应用数学和力学, 第 23 卷 第 7 期(2002 年 7 月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0682_07

基于对偶混合变分形式的 Uzawa 型算法*

王光辉[1]，　王烈衡[2]

(1. 中科院声学研究所 声场声信息国家重点实验室, 北京 100080;
2. 中科院 计算数学与科学工程计算研究所, 科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100080)

(程昌钧推荐)

摘要:　基于弹性接触问题的三变量(应力, 位移, 接触边界位移) 对偶混合变分形式, 对混合有限元离散化的单边约束问题, 提出了一种 Uzawa 型算法• 首先证明了迭代算法的收敛性, 然后用数值例子验证了迭代算法的有效性•

关　键　词:　弹性接触问题;　单边约束问题;　对偶混合变分形式;　Raviart_Thomas 元;　Uzawa 算法
中图分类号:　O753　　　文献标识码:　A

引　　言

用混合有限元方法求解弹性力学问题, 其优点在于可同时求解位移, 应力等物理量• 对于弹性接触问题, 文献[1], [2]给出了一种新的对偶混合变分形式, 以及相应的混合有限元分析• 用这种混合变分模型能同时求出应力, 位移和接触边界位移• 本文基于这种混合变分模型的有限元离散形式, 对单边约束问题, 提出了一种 Uzawa 型算法• 文章首先从理论上导出了这种方法的具体迭代公式, 并给出了该迭代算法的收敛性证明• 然后, 用数值例子验证了该迭代算法的有效性•

1　单边约束问题[3]

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f & (\text{在 } \Omega \text{ 内}),\\
u = 0 \quad (\text{在 } \Gamma_D \text{ 上}), & \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = t \quad (\text{在 } \Gamma_F \text{ 上}),\\
u - g \geqslant 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \geqslant 0 & (\text{在 } \Gamma_C \text{ 上}),\\
\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(u - g) = 0 & (\text{在 } \Gamma_C \text{ 上})\bullet
\end{cases} \tag{1}
$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量• 文献[2] 给出了如下与(1) 等价的对偶混合变分形式及其相应的有限元离散形式•

求 $\sigma \in Q_t$, $u \in L^2(\Omega)$, $\lambda \in \Lambda$, 使得[2]

---

* 收稿日期:　2001_08_16;　修订日期:　2002_03_18
基金项目:　国家自然科学基金资助项目(19672064)
作者简介:　王光辉(1962—) , 男, 湖南益阳人, 副研究员, 博士(E_mail: wgh@ farad. ioa. ac. cn)

$$L(\sigma;v,\mu)\leqslant L(\sigma;u,\lambda)\leqslant L(\tau;u,\lambda),$$
$$(\forall\tau\in Q_0,v\in L^2(\Omega),\mu\in\Lambda),\tag{2}$$

这里 $L(\tau;v,\mu)=J_0(\tau)+(\operatorname{div}\tau,v)+\langle\tau_n,\mu\rangle_{\Gamma_C}$,

$$J_0(\tau)=\frac{1}{2}(\tau,\tau)-\langle\tau_n,g\rangle_{\Gamma_C}+(f,\operatorname{div}\tau+v),\ \tau=\therefore v,\quad \tau_n=\tau\cdot\boldsymbol{n},$$
$$Q_0=\{\tau\in H(\operatorname{div},\Omega)\mid\tau\cdot\boldsymbol{n}=0,\text{ 在 }\Gamma_F\text{ 上}\},$$
$$Q_t=\{\tau\in H(\operatorname{div},\Omega)\mid\tau\cdot\boldsymbol{n}=t\text{ 在 }\Gamma_F\text{ 上}\},$$
$$\Lambda=\{\mu\in H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)\mid\mu\leqslant 0,\text{ 在 }\Gamma_C\text{ 上}\},$$
$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)=\{\mu\in H^{1/2}(\Gamma_C)\mid\rho^{-1/2}\mu\in L^2(\Gamma_C)\}.$$

$H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ 的范数定义为: ${}_{00}\|\mu\|_{1/2,\Gamma_C}=\{\|\mu\|_{1/2,\Gamma_C}^2+\|d^{-1/2}\mu\|_{0,\Gamma_C}^2\}^{1/2}$, 其中 d 可取为 Γ_C 上的点到 Γ_C 端点之距离[4]、[5]、[6].

