应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0697_10

定常的 Navier_Stokes 方程的非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法*

罗振东[1,2], 朱 江[2], 王会军[2]

(1. 首都师范大学 数学系,北京 100037;
2. 中国科学院 大气物理研究所 国际气候与环境科学研究中心,北京 100029)

(许政范推荐)

摘要: 给出定常的 Navier_Stokes 方程的一种非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法, 该方法是将余量形式的 Petrov 最小二乘方法与非线性 Galerkin 混合元结合起来, 使得速度和压力的混合元空间无需满足离散的 Babu^vka_Brezzi 稳定性条件, 从而使得它们的有限元空间可以任意选择• 并证明该方法的解的存在唯一性和收敛性•

关 键 词: Navier_Stokes 方程; 非线性 Galerkin 混合元法; Petrov 最小二乘法; 误差估计
中图分类号: O241.4 文献标识码: A

引 言

非线性 Galerkin 方法是一种求解具有耗散项的偏微分方程的近似解的多重水平方法• 该方法原先主要是由 Foias_Manley_Temam[1], Marion_Temam[2], Foias_Jolly_Kevrekidis_Titi[3], Devulder_Marion_Titi[4] 在 Fourier 普离散化时提出的• 关于非线性 Galerkin 方法的有限元逼近是 Marion_Temam[5] 和 Marion_Xu[6] 首先提出的• Ait Ou Ammi_Marion[7] 将非线性 Galerkin 方法应用于混合元法中, 用来处理非定常的 Navier_Stokes 问题• 李开泰等人[8] 又将此方法用于处理加罚的 Navier_Stokes 方程• 罗振东等[9~10] 中又将非线性 Galerkin 混合元法推广应用于非定常的热传导_对流问题的半离散和全离散化格式, 又提出了定常的 Navier_Stokes 非线性 Galerkin 混合元法及其后验估计•

对于解定常的 Navier_Stokes 方程的混合有限元法, 一个重要的收敛稳定性条件是有限元空间之间的组合必须满足 Babu^vka_Brezzi 不等式[11~12]• 为了摆脱这种约束, 所谓的 CBB 方法[13] 和稳定的有限元方法[14~17] 已经受 SD(或 SUPG) 方法[18~19] 的启发而产生• 非定常的 Navier_Stokes 方程的一种稳定的 SD 方法[20] 和带有余量的 Galerkin/ Petrov 最小二乘法[21~22] 也

* 收稿日期: 2000_09_08; 修订日期: 2002_03_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071052, 49776283); 北京市教委科技发展计划项目; 中国科学院“百人计划”项目; 中国科学院九五重点项目(K2952_51_434); 北京市优秀人才工程专项经费资助项目; 北京市自然科学基金资助项目
作者简介: 罗振东(1958—), 男, 汉族, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向: 有限元方法及其应用(E_mail: luozhd@mail.cnu.edu.cn).

由此产生•

本文的目的是将非线性 Galerkin 混合元法与 Galerkin/ Petrov 最小二乘法结合起来(我们称其为非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法) 应用于处理定常的 Navier_Stokes 方程• 本文的安排如下: 第 1 节重述定常的 Navier_Stokes 方程的通常的 Galerkin/ Petrov 最小二乘有限元法; 第 2 节给出非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法• 第 3 节导出关于剖分参数 h 和 H 的收敛性和误差估计• 我们的主要结果为:

$$\| u - u^h \|_{H^1(\Omega)} + h \| p - p^h \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C(h^l + h^{k+1} + H^{l+1} + H^{k+2}), \tag{1}$$

其中 (u, p) 是精确解, (u^h, p^h) 是非线性 Galerkin/ Patrov 最小二乘混合元解, l 和 $k \geqslant 1$ 是正整数•

1 通常的 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是边界为 $\partial\Omega$ 的有界凸区域• 考虑下面定常的 Navier_Stokes 方程:

问题 I 求 $u = (u_1, u_2), p$ 满足

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f & (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \\ \operatorname{div} u = 0 & (\text{在 } \Omega \text{ 中}), \\ u = 0 & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上}), \end{cases} \tag{2}$$

其中 u 表示速度向量, p 表示压力, $f = (f_1, f_2)$ 表示体力, ν 为 Reynolds 数的倒数, 是常数•

本文用到的 Sobolev 空间及其范数和内积是标准的• 为了引进变分形式, 引进记号 $X = H_0^1(\Omega)^2$, $M = L_0(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q \, \mathrm{d}x = 0 \right\}$ 且 $\bar{X} = X \times M$• 文中使用的 C 表示与网格参数 h 和 H 无关, 但可能与 Ω、Reynolds 和文中的其他参数有关的正的常数, 不同的出现可能不等•

问题 I 的变分形式可写为:

