应用数学和力学,第 23 卷 第 7 期(2002 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 07_0759_12

奇异二阶三点边值问题的正解*

曲文波[1], 张中新[2], 武俊德[3]

(1. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001; 2. 吉林大学 数学所, 长春 130012;
3. 浙江大学 应用数学系, 杭州 312000)

(协平推荐)

摘要: 应用锥中的不动点定理研究奇异二阶三点边值问题的正解的存在性. 采用一种构造 Green 函数的方法为出发点, 利用分段定义算子的手法讨论更一般的奇异二阶三点边值问题. 得到了一个正解的存在性定理. 其中的非线性项可以是变号的.

关 键 词: 正解; 边值问题; 存在性
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

1 引言和主要结果

最近, 文[1] 建立了一个非线性二阶三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' = Q(x)f(y) & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

的正解的存在性结果. 在文[1] 中假设 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha\eta < 1$, $Q(x) \in C([0, 1]; \mathbf{R}_+)$, $f(y) \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}_+)$, $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, $f(y)$ 在 $y = 0$ 和 $y = +\infty$ 处是超线性的或者是次线性的. 其结果的证明是以下面两个定理为基础的.

定理 A[2, 1] 假设 $0 < \eta < 1$, $\alpha\eta \neq 1$ 和函数 $h(x) \in C[0, 1]$. 则线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' = h(x) & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases}$$

有唯一解 $y(x) \in C^2[0, 1]$, 它可表达为

$$y(x) = -\int_0^x (x - t)h(t)\,dt - \frac{\alpha x}{1 - \alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - t)h(t)\,dt + \frac{x}{1 - \alpha\eta}\int_0^1 (1 - t)h(t)\,dt.$$

如果 $\alpha\eta \in (0, 1)$, 且在 $[0, 1]$ 上满足 $h(x) \leqslant 0$, 则有 $y(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$. 进一步, 如果对某个 $x \in [0, 1]$, $h(x) > 0$, 则在 $(0, 1)$ 上有 $y(x) > 0$.

定理 B[3] 设 E 是一个 Banach 空间, K 是 E 中的一个锥. 假设 Ω_1 和 Ω_2 是 E 中的两个

* 收稿日期: 2001_06_05; 修订日期: 2002_02_28
基金项目: 江苏省教育基金资助项目
作者简介: 曲文波(1965—) , 男, 黑龙江人, 副教授, 硕士(E_mail: qqqbye@ 163. com)
张中新(1971—) , 男, 吉林人, 讲师, 硕士(E_mail: wx555555@163. net) ;
武俊德(1962—) , 黑龙江人, 副教授, 博士.

开集，且满足 $0 \in \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 设

$$\Phi: K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to K$$

是一个全连续映射，它满足下列两个条件中的一个：

i) $\forall y \in K \cap \partial\Omega_1$ 有 $\|\Phi y\| \leqslant \|y\|$，且 $\forall y \in K \cap \partial\Omega_2$ 有 $\|\Phi y\| \geqslant \|y\|$，

或者

ii) $\forall y \in K \cap \partial\Omega_1$ 有 $\|\Phi y\| \geqslant \|y\|$，且 $\forall y \in K \cap \partial\Omega_2$ 有 $\|\Phi y\| \leqslant \|y\|$.

则映射 Φ 在 $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中有不动点.

在本文中，我们重新研究三点边值问题(1)，目的是推广和改进上述结果，我们采用的假设条件是：

H1) $\eta \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $f(y) \in C(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, $Q(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, 1)$ 在 $(0, 1)$ 上乎处处有 $Q(x) \geqslant 0$，且满足

$$0 < \int_\eta^1 (1 - x) Q(x) \mathrm{d}x < +\infty, \quad \int_0^\eta x Q(x) \mathrm{d}x < +\infty.$$

此处有两点是我们应该强调的. 第一，在我们的问题中允许 $Q(x)$ 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处是奇异的. 例如，函数

$$Q(x) = x^{-a}(1 - x)^{-b} \qquad (a, b \in (1, 2))$$

就满足 H1). 第二，我们的目的不仅处理 $\alpha\eta \in (0, 1)$ 的情况，也要处理 $\alpha\eta \geqslant 1$ 的情况. 就后者而言，定理 A 是无效的. 因此，我们需要下列两个命题.