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是一个有界区域, 对 Ω 作三角形剖分, 问题(2) 的有限元离散形式为

求 $\sigma_h\in Q_t^h,u_h\in L_h^2,\lambda_h\in\Lambda_h$ 使得[2]

$$L(\sigma_h;v_h,\mu_h)\leqslant L(\sigma_h;u_h,\lambda_h)\leqslant L(\tau_h;u_h,\lambda_h)$$
$$(\forall\tau_h\in Q_0^h,v_h\in L_h^2,\mu_h\in\forall_h),\tag{3}$$

这里 $Q_0^h=Q_0\cap Q_h$, $Q_t^h=Q_t\cap Q_h$, $\Lambda_h=M_h\cap\Lambda$. 而 Q_h,L_h^2,M_h 分别是 $H(\operatorname{div},\Omega)$, $L^2(\Omega)$, $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ 的有限元子空间. Q_h 取Raviart_Thomas 不完全2 次多项式空间; L_h^2 取分片常数空间; M_h 取 $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ 上连续的分段线性函数子空间.

通常构造有限元子空间 Q_h 的一个重要的前提条件是使离散形式的B_B条件成立[7], 而满足该条件的关键在于定义一个从 $H(\operatorname{div},\Omega)\to\Omega_h$ 的插值算子 π_h 使

$$b(\tau-\pi_h\tau;v_h,\mu_h)=0\qquad(\forall v_h\in L_h^2,\mu_h\in\Lambda_h).\tag{4}$$
$$\|\pi_h\tau\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}\leqslant C\|\tau\|_{H(\operatorname{div},\Omega)}\qquad(\forall\tau\in H(\operatorname{div},\Omega)).\tag{5}$$

即对于 $\forall\pi_h\tau\in Q_h$ 有

$$\int_\Omega\operatorname{div}(\tau-\pi_h\tau)v_h\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_C}(\tau_n-\pi_h\tau_n)\mu_h\mathrm{d}s=0\qquad(\forall v_h\in L_h^2,\mu_h\in\Lambda_h).\tag{6}$$

可令

$$\int_\Omega\operatorname{div}(\tau-\pi_h\tau)v_h\mathrm{d}x=0\qquad(\forall v_h\in L_h^2),\tag{7}$$
$$\int_{\Gamma_C}(\tau_n-(\pi_h\tau)_n)\mu_h\mathrm{d}s=0\qquad(\forall\mu_h\in\Lambda_h).\tag{8}$$

由于 $(\pi_h\tau)_n$ 在 Γ_C 的每一个剖分单元上是线性函数, 从而可得 $\pi_h\tau_n\in L^2(\ \ c)$. 于是可进一步令

$$\int_e\operatorname{div}(\tau-\pi_h\tau)v_h\mathrm{d}x=0\qquad(\forall v_h\in P_0(e)),\tag{9}$$
$$\int_l(\tau_n-(\pi_h\tau)_n)\mu_h\mathrm{d}s=0\qquad(\forall\mu_h\in P_1(l)),\tag{10}$$

这里 e 为任一三角形单元, 它的三边用 e_i 表示 $(i=1,2,3)$. l 为对应于三角形剖分在 Γ_C 上的线段剖分单元. $P_k(s)$ 为限制在 s 上的 k 次多项式. 当 v_h 取分片线性函数, μ_h 取 Γ_C 上的连续分段线性函数时, 用分部积分(9) 变为

$$\int_{e_i}(\tau-\pi_h\tau)\cdot\boldsymbol{n}\cdot v_h\mathrm{d}s=0\qquad(\forall v_h\in P_0(e)).\tag{11}$$

方程(11)可确定 $\pi_h\tau$ 的6个自由度,(11)包括了(10). 而 RT_1 元有8个自由度,于是对于有一边在 Γ_C 上的三角形单元上的插值多项式,可作如下要求

$$\int_l |\tau_h\cdot \boldsymbol{n}|^2 \mathrm{d}s = \int_{e_l} |\tau_h|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\forall \tau_h \in Q_h, l \subset \Gamma_C), \tag{12}$$

其中 e_l 为 l 所在的三角形单元.