问题 I* 求 $\hat{u} = (u, p) \in \bar{X}$ 满足

$$a(u, v) + a_1(u; u, v) - b(p, v) + b(q, u) = (f, u) \quad \forall (v, q) \in \bar{X}, \tag{3}$$

其中

$$a(u, v) = \nu \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \quad b(q, v) = \int_\Omega q \operatorname{div} v \, \mathrm{d}x,$$

$$a_1(u; v, w) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \left[u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j - u_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} v_j \right] \mathrm{d}x \qquad (u, v, w \in X)•$$

对于 $a_1(\cdot; \cdot, \cdot)$, $(\forall u, v, w \in X)$, 有下列性质(参见[7~9, 11~12]):

$$\left.\begin{aligned} & a_1(u; v, w) = - a_1(u; w, v); \quad a(u; v, v) = 0; \\ & | a_1(u; v, w) | \leqslant C \| u \|_0^{1/2} | u |_1^{1/2} (| v |_1^{1/2} \| v \|_0^{1/2} | w |_1 + \\ & \qquad | v |_1 \| w \|_0^{1/2} | w |_1^{1/2}); \\ & | a_1(u; v, w) | \leqslant C | u |_1 (| v |_1 \| v \|_0 \| w \|_0 | w |_1)^{1/2} + \\ & \qquad C | v |_1 (\| u \|_0 | u |_1 \| w \|_0 | w |_1)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 C 是与 u、v 和 w 无关的常数• 定义

$$N = \sup_{u, v, w \in X} \frac{a_1(u; v, w)}{| u |_1 \cdot | v |_1 \cdot | w |_1}; \quad \| f \|_* = \sup_{v \in X} \frac{(f, v)}{| v |_1}• \tag{5}$$

从[11~12]我们有下面的结果•

定理 1.1 如果 $f \in H^{-1}(\Omega)^2$，那么问题 I* 至少存在一个解，如果又有 $\nu^2 N\|f\|_* < 1$，则解是唯一的·

令 $\{\mathscr{T}_h\}$ 为 Ω 的拟一致三角形剖分（参见[23～24]），其中下标的 $h = \max\limits_{K\in\mathscr{T}_h}\{h_K; h_K = \mathrm{diam}(K)\}$，即存在一个与 h 无关的常数 C 使得 $h \leqslant Ch_K,\ \forall K \in \mathscr{T}_h$·

分别引进 X 和 M 的有限元空间 X_h 和 M_h 如下：

$$X_h = \left\{v \in X; v|_K \in P_l(K)^2,\ \forall K \in \mathscr{T}_h\right\},$$
$$M_h = \left\{q \in M \cap H^1(\Omega); q|_K \in P_k(K),\ \forall K \in \mathscr{T}_h\right\},$$

其中 l 和 $k \geqslant 1$ 是整数，$P_m(K)$ 表示次数 $\leqslant m$ 的分片多项式空间· 记 $\hat{X}_h = X_h \times M_h$· 那么，[22] 中提出的 Galerkin/Petrov 最小二乘有限元格式为：

问题 $\mathbf{I}_h$ 求 $\hat{u}_h = (u_h, p_h) \in \hat{X}_h$ 满足

$$\begin{aligned}&a(u_h, v) + a_1(u_h; u_h, v) - b(p_h, v) + b(q, u_h) +\\&\quad\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(-\nu\Delta u_h + u_h\cdot\nabla u_h + \nabla p_h, -\nu\Delta v + u_h\cdot\nabla v + \nabla q)_K =\\&\quad(f, v) + \sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(f, -\nu\Delta v + u_h\cdot\nabla v + \nabla q)_K \qquad (\forall\hat{v} \in \hat{X}_h),\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\delta_K = \alpha h_K^2$，$\alpha > 0$ 是任意常数，$\hat{v} = (v, q)$·

从文献[22]可得出下面的结论·

定理 1.2 如果 $f \in L^2(\Omega)^2$ 且 $\nu^2 N\|f\|_* < 1$，那么存在一个常数 $h_0 > 0$ 使得对于所有的 $h \leqslant h_0$，问题 I_h 存在唯一的解 $\hat{u}_h = (u_h, p_h) \in \hat{X}_h$，并满足

$$\begin{aligned}&[\nu|u_h|_1^2 + \|\delta^{1/2}(-\nu\Delta u_h + u_h\cdot\nabla u_h + \nabla p_h)\|_{0,h}^2]^{1/2} \leqslant\\&\qquad[\nu^1\|f\|_*^2 + \|\delta^{1/2}f\|_0^2]^{1/2},\end{aligned}\tag{7}$$

$$|u - u_h|_s + h|p - p_h|_s \leqslant C(h^{l+1-s} + h^{k+2-s}) \qquad (s = 0, 1),\tag{8}$$