定理 1 对于每个给定的 $\rho \geqslant 0$，初值问题

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x) w & (0 < x < 1), \\ w(0) = 0, \ w'(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x) w & (0 < x < \eta), \\ w(0) = 0, \quad w'(\eta) = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x) w & (\eta < x < 1), \\ w(\eta) = 0, \quad w'(\eta) = 1, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x) w & (0 < x < 1), \\ w(1) = 0, \quad w'(1) = -1, \end{cases}$$

分别有解 $w_1(x) \in AC[0, 1] \cap C^1[0, 1)$, $w_2(x) \in AC[0, \eta] \cap C^1(0, \eta]$, $w_3(x) \in AC[\eta, 1] \cap C^1[\eta, 1)$, $w_4(x) \in AC[0, 1] \cap C^1(0, 1]$，它们在其存在区间上全都是凸的. 此外

$$\begin{vmatrix} w_2(x) & w_1(x) \\ w_2'(x) & w_1'(x) \end{vmatrix} \equiv w_2(0) = w_1(\eta) \qquad (\text{在}[0, \eta]\text{上}),$$

$$\begin{vmatrix} w_4(x) & w_3(x) \\ w_4'(x) & w_3'(x) \end{vmatrix} \equiv w_4(\eta) = w_3(1) \qquad (\text{在}[\eta, 1]\text{上}),$$

和

$$\begin{vmatrix} w_4(x) & w_1(x) \\ w_4'(x) & w_1'(x) \end{vmatrix} \equiv w_4(0) = w_1(1) \qquad (\text{在}[0, 1]\text{上}).$$

当 $\rho = 0$ 时，毫无疑问地有 $w_1(x) = x$, $w_2(x) = \eta - x$, $w_3(x) = x - \eta$ 和 $w_4(x) = 1 - x$.

定理 2 对每个给定的 $\alpha \in \mathbf{R}$，存在一个 $\rho \geqslant 0$，使得

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) > 0. \tag{2}$$

假设(2)成立，则线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' + \rho Q(x)y = h(x) & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases}$$

有唯一解

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{w_4(\eta)w_1(\eta)}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\left[\displaystyle\int_0^\eta \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t + \int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t\right] & (x = \eta), \\ w_2(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t + w_1(x)\int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t + y(\eta)\frac{w_1(x)}{w_1(\eta)}, & (0 \leqslant x \leqslant \eta), \\ w_4(x)\displaystyle\int_\eta^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t + w_3(x)\int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}h(t)\,\mathrm{d}t + y(\eta)\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}, & (\eta \leqslant x \leqslant 1), \end{cases} \tag{3}$$

此处 $h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0, 1)$ 满足条件

$$\int_0^\eta w_1(t)\,|\,h(t)\,|\,\mathrm{d}t + \int_\eta^1 w_4(t)\,|\,h(t)\,|\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

如果 $\alpha \geqslant 0$，在 $(0, 1)$ 上几乎处处有 $h(x) \geqslant 0$，则在 $[0, 1]$ 上 $y(x) \geqslant 0$. 进一步，如果

$$\int_0^\eta w_1(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int_\eta^1 w_4(x)h(x)\,\mathrm{d}x > 0,$$

那么对所有的 $x \in (0, 1]$，有 $y(x) > 0$.

此处，我们称 $y(x)$ 是三点边值问题(1)的一个解，如果

i) $y(x) \in AC[0, 1]$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y(1) = \alpha y(\eta)$,

ii) $y'(x) \in AC_{\mathrm{loc}}(0, 1) \cap L^1(0, 1)$, $\quad y''(x) = L^1_{\mathrm{loc}}(0, 1)$,

iii) 在 $(0, 1)$ 上几乎处处有 $-y''(x) = Q(x)f(y(x))$.

且如果在 $(0, 1]$ 上 $y(x) > 0$，我们称 $y(x)$ 是问题(1)的一个正解.

很显然，定理2改进且推广了定理A.

为了建立问题(1)的正解的存在性，我们进一步假设:

H2) 存在一个 $\rho \geqslant 0$ 使得(2)成立，且 $f^*(y) = f(y) + \rho y$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上为非负的.

H3) 下列两个条件之一成立:

$$\limsup_{y\to 0}\frac{f^*(y)}{y} \leqslant \beta \text{ 且 } \limsup_{y\to+\infty}\frac{f^*(y)}{y} \geqslant \eta, \tag{4}$$

$$\limsup_{y\to 0}\frac{f^*(y)}{y} \geqslant \gamma \text{ 且 } \limsup_{y\to+\infty}\frac{f^*(y)}{y} \leqslant \beta, \tag{5}$$

此处 β 和 γ 是两个常数，它们满足

$$\beta M\left(\int_0^\eta w_1(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + \int_\eta^1 w_4(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\right) < 1, \tag{6}$$

$$\frac{\gamma\sigma w_1(\eta)}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(x)Q(x)\,\mathrm{d}x > 1, \tag{7}$$

$$M = 1 + \frac{\max\{w_4(\eta), w_1(\eta)\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\max_{\eta\leqslant x\leqslant 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}, \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{\min\limits_{\eta\leqslant x\leqslant 1}\left\{\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}{\left(\dfrac{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}{\max\{w_4(\eta), w_1(\eta)\}}\right) + \max\limits_{\eta\leqslant x\leqslant 1}\left(\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right)} < 1. \tag{9}$$