上述构造的有限元子空间 Q_h 中的元素显然满足(4)和(5),而且由(12)进一步有

$$\|\tau_{hn}\|_{0,\Gamma_C} \leqslant \|\tau_h\|_{0,\Omega} \leqslant \|\tau_h\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \qquad (\forall \tau_h \in Q_h), \tag{13}$$

2 优化算法及其收敛性分析

本节从理论上导出求解有限元离散问题(3)的 Uzawa 型算法.

命题 2.1 如果 $\{\sigma_h; u_h, \lambda_h\}$ 是(3)的鞍点,则有

i) $J_0(\sigma_h) + (\mathrm{div}\sigma_h, u_h) + \langle \sigma_{hn}, \lambda_h\rangle_{\Gamma_C}$

$\qquad \leqslant J_0(\tau_h) + (\mathrm{div}\tau_h, u_h) + \langle \tau_{hn}, \lambda_h\rangle_{\Gamma_C} \qquad (\forall \tau_h \in Q_0^h)$,

ii) $\langle \sigma_{hn}, \mu_h - \lambda_h\rangle_{\Gamma_C} + (\mathrm{div}\sigma_h + f, v_h - u_h) \leqslant 0 \qquad (\forall \mu_h \in \Lambda_h, v_h \in L_h^2)$

证明 应用(3)的两个不等式可直接推得结论.

命题 2.2 变分问题

$$(\mathrm{div}\sigma_h + f, v_h - u_h) + \langle \sigma_{hn}, \mu_h - \lambda_h\rangle_{\Gamma_C} \leqslant 0 \qquad (\forall \mu_h \in \Lambda_h, v_h \in L_h^2) \tag{14}$$

等价于

$$\mathrm{div}\sigma_h + f = 0, \qquad \lambda_h = P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h), \tag{15}$$

这里 P_Λ 为$L^2(\Gamma_C) \to \Lambda_h$ 上的投影算子, Λ_h 为$H^{1/2}(\Gamma_C)$ 的闭凸子集, $\rho > 0$.

证明 由(14)推得

$$(\mathrm{div}\sigma_h + f, u_h - v_h) + \langle \sigma_{hn}, \lambda_h - \mu_h\rangle_{\Gamma_C} \geqslant 0 \qquad (\forall \mu_h \in \Lambda_h, v_h \in L_h^2). \tag{16}$$

先在(16)两边乘以 ρ,然后再在两边加上$(u_h - v_h, u_h)$ 得

$$\begin{aligned}&(u_h - v_h, \rho(\mathrm{div}\sigma_h + f) + u_h) + \langle \lambda_h - \mu_h, \rho\sigma_{hn} + \lambda_h\rangle_{\Gamma_C} \geqslant \\ &\qquad (u_h - v_h, u_h) + \langle \lambda_h - \mu_h, \lambda_h\rangle_{\Gamma_C}\end{aligned} \tag{17}$$

应用 P_Λ 的定义, P_Λ 将$\rho\sigma_{hn} + \lambda_h$ 投影到 Λ_h,我们有

$$\begin{aligned}&(u_h - v_h, \rho(\mathrm{div}\sigma_h + f) + u_h) + (\lambda_h - \mu_h, P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h))_{0,\Gamma_C} \geqslant \\ &\qquad (u_h - v_h, u_h) + \langle \lambda_h - \mu_h, \lambda_h\rangle_{\Gamma_C},\end{aligned}$$

因此有

$$(u_h - v_h, \rho(\mathrm{div}\sigma_h + f)) + (\lambda_h - \mu_h, P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h) - \lambda_h)_{0,\Gamma_C} \geqslant 0. \tag{18}$$