其中 $\|\cdot\|_{0,h}^2 = \sum\limits_{K\in\mathscr{T}_h}\|\cdot\|_{0,K}^2$、$\hat{u} = (u, p) \in [W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap H^{l+1}(\Omega)]^2 \times H^{k+1}(\Omega)$ 是问题 I 的精确解，而 C 是与 $\|u\|_{1,\infty}$、$|u|_{l+1}$ 和 $|p|_{k+1}$ 有关的常数·

2 非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元格式及解的存在性

设 h 和 $H\ (H \gg h > 0)$ 是两个趋于 0 参数· 考虑有限元空间 X_h、X_H、$X_H \subset X_h$ 和 M_h，前三个空间的关系如下

$$X_h = X_H + X_h^H, \quad X_H = R_H X_h, \quad X_h^H = (I - R_H)X_h,\tag{9}$$

其中 R_H 是从 X 到 X_H 的 Ritz 正交算子，即对于所有的 $v \in X$ 满足

$$(\nabla(v - R_H v), \nabla v_H) = 0 \qquad (\forall v_H \in X_H),\tag{10}$$

X_h 和 M_h 是对应于网格尺寸为 h 的细网格有限元空间，而 X_H 是对应于网格尺寸为 H 的粗网格有限元空间· 记

$$\hat{X}_H = X_H \times M_h; \quad \hat{X}_h^H = X_h^H \times M_h·$$

下面关于空间 X_H、X_h^H 和算子 R_H 的性质将是经常被使用，这些性质可由(10)和对偶原理导出（可参见[23～24]）·

引理 2.1 空间 X_H，X_h^H 和算子 R_H 满足，$\forall v \in H^l(\Omega)^2 \cap X$，

$$|v - R_H v|_s \leqslant CH^{l-s}|v|_l \qquad (s = 0, 1; s \leqslant l \leqslant m + 1);\tag{11}$$

$$|R_H v|_1 \leqslant |v|_1 \quad (\forall v \in X); \quad \|\chi\|_0 \leqslant CH|\chi|_1 \quad (\forall \chi \in X_h^H); \tag{12}$$

$$(\nabla\phi, \nabla\chi) = 0, \quad |\phi|_1^2 + |\chi|_1^2 = |\phi + \chi|_1^2 \quad (\forall \phi \in X_H; \chi \in X_h^H)\cdot \tag{13}$$

现在引入非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元格式:

问题 I^h 求 $u^h = u^H + w^h$ 使得 $u^h \in X_h, u^H \in X_H, w^h \in X_h^H$ 而且 $p^h \in M_h$ 满足

$$a(u^H, \phi) + a_1(u^H + w^h; u^H, \phi) + a_1(u^H; w^h, \phi) - b(p^h, \phi) + b(q, u^H) +$$
$$\sum_{K \in \mathscr{T}_h} \delta_K(-\nu\Delta u^h + u^H \cdot \nabla u^H + \nabla p^h, -\nu\Delta(\phi + \chi) + u^H \cdot \nabla\phi + \nabla q)_K =$$
$$\sum_{K \in \mathscr{T}_h} \delta_K(f, -\nu\Delta(\phi + \chi) + u^H \cdot \nabla\phi + \nabla q)_K + (f, \phi) \quad (\forall \phi \in X_H, q \in M_h); \tag{14}$$

$$a(w^h, \chi) + a_1(u^H; u^H, \chi) - b(p^h, \chi) + b(q, w^h) = (f, \chi) \quad (\forall \chi \in X_h^H, q \in M_h), \tag{15}$$

即求 $\hat{u}^H = (u^H, p^h) \in \mathscr{X}_H, \hat{w}^h = (w^h, p^h) \in \mathscr{X}_h^H$ 满足

$$B_\delta(u^H, u^H; \hat{u}^H, \hat{\phi}) + a_1(w^h; u^H, \phi) + a_1(u^H; w^h, \phi) =$$
$$L_\delta(u^H; \hat{\phi}), \ \forall \hat{\phi} = (\phi, q) \in \mathscr{X}_H; \tag{16}$$

$$B(u^H, u^H; \hat{w}^h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \hat{\chi} = (\chi, q) \in \mathscr{X}_h^H, \tag{17}$$

其中 $\delta_K = \alpha h_K^2$、$h_K = \mathrm{diam}(K), K \in \mathscr{T}_h$; $\delta|_K = \delta_K, K \in \mathscr{T}_h$, 而且 $B_\delta(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$、$B(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ 和 $L_\delta(\cdot; \cdot)$ 分别定义如下:

$$\forall u, u^H \in X_H, \hat{v} = (v, q), \hat{w} = (w, r) \in \mathscr{X}_H, \hat{\eta} = (\eta, r), \hat{\chi} = (\chi, q) \in \mathscr{X}_h^H,$$

$$\begin{cases} B_\delta(u, u^H; \hat{v}, \hat{w}) = a(v, w) + a_1(u; v, w) - b(q, w) + b(r, v) + \\ \qquad \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \delta_K(-\nu\Delta(v + \chi) + u \cdot \nabla v + \nabla q, -\nu\Delta(w + \eta) + u^H \cdot \nabla w + \nabla r)_K, \\ L_\delta(u^H; \hat{w}) = (f, w) + \sum_{K \in \mathscr{T}_h} \delta_K(f, -\nu\Delta(w + \eta) + u^H \cdot \nabla w + \nabla r)_K, \\ B(u, v; \hat{\chi}, \hat{\eta}) = a(\chi, \eta) + a_1(u; v, \eta) - b(q, \eta) + b(r, \chi)\cdot \end{cases} \tag{18}$$