很显然, 当 $\rho > 0$ 时 H2) 允许 $f(y)$ 变号•

应用定理 2 和定理 B, 我们能证明下面的存在性结果•

定理 3 设 H1) ~ H3) 成立, 则三点边值问题(1) 有一个正解•

定理 4 设 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha\eta < 1$, $f(y) \in C(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, $Q(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$, 在 $(0,1)$ 上几乎处处有 $Q(x) \geqslant 0$, 有

$$0 < \int_\eta^1 (1-x)Q(x)\mathrm{d}x < +\infty, \quad \int_0^\eta xQ(\mathrm{d}x) < +\infty•$$

则三点边值问题(1) 有一个正解, 只要下列两个条件之一成立•

i) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y} = 0$ 且 $\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{f(y)}{y} = +\infty$;

ii) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(y)}{y} = +\infty$ 且 $\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{f(y)}{y} = 0$•

定理 4 是定理 3 的一个推论, 它改进且推广了文[3] 中的结果•

此处我们必须指出在定理 4 中条件 $\alpha\eta \in (0,1)$ 是不能减弱的, 原因有两点• 第一, 当 $\alpha = 0$ 时, 三点边值问题(1) 退化为两点边值问题• 第二, 当 $\alpha\eta = 1$ 时, 我们断言三点边值问题•

$$\begin{cases} -y'' = y^2 & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \dfrac{1}{\eta}y(\eta), \end{cases}$$

没有正解• 事实上, 如果断言不成立, 设该问题有一个正解 $y(x)$, 则 $y(x)$ 在 $[0,1]$ 上的严格凹函数, 因此 $y(\eta) \geqslant \eta y(1)$, 同 $y(1) = \dfrac{1}{\eta}y(\eta)$ 矛盾, 这样我们的断言成立•

2 预 备 知 识

在本节中, 我们来证明定理 1 和定理 2• 为此, 我们提出一个引理• 这个引理在后面经常用到•

引理 1 设 $h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$, 在 $(0,1)$ 中几乎处处有 $h(x) \geqslant 0$, 且

$$\int_0^\eta xh(x)\mathrm{d}x + \int_\eta^1 (1-x)h(x)\mathrm{d}x < +\infty•$$

则

$$\lim_{x\to 0} x\int_x^\eta h(t)\mathrm{d}t = 0 = \lim_{x\to 1}(1-x)\int_\eta^x h(t)\mathrm{d}t• \tag{10}$$

证明 令 $v(x) = x\int_x^\eta h(t)\mathrm{d}t \quad (0 < x \leqslant \eta)$,

则 $0 \leqslant v(x) \leqslant \int_0^\eta th(t)\mathrm{d}t < +\infty \quad (x \in (0,\eta])$,

$$v'(x) = \int_x^\eta h(t)\mathrm{d}t - xh(x) \quad (0 < x < \eta)•$$

于对任何的 $\delta \in (0,\eta)$, 均有

$$\int_\delta^\eta |v'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \int_\delta^\eta \mathrm{d}x \leqslant \int_x^\eta h(t)\mathrm{d}t + \int_0^\eta xh(x)\mathrm{d}x =$$

$$\int_\delta^\eta (t-\delta)h(t)\mathrm{d}t + \int_0^\eta xh(x)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$2\int_\delta^\eta xh(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

这表明 $v'(x) \in L^1(0, \eta)$, 并且 $v(x) \in AC[0, \eta]$• 由此我们可得

$$\int_0^s v'(x)\mathrm{d}x = \int_0^s \mathrm{d}x\int_x^\eta h(t)\mathrm{d}t - \int_0^s xh(x)\mathrm{d}x \equiv v(s) \qquad (s \in (0, \eta]),$$

这就意味着 $v(0) = 0$, 即第一个等式成立•

同理, 我们可证第二个等式成立•

定理 1 的证明 显然, 当 $\rho = 0$ 时, 定理 1 的所有结论都成立• 现在我们来证明当 $\rho > 0$ 时初值问题

$$\begin{cases} w'' = \rho Q(x)w \qquad (0 < x < 1), \\ w(1) = 0, \quad w'(1) = -1 \end{cases} \tag{11}$$

有唯一正解• 令

$$B = \left\{u(x) \in C[0, 1]; \| u \|_B < +\infty\right\},$$

此处 $\| u \|_B = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} | u(x) | \exp\left(-2\rho\int_x^1 s(1-s)Q(s)\mathrm{d}s\right)$•