由于 L_h^2, Λ_h 均为凸集,设$(0 < \alpha < 1)$

$$\begin{cases} v_h = (1 - \alpha)u_h + \alpha(\rho(\mathrm{div}\sigma_h + f) + u_h), \\ \mu_h = (1 - \alpha)\lambda_h + \alpha P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h). \end{cases} \tag{19}$$

将(19)代入(18)得

$$\begin{aligned}&\alpha(-\rho(\mathrm{div}\sigma_h + f), \rho(\mathrm{div}\sigma_h + f)) + \alpha(\lambda_h - P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h), \\ &\qquad P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h) - \lambda_h)_{0,\Gamma_C} \geqslant 0\end{aligned}$$

即有

$$\alpha\|\rho(\mathrm{div}\sigma_h + f)\|_{0,\Omega}^2 + \alpha\|\lambda_h - P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h)\|_{0,\Gamma_C}^2 \leqslant 0 \qquad (0 < \alpha < 1, \rho > 0),$$

于是得到

$$\operatorname{div}\sigma_h + f = 0, \quad \lambda_h = P_\Lambda(\rho\sigma_{hn} + \lambda_h) \qquad (\rho > 0).$$

由命题2.1~2.2,我们定义如下Uzawa型算法:

i) 已知 $u_h^n \in L_h^2$, $\lambda_h^n \in \Lambda_h$, 定义 $\sigma_h^n \in Q_t^h$ 使得

$$J_0(\sigma_h^n) + (\operatorname{div}\sigma_h^n, u_h^n) + \langle \sigma_{hn}^n, \lambda_h^n \rangle_{\Gamma_C} \leqslant J_0(\tau_h) + (\operatorname{div}\tau_h^n, u_h^n) + \langle \tau_{hn}^n, \lambda_h^n \rangle_{\Gamma_C} \qquad (\forall \tau_h \in Q_0^h). \tag{20}$$

ii) 用如下迭代方法求 u_h^{n+1} 和 λ_h^{n+1}

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \rho_n(\operatorname{div}\sigma_h^n + f), \tag{21}$$

$$\lambda_h^{n+1} = P_\Lambda(\rho_n\sigma_{hn}^n + \lambda_h^n), \tag{22}$$

这里 P_Λ 为 $L^2(\Gamma_C) \to \Lambda_h$ 的投影算子, $\rho_n > 0$ 被适当选取.

定义 2.1 设 Q_h 为(4)~(12)所构造的有限元子空间, $\Phi: Q_h \to L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_C)$ 具有如下形式: $\Phi(\tau) = \left\{\operatorname{div}\tau, \tau_n\right\}$, 且满足 $\Phi(\tau)(v, \mu) = (\operatorname{div}\tau, v) + \langle \tau_n, \mu \rangle_{\Gamma_C}$. 显然算子 Φ 是 Q_h 上的有界线性算子.

命题 2.3 算子 $\Phi: Q_h \to L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_C)$ 是Lipschitz连续的. 即: 存在常数 $c > 0$ 使得

$$\| \Phi(\tau_1) - \Phi(\tau_2) \|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_C)} \leqslant c \| \tau_1 - \tau_2 \|_{H(\mathrm{div},\,\Omega)} \qquad (\forall \tau_1, \tau_2 \in Q_h),$$

这里 $\| \cdot \|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma_C)}$ 表示乘积空间 $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_C)$ 的范数.

证明 由定义2.1及(13)即可推出该命题的结论.

定理 2.1 存在常数 α_0 与 α_1 且 $0 < \alpha_0 \leqslant \rho_n \leqslant \alpha_1$ 使得上述定义的Uzawa型算法在下述意义下是收敛的: $\sigma_h^n \to \sigma_h$ 依 $H(\mathrm{div}, \Omega)$ 的范数.