用类似于[22]中的定理 3.2 和 3.3 的证明技巧可证得下一结果·

定理 2.2 如果 $f \in L^2(\Omega)^2$ 满足 $N\nu^{-2}\|f\|_* < 1$, 那么存在一个常数 H^* 使得对于所有的 $H \leqslant H^*$, 问题 I^h 存在唯一的解 $\hat{u}^h = (u^H + w^h, p^h) \in \mathscr{X}_h$ 满足:

$$[|u^h|_1^2 + \nu^{-1}\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta u^h + u^H \cdot \nabla u^H + \nabla p^h)\|_{0,h}^2]^{1/2} \leqslant R, \tag{19}$$

其中 $\|\cdot\|_{0,h} = (\sum_{K \in \mathscr{T}_h} \|\cdot\|_{0,K}^2)^{1/2}$、$R = \nu^{-1}\|f\|_* + \nu^{-1/2}\|\delta^{1/2} f\|_0\cdot$

3 非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元法的收敛性

本节将证明非线性 Galerkin/Petrov 最小二乘混合元法的收敛性, 并导出关于参数 H 和 h ($h \ll H$) 的误差估计·

定理 3.1 在定理 2.2 的条件下, 问题 I^h 的解序列 $\{\hat{u}^h\}$ ($H \gg h > 0$) 存在一个子列强收敛于问题 I 的解 $\hat{u}$, 即

$$\lim_{H \to 0^+} (|u - u^h|_1 + h|p - p^h|_1) = 0\cdot \tag{20}$$

证明 定理 2.2 表明问题 I^h 的解 $\{\hat{u}^h\}$ 关于 h 和 H 是一致有界, 即存在一个不依赖于 h、H 和 $\{\hat{u}^h\}$ 的常数 C 使得

$$(\nu|u^h|_1^2+\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K\|-\nu\Delta u^h+u^H\cdot\nabla u^H+\nabla p^h\|_{0,K}^2)^{1/2}\leqslant C\cdot \tag{21}$$

利用逆不等式可得

$$|u^h|_1+\|p^h\|_0\leqslant C, \tag{22}$$

这就意味着$\{\hat{u}^h\}$在$X\times M$中存在一个弱收敛的子列,不妨仍记为$\{\hat{u}^h\}$,并记其极限为$\hat{u}$,再用$\pi^h=(\pi^h,\pi_h)=(\pi_H+\pi_h^*,\pi_h):(X\cap H^2(\Omega)^2)\times(M\cap H^1(\Omega))\rightarrow(X_H+X_h^H)\times M_h$表示通常的$L^2$投影算子(参考[23~24])• 注意到,当$H\rightarrow 0$时,有$h\rightarrow 0$,$X_h^H\rightarrow\{(0,0)\}$,$w^h\rightarrow(0,0)$,从而在(16)和(17)中取$\hat{\phi}=\pi^h\hat{v}=(\pi_Hv+\pi_h^*v,\pi_hq)$可得

$$a(u,v)+a_1(u;u,v)-b(p,v)+b(q,u)=(f,v)+\lim_{H\rightarrow 0^+}F_H, \tag{23}$$

其中

$$F_H=\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H-\nabla p^h,$$
$$-\nu\Delta(\pi^hv)+u^H\cdot\nabla\pi_Hv+\nabla\pi_hq)_K\cdot \tag{24}$$

利用(21)、Cauchy 不等式、逆不等式和L^2投影的性质(参见[23~24])可有

$$|F_H|\leqslant\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K\|f\|_{0,K}\cdot\|-\nu\Delta\pi^hv+u^H\cdot\nabla\pi_Hv+\nabla\pi_hq\|_{0,K}+$$
$$\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K\|-\nu\Delta\pi^hv+u^H\cdot\nabla\pi_Hv+\nabla\pi_hq\|_{0,K}\times$$
$$\|\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H-\nabla p^h\|_{0,K}\leqslant C(f,\hat{v})H^{1/2}, \tag{25}$$

其中$C(f,\hat{v})$表示只依赖于f和$\hat{v}$而不依赖于H和h的常数,这就意味着$\lim\limits_{H\rightarrow 0^+}F_H=0$• 这样,由(23)可得

$$a(u,v)+a_1(u;u,v)-b(p,v)+b(q,u)=(f,v),$$
$$(\forall(v,q)\in(X\cap H^2(\Omega)^2)\times(M\cap H^1(\Omega)))\cdot \tag{26}$$