定义一个映射 $L: B \to B$

$$Lu(1) = 1$$

$$(Lu)(x) = 1 + \frac{\rho}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u(t)\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)•$$

对任何的 $u \in B$, 我们有

$$\left|\frac{1}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^1 t(1-t)Q(t)|u(t)|\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | u(t) | \int_0^1 t(1-t)Q(t)\mathrm{d}t < +\infty•$$

因此 $L(B) \subset B$• 我们断言 L 是一个压缩映射• 对任何的 $u_1(x), u_2(x) \in B$, 我们有

$$\exp\left(-2\rho\int_x^1 s(1-s)Q(s)\mathrm{d}s\right) | (Lu_1)(x) - (Lu_2)(x) | \leqslant$$
$$\exp\left(-2\rho\int_x^1 s(1-s)Q(s)\mathrm{d}s\right) \rho\int_x^1 t(1-t)Q(t) | (u_1)(t) - (u_2)(t) | \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\frac{1}{2} \| u_1 - u_2 \|_B \exp\left(-2\rho\int_x^1 s(1-s)Q(s)\mathrm{d}s\right) \times$$
$$\int_x^1 2\rho t(1-t)Q(t)\exp\left(-2\rho\int_x^1 s(1-s)Q(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\| u_1 - u_2 \|_B,$$

对任意 $x \in [0, 1]$ 成立• 即

$$\| Lu_1 - Lu_2 \|_B \leqslant \frac{1}{2} \| Lu_1 - Lu_2 \|_B \qquad (\forall u_1, u_2 \in B)•$$

这表明断言是正确的• 由此可知 L 在 B 中有唯一的一个不动点• 设 $u_4(x) \in C[0, 1]$ 是这个唯一的不动点, 则

$$u_4(x) = 1 + \frac{\rho}{1-x}\int_x^1 (t-x)(1-t)Q(t)u_4(t)\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x < 1)•$$

令

$$w_4(x) = (1-x)u_4(x) = 1 - x + \rho\int_x^1 (t-x)Q(t)w_4(t)\mathrm{d}t \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)• \tag{12}$$

则 $w_4(1)=0$,

$$w_4'(x)=-1-\rho\int_x^1 Q(t)w_4(t)\mathrm{d}t\quad(0<x<1),\quad w_4'(1)=-1,\tag{13}$$

$$w_4''(x)=\rho Q(x)w_4(x)\qquad(\text{a. e. } x\in(0,1))\cdot\tag{14}$$

这就是说 $w_4(x)$ 是(11)的一个解•

注意

$$\int_0^1|w_4'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 1+\rho\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1(1-t)Q(t)|u_4(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant$$
$$1+\rho\int_0^1 t(1-t)Q(t)\mathrm{d}t\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_4(t)|<+\infty\cdot$$

这就意味着 $w_4'(x)\in AC_{\mathrm{loc}}(0,1]\cap L^1(0,1)$ 且 $w_4(x)\in AC[0,1]$•

我们现在断言:对所有的 $x\in[0,1)$, $w_4(x)>0$, 即 $w_4(1)=0$ 是它的唯一零点• 如果这个断言不真,则存在一个 $x_0\in[0,1)$,使得在 $(x_0,1)$ 上 $w_4(x)>0$, $w_4(x_0)=w_4(1)=0$, 因为 $w_4'(1)=-1$ 及 $w_4(1)=0$, 能够推出,在 $x=1$ 的一个左邻域中 $w_4(x)>0$• 由 Rolle 定理可知,存在一个 ξ 使得 $w_4'(\xi)=0$• 另一方面,从(13)可以导出

$$w_4'(\xi)=-1-\rho\int_\xi^1 Q(t)w_4(t)\mathrm{d}t<0\cdot$$

矛盾• 这表明我们的断言是真的• 也就是说, $w_4(x)$ 一定是(11)的唯一正解,而且(14)表明 $w_4(x)$ 在 $[0,1]$ 上是凸的•

同理,我们可以证明初值问题

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(0<x<1),\\ w(0)=0,\quad w'(0)=1,\end{cases}\quad\begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(0<x<\eta),\\ w(\eta)=0,w'(\eta)=-1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}w''=\rho Q(x)w\qquad(\eta<x<1),\\ w(\eta)=0,w'(\eta)=1\end{cases}$$