证明 设 $u_h^n - u_h = r_1^n$, $\lambda_h^n - \lambda_h = r_2^n$, 由 P_Λ 的压缩性及(20)~(22), 则

$$\begin{aligned}
&\| r_1^{n+1} \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^{n+1} \|_{0,\Gamma_C}^2 = \\
&\quad \| u_h^{n+1} - u_h \|_{0,\Omega}^2 + \| \lambda_h^{n+1} - \lambda_h \|_{0,\Gamma_C}^2 = \\
&\quad \| u_h^n + \rho_n(\operatorname{div}\sigma_h^n + f) - u_h - \rho_n(\operatorname{div}\sigma_n + f) \|_{0,\Omega}^2 + \\
&\quad \| P_\Lambda(\rho_n\sigma_{hn}^n + \lambda_h^n) - P_\Lambda(\rho_h\sigma_{hn} + \lambda_h) \|_{0,\Gamma_C}^2 \leqslant \\
&\quad \| r_1^n + \rho_n\operatorname{div}(\sigma_h^n - \sigma_h) \|_{0,\Omega}^2 + \| \rho_n(\sigma_{hn}^n - \sigma_{hn}) + (\lambda_h^n - \lambda_h) \|_{0,\Gamma_C}^2 = \\
&\quad \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + 2\rho_n(r_1^n, \operatorname{div}(\sigma_{hn}^n - \sigma_{hn})) + \rho_n^2 \| \operatorname{div}(\sigma_h^n - \sigma_h) \|_{0,\Omega}^2 + \\
&\quad \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2 + 2\rho_h(r_2^2, \sigma_{hn}^n - \sigma_{hn})_{0,\Gamma_C} + \rho_n^2 \| \sigma_{hn}^n - \sigma_{hn} \|_{0,\Omega}^2 = \\
&\quad \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2 + 2\rho\left\{(r_1^n, \operatorname{div}(\sigma_{hn}^n - \sigma_{hn})) + (r_2^n, (\sigma_{hn}^n - \sigma_{hn}))_{0,\Gamma_C}\right\} + \\
&\quad \rho^2(\| \operatorname{div}(\sigma_h^n - \sigma_h) \|_{0,\Omega}^2 + \| \sigma_{hn}^n - \sigma_{hn} \|_{0,\Gamma_C}^2).
\end{aligned} \tag{23}$$

应用命题2.3,及下述不等式

$$a(\sigma_h^n - \sigma_h, \sigma_h^n - \sigma_h) + (r_1^n, \operatorname{div}(\sigma_{hn}^n - \sigma_{hn})) + \langle r_2^n, \sigma_{hn}^n - \sigma_{hn} \rangle_{\Gamma_C} \leqslant 0$$

(23)式接下来是

$$\begin{aligned}
&\| r_1^{n+1} \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^{n+1} \|_{0,\Gamma_C}^2 \leqslant \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2 - \\
&\quad 2\rho_n a(\sigma_h^n - \sigma_h, \sigma_h^n - \sigma_h) + 2\rho_n^2 \| \sigma_h^n - \sigma_h \|_{H(\mathrm{div},\,\Omega)}^2 \leqslant \\
&\quad \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2 - (2\rho - 2\rho^2) \| \sigma_h^n - \sigma_h \|_{H(\mathrm{div},\,\Omega)}^2
\end{aligned}$$

设 $2\rho_n - 2\rho_n^2 \geqslant \beta > 0$, 选取

$$\alpha_0 = \frac{1-\sqrt{1-2\beta}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{1-2\beta}}{2},$$

使 $\rho_n \in [\alpha_0, \alpha_1]$． 于是可得

$$\| r_1^{n+1} \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^{n+1} \|_{0,\Gamma_C}^2 + \beta \| \sigma_h^n - \sigma_h \|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2 \leqslant \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2, \quad (24)$$

从(24)可推得: 序列 $n \to \| r_1^n \|_{0,\Omega}^2 + \| r_2^n \|_{0,\Gamma_C}^2$ 递减有极限, 故有 $\beta \| \sigma_h^n - \sigma_h \|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2 \to 0$． 于是证明了定理的结论．