由于$(X\cap H^2(\Omega)^2)\times(M\cap H^1(\Omega))$是在$X\times M$中稠密的,从而得

$$a(u,v)+a_1(u;u,v)-b(p,v)+b(q,u)=(f,v)\qquad(\forall(v,q)\in X\times M), \tag{27}$$

即$\hat{u}=(u,p)$是问题(3)的一个弱解•

接下来证明(20)• 注意到,如果$f\in L^2(\Omega)^2$,那么问题(3)的解$\hat{u}=(u,p)\in(X\cap H^2(\Omega)^2)\times(M\cap H^1(\Omega))$而且满足$a(u,u)=(f,u)$• 由于

$$\nu|u^h-\pi^hu|_1^2+\|\delta^{1/2}\nabla(p^k-\pi_hp)\|_0^2=a(u^h,u^h)+\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(\nabla p^h,\nabla p^h)_K-$$
$$a(2u^h-\pi^hu,\pi^hu)-\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(\nabla(2p^h-\pi_hp),\nabla\pi_hp)_K, \tag{28}$$

从而在(16)~(17)中取$\phi=u^H$,$\chi=w^h$,$q=p^h$可得

$$a(u^h,u^h)=(f,u^h)+F_H^*, \tag{29}$$

其中

$$F_H^*=\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H-\nabla p^h,-\nu\Delta u^h+u^H\cdot\nabla u^H+\nabla p^h)_K=$$
$$-\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(\nabla p^h,\nabla p^h)_K+\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H,\nabla p^h)_K+$$
$$\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H-\nabla p^h,-\nu\Delta u^h+u^H\cdot\nabla u^H)_K\cdot$$

这样,可得

$$\nu|u^h-\pi^h u|_1^2+\|\delta^{1/2}\nabla(p^h-\pi_h p)\|_0^2=(f,u^h)-a(2u^h-\pi^h u,\pi^h u)+F_1^*,\qquad(30)$$

其中

$$F_1^*=-\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(\nabla(2p^h-\pi_h p),\nabla\pi_h p)_K+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H,\nabla p^h)_K+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(f+\nu\Delta u^h-u^H\cdot\nabla u^H-\nabla p^h,-\nu\Delta u^h+u^H\cdot\nabla u^H)_K.\qquad(31)$$

与估计 F_H 同理可得

$$|F_1^*|\leqslant CH^{1/2}.\qquad(32)$$

这样,可得

$$\lim_{H\to0^+}(|u-u^h|_1+h|p-p^h|_1)\leqslant\lim_{H\to0^+}(|u-\pi^h u|_1^2+h^2|p-\pi_h p|_1^2)^{1/2}+C\lim_{H\to0^+}(\nu|u^h-\pi^h u|_1^2+\|\delta^{1/2}\nabla(p^h-\pi_h p)\|_{0,h}^2)^{1/2}=[(f,u)-a(u,u)]^{1/2}=0.\qquad(33)$$

定理3.1证毕.

定理3.2 在定理2.2的条件下,如果问题(3)的精确解 $\hat{u}=(u,p)\in(H_0^1(\Omega)\cap H^{l+1}(\Omega))^2\times H^{k+1}(\Omega)$,那么存在一个正常数 h^* 使得对于 $h\ll H\leqslant h^*$ 都有

$$|u_h-u^h|_1+h|p_h-p^h|_1\leqslant C(h^l+h^{k+1}+H^{l+1}+H^{k+1}),\qquad(34)$$

其中 (u_h,p_h) 是问题 I_h 的解、(u^h,p^h) 是问题 I^h 的解、$l\geqslant1$ 和 $k\geqslant1$ 是两个整数.

证明 定理3.2的证明将分为下面两步完成:

a) 预备知识

对于问题 I_h 的解 u_h, 设

$$u_h=u_H+w_h\quad 满足\quad u_H=P_Hu_h,\quad w_h=(I-P_H)u_h,\qquad(35)$$

并记

$$e=u_H-u^H,\quad E=w_h-w^h,\quad \tau=p_h-p^h.\qquad(36)$$

引理3.3 在定理3.2的条件下,对于问题 I_h 的解 u_h,有 $w_h=(I-P_H)u_h$ 满足

$$\|w_h\|_0+H|w_h|_1\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2}).\qquad(37)$$

证明 将 w_h 分解为

$$w_h=(I-P_H)u_h=(I-P_H)u+(I-P_H)(u_h-u),\qquad(38)$$

则由定理1.2和引理2.1可得

$$\|w_h\|_0+H|w_h|_1\leqslant CH|w_h|_1\leqslant CH(|u-P_Hu|_1+|u-u_h|_1)\leqslant C[H^{l+1}+H(h^l+h^{k+1})]\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2}).$$