都有唯一正解 $w_1(x)$, $w_2(x)$ 和 $w_3(x)$, 它们分别在 $[0,\eta]$, $[\eta,1]$ 和 $[0,1]$ 上是凸的• 于是我们有

$$\begin{cases}x\leqslant w_1(x)\leqslant w_1(\eta)x/\eta,\quad 0\leqslant w_2(x)\leqslant w_2(0)\qquad(x\in[\eta,1]),\\ 0\leqslant w_3(x)\leqslant w_3(1),\quad(1-x)\leqslant w_4(x)\leqslant w_4(\eta)(1-x)/(1-\eta)\quad(x\in[\eta,1])\cdot\end{cases}\tag{15}$$

令

$$W(x)=\begin{vmatrix}w_4(x) & w_1(x)\\ w_4'(x) & w_1'(x)\end{vmatrix}\qquad(0<x<1)\cdot$$

那么

$$W'(x)=\begin{vmatrix}w_4'(x) & w_1'(x)\\ w_4'(x) & w_1'(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}w_4(x) & w_1(x)\\ \rho Q(x)w_4(x) & \rho Q(x)w_1(x)\end{vmatrix}=0\cdot$$

对 $x\in(0,1)$ 几乎处处成立• 根据引理 1 和(15), (12), (13) 以及

$$\begin{cases} w_1(x) = x + \rho\int_0^x (x - t)Q(t)w_1(t)\,dt & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ w_1'(x) = 1 + \rho\int_0^x Q(t)w_1(t)\,dt & (0 \leqslant x < t), \end{cases}$$

我们得到 $W_x \equiv w_4(0) = w_1(1),\ x \in [0, 1]$•

类似地, 我们有

$$\begin{vmatrix} w_2(x) & w_1(x) \\ w_2'(x) & w_1'(x) \end{vmatrix} \equiv w_2(0) = w_1(\eta) \qquad (x \in [0, \eta]),$$

$$\begin{vmatrix} w_4(x) & w_3(x) \\ w_4'(x) & w_3'(x) \end{vmatrix} \equiv w_4(\eta) = w_3(1) \qquad (x \in [\eta, 1])\text{•} \tag{16}$$

这就完成了定理 1 的证明

定理 2 的证明　当 $\alpha\eta < 1$ 时, 我们可以选取 $\rho = 0$•　此时, 我们有:

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = 1 - \alpha\eta > 0\text{•}$$

当 $\alpha\eta = 1$ 即 $\alpha = 1/\eta$ 时, 我们可选 $\rho > 0$ 充分小•　此时我们有

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = 1 + \rho\int_0^1 (1 - t)Q(t)w_1(t)\,dt - \alpha\left(\eta + \rho\int_0^\eta (\eta - t)Q(t)w_1(t)\,dt\right) = \rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)w_1(t)\,dt + \rho\int_0^\eta (1 - t - \alpha\eta + \alpha t)Q(t)w_1(t)\,dt > 0\text{•}$$

当 $\alpha\eta > 1$ 时, 我们可选 $\rho > 0$ 使得

$$\rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)\,dt \geqslant \alpha\text{•}$$

此时, 我们有

$$w_1(1) - \alpha w_1(\eta) = w_4(\eta)w_1'(\eta) - w_4'(\eta)w_1(\eta) - \alpha w_1(\eta) > w_1(\eta)\left(1 + \rho\int_\eta^1 Q(t)w_4(t)\,dt - \alpha\right) > w_1(\eta)\left(\rho\int_\eta^1 (1 - t)Q(t)\,dt - \alpha\right) \geqslant 0\text{•}$$

总之, 对每个给定的 $\alpha \in R$, 都存在一个 $\rho \geqslant 0$ 使得 $w_1(1) - \alpha w_1(\eta) > 0$•

根据引理 1, (15) 和 (16), 不难验证函数, 由 (3) 定义的 $y(x)$ 是线性三点边值问题

$$\begin{cases} -y'' + \rho Q(x)y = h(x) & (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta) \end{cases} \tag{17}$$

的一个解•

下面, 我们来证唯一性•　设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是 (17) 的解•　令 $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$, 则

$$\begin{cases} y''(x) = \rho Q(x)y(x) & (\text{a.e. } x \in (0, 1)), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta)\text{•} \end{cases}$$

注意, 该齐次线性方程有一个通解

$$y(x) = C_1w_1(x) + C_2w_4(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

此处 C_1 和 C_2 是任意常数•　由边界条件和 (2) 可以推出 $C_1 = C_2 = 0$, 即在 $[0, 1]$ 之上 $y(x) \equiv$