定理 2.2　在定理 2.1 的条件下, 如果 $\alpha_0 < \rho_n < \alpha_1$(α_0, α_1 按定理 2.1 的要求选取), 那么对于 Uzawa 型算法(21) ~ (22) 所定义的序列 $\{u_h^n\}_n$, $\{\lambda_h^n\}_h$ 有如下结论

i) $\lim_{n\to\infty} \| u_h^{n+1} - u_h^n \|_{0,\Omega} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \| \lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n \|_{0,\Gamma_C} = 0$．

ii) $\{u_h^n, \lambda_h^n\}_n$ 在 $L_h^2 \times \Lambda_h$ 内弱收敛于 $\{u_h, \lambda_h\}$．

这里 $\{u_h, \lambda_h\}$ 使 $\{\sigma_h; u_h, \lambda_h\}$ 为 $L(\tau_h; v_h, \mu_h)$ 在 $Q_t^h \times (L_h^2 \times \Lambda_h)$ 上的鞍点．

证明　类似于文献[3] 定理 3.1(p591) 的证明．

3　数值例子

我们以如下例子来验证本文所定义的 Uzawa 型算法的有效性, 并将所得结果与文献[3] 中的结果进行了分析和比较．

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \\ u = 0 & (\text{在 } \Gamma_D \text{ 上}), \\ u \geqslant 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \geqslant 0 & (\text{在 } \Gamma_C \text{ 上}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} u = 0 & (\text{在 } \Gamma_C \text{ 上}), \end{cases}$$

这里 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\partial\Omega = \Gamma_C \cup \Gamma_D$, $\Gamma_C = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\} \cup \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\}$．

$$f(x) = \begin{cases} 10 & (\text{如果 } x \in [0, 1/2] \times [0, 1]), \\ -10 & (\text{如果 } x \in [1/2, 1] \times [0, 1]． \end{cases}$$