考虑按下面公式定义的离散Laplace算子 $A_h\in\mathcal{L}(X_h,X_h)$:

$$(A_hv,w)=a(v,w)\qquad(\forall v,w\in X_h).\qquad(39)$$

那么,对于问题 I_h 的解 u_h 和 $\forall v_h,w_h\in X_h$,有下列估计成立(参见[7,11~12]):

$$|a_1(v_h;u_h,w_h)|+|a_1(u_h;v_h,w_h)|\leqslant|u_h|_1^{1/2}\|A_hu_h\|_0^{1/2}\|v\|_0|w_h|_1,\qquad(40)$$

$$\|A_hu_h\|_0\leqslant C\|f\|_0.\qquad(41)$$

b) 定理3.2的证明

设 $\hat{e}=(e,\tau)$ 和 $\hat{E}=(E,\tau)$。 一方面,有

$$
\begin{aligned}
&B_\delta(u^H,u^H;\hat{e},\hat{e})+B(u^H,e;\hat{E},\hat{E})+a_1(u^H;E,e)=\\
&\quad\nu(|e|_1^2+|E|_1^2)+\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}^2,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

另一方面,由(18)、(13)和(2)~(3)有

$$
\begin{aligned}
&B_\delta(u^H,u^H;\hat{e},\hat{e})+B(u^H,e;\hat{E},\hat{E})+a_1(u^H;E,e)=\\
&\quad B_\delta(u^H,u^H;\hat{u}_H,\hat{e})-B_\delta(u^H,u^H;\hat{u}^H,\hat{e})+B(u^H,e;\hat{w}_h,\hat{E})-\\
&\quad B(u^H,e;\hat{w}^h,\hat{E})+a_1(u^H;E,e)=\\
&\quad a(u_H,e)+a_1(u^H;u_H,e)-b(p_h,e+E)+b(\tau,u_h)+a(w_h,E)+\\
&\quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(-\nu\Delta u_h+u^H\cdot\nabla u_H+\nabla p_h,-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)_K-\\
&\quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(f,-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)_K-(f,e)-(f,E)+\\
&\quad a_1(u^H;u^H,E)+a_1(u^H;E,e)+a_1(w^h;u^H,e)+a_1(u^H;w^h,e)=\\
&\quad [a(u_h-u,e+E)+b(p-p_h,e+E)+a_1(u_h-u;u,e+E)+\\
&\quad a_1(u_h;u_h-u,e+E)+b(\tau,u_h-u)]+[a_1(u^h;u^h,e)-a_1(w^h;w^h,e)+\\
&\quad a_1(u^H;u^H,E)-a_1(u_h;u_h,e+E)+a_1(u^H;E,e)]+\\
&\quad [\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(-\nu\Delta(u_h-u)+u^H\cdot\nabla(u_h-u)+\nabla(p_h-p),\\
&\quad -\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)_K-\\
&\quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K(u^H\cdot\nabla w_h,-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)_K+\\
&\quad \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\delta_K((u-u_h+e+w_h)\cdot\nabla u,-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)_K]\equiv\\
&\quad I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

由定理1.1~1.2、2.2,以及逆不等式有

$$
\begin{aligned}
&|b(\tau,u_h-u)|=|\sum_{K\in\mathcal{T}_h}[(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e,u_h-u)_K-\\
&\quad(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau,u_h-u)_K]|\leqslant\\
&\quad C(h^l+h^{k+1})[|e|_1+\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}].
\end{aligned}
$$

因此,有

$$
\begin{aligned}
&|I_1|=|a(u_h-u,e+E)+b(p-p_h,e+E)+a_1(u_h-u;u,e+E)+\\
&\quad a_1(u_h;u_h-u,e+E)+b(\tau,u_h-u)|\leqslant\\
&\quad C(h^l+h^{k+1})[\nu|e+E|_1^2+\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}^2]^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

再由引理3.3、逆不等式和 Sobolev 嵌入定理有

$$
\begin{aligned}
&|I_3|\leqslant C(h^l+h^{k+1}+H^{l+1}+H^{k+2}+H^{1/2}|e|_1)\times\\
&\quad\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