0, 唯一性得证•

定理 2 的其余部分可从(3)推出• 定理 2 证毕•

在下文中, 我们假设存在一个 $\rho \geqslant 0$ 使得 $w_1(1) - \alpha w_1(\eta) > 0$• 令

$$Ly = -y'' + \rho Q(x)y,$$

$$D(L) = \Big\{ y(x) \in A(C[0,1]; y'(x) \in L^1(0,1) \cap AC_{\mathrm{loc}}(0,1),$$

$$y''(x) \in L^*(0,1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \alpha y(\eta) \Big\}•$$

$$L^*(0,1) = \Big\{ h(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1); \ \|h\|^* < +\infty \Big\},$$

此处 $\|h\|^* = \int_0^\eta w_1(x)|h(x)|\mathrm{d}x + \int_\eta^1 w_4(x)|h(x)|\mathrm{d}x$•

由定理 1 和定理 2, 我们能够导出两个结论, 第一, $L: D(L) \to L^*(0,1)$ 是逆正的, 即

$$y(x) \in D(L), (Ly)(x) \geqslant 0, \text{ a.e. } x \in (0,1) \Rightarrow y(x) \geqslant 0, x \in [0,1],$$

通常称之为极值原理(见[4])• 第二, 存在一下正数 C, 使得

$$\|L^{-1}h\| \leqslant C\|h\|^* \qquad (\forall h \in L^*(0,1)),$$

此处 $\|\cdot\|$ 是通常的上确界模•

3 结果的证明

在本节中, 我们将给出定理 3 和定理 4 的证明•

定理 3 的证明 我们定义一个映射 $\Phi: K \to K$:

$$(\Phi y)(x) = \begin{cases} \dfrac{w_4(\eta)w_1(\eta)}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\left(\displaystyle\int_0^\eta \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t + \int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\right) \\ \hfill (x = \eta), \\ w_2(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t + w_1(x)\int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_1(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \eta), \\ w_4(x)\displaystyle\int_\eta^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t + w_3(x)\int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_4(x)\alpha w_3(x)}{w_4(\eta)} \qquad (\eta \leqslant x \leqslant 1), \end{cases}$$

$$K = \Big\{ y(x) \in [0,1]; y(x) \geqslant 0, x \in [0,\eta] \text{ 且 } y(x) \geqslant \sigma\|y\|, x \in [\eta,1] \Big\},$$

此处 $\|y\| = \max\Big\{|y(x)|; 0 \leqslant x \leqslant 1\Big\}$, σ 是由(9)定义的常数• 显然 K 为 $C[0,1]$ 的锥•

根据 Φ 的定义, 引理 1, 定理 1 和定理 2, 我们知道对每个固定的 $y(x) \in K$, 我们有

$$\begin{cases} (\Phi y)(0) = 0, \quad (\Phi y)(1) = \alpha(\Phi y)(\eta), \\ (\Phi y)(x) \geqslant 0, \quad x \in [0,1], \\ (\Phi y)(\eta) \geqslant \dfrac{\min\Big\{w_4(\eta), w_1(\eta)\Big\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}(I_1 + I_4), \end{cases} \tag{18}$$

$$I_1 = \int_0^\eta w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t,$$

$$I_4 = \int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t,$$

$$(\Phi y)(\eta) \leqslant \frac{\max\Big\{w_4(\eta), w_1(\eta)\Big\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}(I_1 + I_4), \tag{19}$$

$$(\Phi y)(x) \leqslant I_1 + I_4 + (\Phi y)(\eta)\max_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

于是,由(19)可知

$$\|\Phi y\| \leqslant \left[1 + \max_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}\frac{\max\{w_4(\eta), w_1(\eta)\}}{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}\right](I_1 + I_4) = M(I_1 + I_4), \tag{20}$$

此外 M 是由(8)定义的常数· 另一方面,由(18)推出

$$\|\Phi y\| \leqslant \left[\frac{w_1(x) - \alpha w_1(\eta)}{\min\{w_4(\eta), w_1(\eta)\}} + \max_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}\right](\Phi y)(\eta)\cdot$$

于是

$$(\Phi y)(x) \geqslant (\Phi y)(\eta)\min_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\frac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}_{(\eta \leqslant x \leqslant 1)} \geqslant$$

$$\frac{\min\limits_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}{\dfrac{w_1(1) - \alpha w_1(\eta)}{\min\{w_4(\eta), w_1(\eta)\}} + \max\limits_{\eta \leqslant x \leqslant 1}\left\{\dfrac{w_4(x) + \alpha w_3(x)}{w_4(\eta)}\right\}}\|\Phi y\| =$$

$$\sigma\|\Phi y\| \quad (\eta \leqslant x \leqslant 1)\cdot$$

这表明 $\Phi(K)$ 是 K 的一个子集·

现在断言 Φ 是一个全连续映射· 事实上,任意固定 $r > 0$,令 $\Omega = \{y(x) \in C[0,1];\ \|y\| < r\}$· 对任何的 $y(x) \in K \cap \Omega$,由 Φ 的定义及(20),我们可得