文献[3] 给出了 $u(x, y)$ 的等值线图及 $u(x, 0)$ 与 $u(x, 1/2)$ 的曲线图(如图 1)．

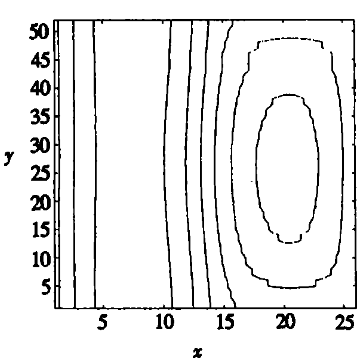

图 1(a)　$u(x, y)$ 的等值线图

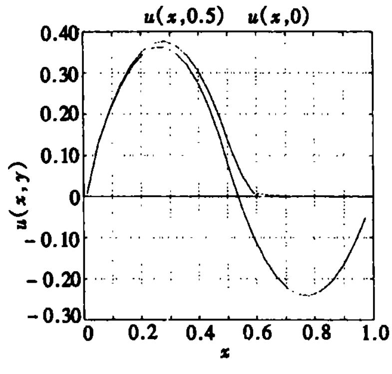

图 1(b)　$u(x, 1/2)$ 与 $u(x, 0)$ 的曲线图

基于离散的混合变分形式(3), 用 Uzawa 型算法(20) ~ (22) 所得的数值结果(如图 2, 图 3)•

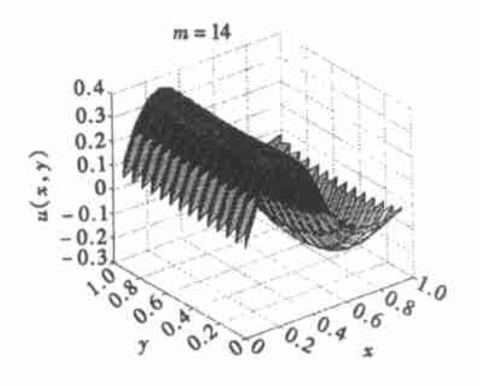

图 2(a)　$u_h(x, y)$ 的曲面图

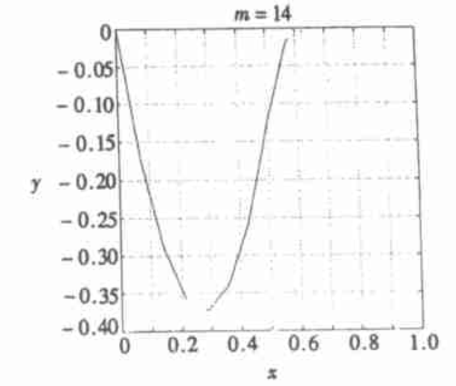

图 2(b)　$\lambda_h(x, 0)$ 的曲线图

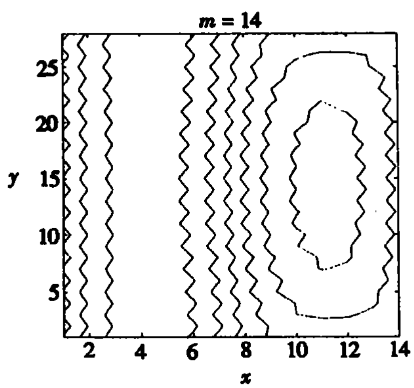

图 3(a)　$u_h(x, y)$ 的等值线图

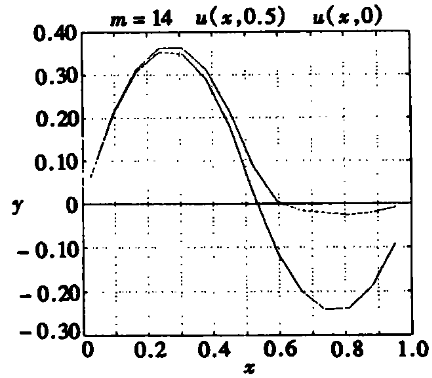

图 3(b)　$u_h(x, 1/2)$ 与 $u_h(x, 0)$ 的曲线图

图 1(b) 中上面的曲线表示 $u_h(x, 1/2)$, 下面的表示 $u_h(x, 0)$•　图 2(b) 中的曲线表示 $\lambda_h(x, 0)$, 其物理意义对应为弹性接触边界的位移•　图 3 与图 1 比较, 图 3(a) 等值线的波浪形状是因为网格用三角形剖分所致, 随着网格的加密波浪线起伏程度逐渐减小, 最后趋于光滑曲线•　当网格数为 14 × 14 时, 图 3 与图 1 相当吻合•　反应出 $u_h(x, y)$ 随 $h \to 0$, 而逐步逼近 $u(x, y)$•

[参 考 文 献]

[1]　王烈衡, 王光辉. 弹性接触问题的一种新的混合变分形式[J]. 计算数学, 1999, **21**(2): 237—244.

[2]　王烈衡, 王光辉. 弹性接触问题的对偶混合有限元分析[J]. 计算数学, 1999, **21**(4): 483—494.

[3]　Glowinski R, Lions J, Tremolieres R. Numerical Analysis of Variational Inequalities [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North_Holland, 1981.

[4]　Kikuchi N, Oden J T. Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods [M]. Siam Philadelphia, 1988.

[5]　Admas D A. Sobolev Space [M]. New York: Academic Press, 1975.

[6]　Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North Holland, 1978.

[7] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York: Springer_Verlag, 1991.

Uzawa Type Algorithm Based on Dual Mixed Variational Formulation

WANG Guang_hui[1], WANG Lie_heng[2]
(1. State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China;
2. State Key Laboratory of Scientific/Engineering Computing, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P R China)

Abstract: Based on the dual mixed variational formulation with three variants (stress, displace_ment, displacement on contact boundary) and the unilateral beaming problem of finite element discretization, an Uzawa type iterative algorithm is presented. The convergence of this iterative algorithm is proved, and then the efficiency of the algorithm is tested by a numerical example.

Key words: contact problem in elasticity; unilateral beaming problem; dual mixed variational formulation; Raviart_Thomas element; Uzawa algorithm