利用 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的性质(4)有

$$
\begin{aligned}
&a_1(u^h;u^h,e)-a_1(w^h;w^h,e)+a_1(u^H;u^H,E)-a_1(u_h;u_h,e+E)=\\
&\quad a_1(u_h;w_h,E)+a_1(e+E;u_h,e)+a_1(e+w_h;u_h,E)-
\end{aligned}
$$

$$a_1(e;w_h,E)-a_1(E;w_h,e)-a_1(w_h;w_h,E)+a_1(w_h;w_h,e)\cdot \tag{46}$$

由(40)～(41)以及引理2.1、3.3和定理1.2有

$$|a_1(u_h;w_h,E)|\leqslant C|u_h|_1^{1/2}\|A_hu_h\|_0^{1/2}\|w_h\|_0|E|_1\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2})|E|_1, \tag{47}$$

$$|a_1(e;u_h,e)|\leqslant NR|e|_1^2, \tag{48}$$

$$|a_1(E;u_h,e)|\leqslant C|u_h|_1^{1/2}\|A_hu_h\|_0^{1/2}\|E\|_0|e|_1\leqslant CH(|E|_1^2+|e|_1^2), \tag{49}$$

$$|a_1(e;u_h,E)|\leqslant CH(|E|_1^2+|e|_1^2), \tag{50}$$

$$|a_1(w_h;u_h,E)|\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2})|E|_1\cdot \tag{51}$$

其次,再利用(4),只要 $l\geqslant 1$ 和 $k\geqslant 0$,可得

$$|a_1(e;w_h,E)|\leqslant C[|e|_1(|w_h|_1\|w_h\|_0\|E\|_0|E|_1]^{1/2}+$$
$$|w_h|_1(\|e\|_0|e|_1\|E\|_0|E|_1)^{1/2}]\leqslant CH(|E|_1^2+|e|_1^2), \tag{52}$$

$$|a_1(E;w_h,e)|\leqslant CH(|E|_1^2+|e|_1^2), \tag{53}$$

$$|a_1(w_h;w_h,E)|\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2})|E|_1, \tag{54}$$

$$|a_1(w_h;w_h,e)|\leqslant C(H^{l+1}+H^{k+2})|e|_1\cdot \tag{55}$$

类似地,有

$$|a_1(u^H;E,e)|\leqslant CH^{1/2}(|e|_1^2+|E|_1^2)\cdot \tag{56}$$

由(46)～(56)可得

$$|I_2|\leqslant(N\nu^{-1}\|f\|_*+CH^{1/2})(|E|_1^2+|e|_1^2)+$$
$$C(H^{l+1}+H^{k+2})(|E|_1^2+|e|_1^2)^{1/2}\cdot \tag{57}$$

结合(42)～(45)、(57)可得

$$\nu(|E|_1^2+|e|_1^2)(1-N\nu^{-2}\|f\|_*-CH^{1/2})+$$
$$\frac{1}{2}\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}^2\leqslant$$
$$C(h^l+h^{k+1}+H^{l+1}+H^{k+2})[\nu(|E|_1^2+|e|_1^2)+$$
$$\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}^2]^{1/2}\cdot \tag{58}$$

由于 $N\nu^{2}\|f\|_*<1$,因此存在一个常数 $\omega\in(0,1)$ 使得 $N\nu^{2}\|f\|_*\leqslant\omega<1\cdot$ 取 $h^*=[(1-\omega)/(2C)]^2$(其中 C 是(58)的左边所给定的)使得对于所有的 $H\leqslant h^*$ 都有

$$[\nu(|E|_1^2+|e|_1^2)+\|\delta^{1/2}(-\nu\Delta(e+E)+u^H\cdot\nabla e+\nabla\tau)\|_{0,h}^2]^{1/2}\leqslant$$
$$C(h^l+h^{k+1}+H^{l+1}+H^{k+2}), \tag{59}$$

利用逆不等式,由上述即得(34)• 定理3.2证毕•

结合定理1.2和定理3.2即得下面的结论•

推论3.4 在定理3.2的条件下,下面的估计成立:

$$|u-u^h|_1+h|p-p^h|_1\leqslant C(h^l+h^{k+1}+H^{l+1}+H^{k+2})\cdot \tag{60}$$

结论 若取 $H=O(\min\{h^{l/(l+1)},h^{(k+1)/(k+2)}\})$,则非线性Galerkin/Petrov最小二乘混合元解与[22]中的Petrov最小二乘混合元解具有同阶的精度;反之,如果取 $h=O(\min\{H^{(l+1)/l};H^{(k+2)/(k+1)}\})$,则非线性Galerkin/Petrov最小二乘混合元法相对于网格尺寸 H 具有超收敛• 而(16)的左边的 $a_1(w^h;u^H,\Phi)$、$a_1(u^H;w^h,\Phi)$、$B_\delta(u^H,u^H;\hat{u}^H,\hat{\Phi})$,以及(16)的右边的 $L_\delta(u^H;\hat{\Phi})$ 包含高阶因子 w^h 或 χ,在实际计算中可以省略• 因此,非线性Galerkin/Petrov最小二乘混合元法只需在粗网格空间 X_H 中解与[22]中的Petrov最小二乘混合

元法相同形式的非线性方程组而在 $X_h \setminus X_H$ 空间解具有很少方程的线性方程组就能得到与[22] 中的 Petrov 最小二乘混合元法同样精度的近似解, 因此, 利用非线性 Galerkin/ Petrov 最小二乘混合元法比利用一般的 Petrov 最小二乘混合元法更简便•

[参 考 文 献]

[1] Foias C, Manley O P, Temam R. Modelization of the interaction of small and large eddies in two dimensional turbulent flows[J]. Math Mod Numer Anal, 1988, **22**(2): 93—114.