$$\|\Phi y\| \leqslant M(I_1 + I_4) \leqslant$$

$$M\max_{0 \leqslant y \leqslant r} f^*(y)\left[\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + \int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right] = B_r\cdot \tag{21}$$

$$(\Phi y)'(x) = \begin{cases} w_2'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta \frac{w_2(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 < x \leqslant \eta), \\ w_4'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{w_3(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_3'(x)\int_x^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + \\ \qquad (\Phi y)(\eta)\dfrac{w_4'(x) + \alpha w_3'(x)}{w_4(\eta)} \qquad (\eta \leqslant x \leqslant 1)\cdot \end{cases} \tag{22}$$

于是

$$|(\Phi y)'(x)| \leqslant -w_2'\int_0^\eta \frac{w_1(t)}{w_1(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t +$$

$$(\Phi y)(\eta)\frac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} \qquad (0 < x \leqslant \eta) \leqslant$$

$$\max_{0 \leqslant y \leqslant r} f^*(y)\left[\frac{-w_2'(x)}{w_1(\eta)}\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + w_1'(x)\int_x^\eta Q(t)\,\mathrm{d}t\right] +$$

$$B_r\frac{w_1'(x)}{w_1(\eta)} = G_r(x) \qquad (0 < x < \eta),$$

$$|(\Phi y)'(x)| \leqslant -w_4'(x)\int_\eta^x Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t + w_3'(x)\int_\eta^1 \frac{w_4(t)}{w_4(\eta)}Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t +$$

$$(\Phi y)(\eta)\frac{-w_4'(x)+\alpha w_1'(x)}{w_4(\eta)}\leqslant$$

$$\max_{0\leqslant y\leqslant r}f^*(y)\left(-w_4'(x)\int_\eta^x Q(t)\mathrm{d}t+\frac{w_3'(x)}{w_4(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)+B_r\frac{-w_4'(x)+\alpha w_3'(x)}{w_4(\eta)}=$$

$$G(x)\qquad(\eta\leqslant x<1).$$

从而, 我们得到

$$\int_0^1|(\Phi y)'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 G_r(x)\mathrm{d}r=$$

$$\max_{0\leqslant y\leqslant r}f^*(y)\left(2\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+2\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)+(2+\alpha)B_r<+\infty,\tag{23}$$

这表明$(\Phi y)'(x)\in L^1(0,1)$ 且$(\Phi y)(x)\in AC[0,1]$. 再则(22) 和(23) 蕴含着 $\Phi(K\cap\Omega)$ 在 K 中是相对紧的(根据Ascoli_Arzela 定理). 此外, $f^*(y)$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上的连续性可推出 Φ在K 上的连续性. 总之, 是 Φ 一个全连续映射.

另外, 由(22) 可知$(\Phi y)'(\eta-0)=(\Phi y)'(\eta+0)$, 于是$(\Phi y)'(x)\in AC_{\mathrm{loc}}(0,1)$. 根据上面的讨论, 我们可以断言, Φ在K 中的每个不动点都是(1) 的解.

现在我们来证明在定理 3 的条件下, Φ在K 中必有不动点.

对于给定的 $r_1, r_2>0$, 我们记

$$\Omega_1=\{y\in C[0,1];\ \|y\|<r_1,\qquad \Omega_2=\{y\in C[0,1]:\|y\|<r_2\}.$$

由(6) 和(7) 可知, 存在一个充分小的 $\varepsilon>0$, 使得

$$(\beta+\varepsilon)M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)<1,$$

$$(r-\varepsilon)\frac{\sigma w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t>1.$$

现在假设(4) 成立. 因为 $\lim_{y\to0}\sup\dfrac{f^*(y)}{y}\leqslant\beta$, 我们可选取 $r_1>0$, 使得

$$f^*(y)\leqslant(\beta+\varepsilon)y \text{ 对任意的} y\in[0,r_1] \text{ 成立}.$$

此时, 由(20) 推出, 对任意的 $y\in K\cap\partial\Omega_1$, 我们有

$$\|\Phi y\|\leqslant M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t+\int_\eta w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\right)\leqslant$$

$$M(\beta+\varepsilon)\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t)\mathrm{d}t\right)r_1<$$

$$r_1=\|y\|.$$

根据 $\lim_{y\to\infty}\inf\dfrac{f^*(y)}{y}\geqslant\gamma$, 存在一个正数 $r_2>r_1$ 使得

$$f^*(y)\geqslant(\gamma-\varepsilon)y \text{ 对任意的} y\geqslant\sigma r_2 \text{ 成立}.$$

