemes for problems with nonlocal conditions[J]. Informatica (Lietuva), 1991, **2**: 155—170.

[11] Bitsadze A B, Samarskii A A. Of some simple generalization the linear elliptic boundary value problems[J]. Soviet Math Dokl, 1969, **185**: 739—740. (in Russian)

[12] Nahushev A M. On nonlocal boundary value problems[J]. Differential Equations, 1985, **21**: 92—101. (in Russian)

[13] HE Ji_huan. Variational iteration method: a kind of nonlinear analytical technique: some examples [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1999, **34**(4): 699—708.

[14] HE Ji_huan. Homotopy perturbation technique[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, **178**: 257—262.

[15] HE Ji_huan. A new perturbation technique which is also valid for large parameters[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, **229**(5): 1257—1263.

[16] HE Ji_huan. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 2000, **35**(1): 37—43.

[17] HE Ji_huan. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques[J]. Int J Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 2000, **1**(1): 51—70.

[18] HE Ji_huan. A modified perturbation technique depending upon an artificial parameter[J]. Meccanica, 2000, **35**: 299—311.

[19] HE Ji_huan. Iteration perturbation method for strongly nonlinear oscillations[J]. Journal of Vibration & Control, 2001, **7**(5): 631—642.

[20] Amiraliyev G M. Difference method for the solution of one problem of the theory of dispersive waves

[J]. Differential Equations, 1990, **26**: 2146—2154. (in Russian)
[21] 艾米雷利耶弗 G M, 哈基杜柔. 奇异摄动初值问题的一致收敛有限差分法[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(4): 363—370.
[22] Amiraliyev G M, Mamedov Y D. Difference scheme on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo_parabolic equation[J]. Turkish J Math, 1995, **19**: 207—222.
[23] Samarskii A A. Theory of Difference Schemes[M]. 2nd Ed. Nauka: Moscow, 1983; German Transl. Leibzig: Geest Portig, 1984.
[24] Dorr F W, Parter S V, Shampine L F. Shampine, applications of the maximum principle to singular perturbation problems[J]. SIAM Rev, 1973, **15**: 43—88.
[25] Protter M H, Weinberger H F. Maximum Principles in Differential Equations[M]. Englewood Cliffs N J: Prentice_Hall, 1967.

Numerical Solution of the Singularly Perturbed Problem With Nonlocal Boundary Condition

G. M. Amiraliyev, Musa Çakır
(Department of Mathematics, Y Y University, 65080 Van, Turkey;
E_mail: gamirali2000@yahoo.com)

Abstract: Singularly perturbed boundary value problem with nonlocal conditions is examined. The appopriate solution exhibits boundary layer behavior for small positive values of the perturbative parameter. An exponentially fitted finite difference scheme on a non_equidistant mesh is constructed for solving this problem. The uniform convergence analysis in small parameter is given. Numerical example is provided, too.

Key words: exponentially fitted difference scheme; singular perturbation; nonlocal boundary condition