[2] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, **2**(5): 1139—1157.

[3] Foias C, Jolly M, Kevrekidis I G, et al. Dissipativity of numerical schemes[J]. Nonlinearity, 1991, **4**(4): 591—613.

[4] Devulder C, Marion M, Titi E. On the rate of convergence of nonlinear Galerkin methods[J]. Math Comp, 1992, **59**(200): 173—201.

[5] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods: the finite element case[J]. Numer Math, 1990, **57**(3): 205—226.

[6] Marion M, Xu J C. Error estimates on a new nonlinear Galerkin method based on two_grid finite elements[J]. SIAM J Numer Anal, 1995, **32**(4): 1170—1184.

[7] Ait Ou Ammi A, Marion M. Nonlinear Galerkin methods and mixed finite elements: two_grid algorithms for the Navier_Stokes equations[J]. Numer Math, 1994, **68**(2): 189—213.

[8] LI Kai_tai, Zhou L. Finite element nonlinear Galerkin methods for penalty Navier_Stokes equations [J]. Math Numer Sinica, 1995, **17**(4): 360—380.

[9] LUO Zhen_dong, Wang L H. Nonlinear Galerkin mixed element methods for the non stationary conduction_convection problems (Ⅰ): The continuous_time case [J]. Mathematica Numerica Sinica, 1998, **20**(3): 283—304.

[10] LUO Zhen_dong, Wang L H. Nonlinear Galerkin mixed element methods for the non stationary conduction_convection problems (Ⅱ): The backward one_step Euler fully discrete format [J]. Mathematica Numerica Sinica, 1998, **20**(4): 90—108.

[11] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier_Stokes Equations: Theorem and Algorithms[M]. New York: Springer_Verlag, 1986.

[12] Temam R. Navier_Stokes Equations[M]. New York, Amsterdam: North_Holland, 1984.

[13] France L P, Hughes T J. Two classes of mixed finite element methods[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1988, **69**(1): 89—129.

[14] Hughes T J, France L P, Balestra M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics (Ⅴ): Circumventing the Bubu》ka_Brezzi condition: A stable Petrov_Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal_order interpolation[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1986, (1): 85—99.

[15] Hughes T J, France L P. A new finite element formulation for computations fluid dynamics (Ⅶ): The Stokes problem with various well posed boundary conditions, symmetric formulations that converge for all velocity pressure space[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1987, **65**(1): 85—96.

[16] Brezzi F, Douglas Jr J. Stabilized mixed method for the Stokes problem[J]. Numer Math, 1988, **53**(2): 225—235.

[17] Douglas Jr J, Wang J P. An absolutely stability finite element method for the stokes problem[J].

Math Comp, 1989, **52**(186): 495—508.

[18] Houghes T J, Tezduyar T E. Finite element methods for first_order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1984, **45**(3): 217—284.

[19] Johson C, Saranen J. Stremline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier_Stokes equations[J]. Math Comp, 1986, **47**(175): 1—18.

[20] Hansbo P, Szepessy A. A velocity_pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier_Stokes equations[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1990, **84**(2): 175—192.

[21] Zhou T X, Feng M F, Xiong H X. A new approach to stability of finite elements under divergence constraints[J]. J Comput Math, 1992, **10**(1): 1—15.

[22] Zhou T X, Feng M F. A least squares Petrov_Galerkin finite element method for the stationary Navier_Stokes equations[J]. Math Comp, 1993, **60**(202): 531—543.

[23] 罗振东. 有限元混合法理论基础及其应用: 发展与应用[M]. 济南: 山东教育出版社, 1996.

[24] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North_Holland, 1978.

A Nonlinear Galerkin/Petrov_Least Squares Mixed Element Method for the Stationary Navier_Stokes Equations

LUO Zhen_dong[1,2], ZHU Jiang[2], WANG Hui_jun[2]

(1. Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100037, P R China;
2. ICCES, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P R China)

Abstract: A nonlinear Galerkin/Petrov_least squares mixed element (NGPLSME) method for the stationary Navier_Stokes equations is presented and analyzed. The scheme is that Petrov_least squares forms of residuals are added to the nonlinear Galerkin mixed element method so that it is stable for any combination of discrete velocity and pressure spaces without requiring the Babu》ka_Brezzi stability condition. The existence, uniqueness and convergence (at optimal rate) of the NGPLSME solution is proved in the case of sufficient viscosity (or small data).

Key words: Navier_Stokes equations; nonlinear Galerkin mixed element method; Petrov_least squares method; error estimate