此时, 由 Φ的定义推知, 对任何的 $y\in K\cap\partial\Omega_2$, 我们有

$$\|\Phi y\|\geqslant(\Phi y)(\eta)\geqslant\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\mathrm{d}t\geqslant$$

$$(\gamma-\varepsilon)\frac{\sigma w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\left(\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)r_2>$$

$$r_2=\|y\|.$$

根据定理 B 的第一部分, 我们知道 Φ在$K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$ 中有一个不动点. 设 $y(x)$ 是一个不

动点，则 $y(x)=(\Phi y)(x)$，$0\leqslant x\leqslant 1$，是(1)的一个正解，显然 $y(x)\geqslant\sigma\|y\|\geqslant\sigma r_1$，$x\in[\eta,1]$，且 $y(x)\geqslant y(\eta)\dfrac{w_1(x)}{w_1(\eta)}$ $(x\in[0,\eta])$.

其次我们假设(5)成立. 由 $\liminf\limits_{y\to 0}\dfrac{f^*(y)}{y}\geqslant\gamma$，我们知道，存在一个 $r_1>0$，使得

$$f^*(y)\geqslant(\gamma-\varepsilon)y \text{ 对任意的 } y\in[0,r_1] \text{ 成立.}$$

此时，对任意的 $y\in K\cap\partial\Omega_1$，我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi y\|&\geqslant\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\geqslant\\&(r-\varepsilon)\frac{w_1(\eta)}{w_1(1)-\alpha w_1(\eta)}\left(\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)r_1>\\&r_1=\|y\|.\end{aligned}$$

因为 $\limsup\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f^*(y)}{y}\leqslant\beta$，我们可选 $N>r_1$，使得

$$f^*(y)\leqslant(\beta+\varepsilon)y \text{ 对任意的 } y\geqslant N \text{ 成立.}$$

令 $r_2>N$，使得

$$r_2>\frac{M\max\{f^*(y);0\leqslant y\leqslant N\}\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)}{1-(\beta+\varepsilon)M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)}.$$

此时，对任何的 $y\in K\cap\partial\Omega_2$，我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi y\|&\leqslant M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\\&M\left(\int_{0\leqslant y(t)\leqslant N,\,0\leqslant t\leqslant\eta} w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t+\int_{0\leqslant y(t)\leqslant N,\,\eta\leqslant t\leqslant 1} w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\right)+\\&M\left(\int_{N\leqslant y(t)\leqslant r_2,\,0\leqslant t\leqslant\eta} w_1(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t+\int_{N\leqslant y(t)\leqslant r_2,\,\eta\leqslant t\leqslant 1} w_4(t)Q(t)f^*(y(t))\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\\&M\max\{f^*(y);0\leqslant y\leqslant N\}\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)+\\&(\beta+\varepsilon)M\left(\int_0^\eta w_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t+\int_\eta^1 w_4(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\right)r_2<\\&r_2=\|y\|.\end{aligned}$$

定理B的第二部分表明 Φ 有一个不动点 $y(x)\in K\cap(\Omega_2\setminus\Omega_1)$. 这个不动点是(1)的一个正解. 至此，定理3证毕.

定理4的证明　因为 $\alpha\eta\in(0,1)$，选取 $\rho=0$，则 $w_1(1)-\alpha w_1(\eta)=1-\alpha\eta>0$. 由定理4的假设可以推出 β 可以任意小而 r 可以任意大. 因此，(6)和(7)都成立，定理4可由定理3推出.

致谢　作者感谢王俊禹教授的帮助和鼓励.

[参　考　文　献]

[1] MA Ru_yun. Positive solutions of a nonlinear three_point boundary value problems[J]. Electron J Differential Equations, 1999, **34**: 1—8.

[2] Gupta C P. A sharper condition for the solvability of a three_point second order boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 1997, **205**(2): 586—597.
[3] Krasosel' skill M A. Positive Solutions of Operator Equation [M]. Gorningen: Noordhoff, 1964.
[4] Cabada A, Nieto J J. Fixed points and approximate solutions for nonlinear operator equations[J]. J Comput Appl Math, 2000, **113**(1_2): 17—25.

Positive Solutions to a Singular Second Order Three_Point Boundary Value Problem

QU Wen_bo[1], ZHANG Zhong_xin[2], WU Jun_de[3]
(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P R China;
2. Insitute of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, P R China;
3. Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 312000, P R China)

Abstract: A fixed point theorem is used to study a singular second order three_point boundary value problem. The problem is more general. Combining the method of constructing Green functions with operators defined piecewise, the existence result of positive solutions to a singular second order three_point boundary value probelm is established. The nonlinearity can be allowed to change sign.

Key words: positive solution; boundary value problem; existence