应用数学和力学, 第 23 卷 第 6 期(2002 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 06_0569_07

用群方法求解幂律非牛顿导电流体的 Rayleigh 问题*

M. B. 阿伯德- 尔- 马力克[1], N. A. 伯占[1],
H. S. 豪赛恩[2]

(1. 亚历山大大学 工程数学和物理系, 亚历山大 21544, 埃及;
2. 阿拉伯科技和海运学院 基础和应用科学系, 1029 信箱, 亚历山大, 埃及)

(吴承平推荐)

摘要: 研究了如下磁流体 Rayleigh 问题: 一块半无限大平板受瞬态冲击后以恒定速度在无限大非牛顿幂律流体的区域内运动· 讨论了在横向外在磁场作用下非牛顿导电流体在无限大区域内的非定常流动· 用变换群理论得到了这个强非线性问题的解· 通过单参数群变换减少了一个自变量, 并使带边界条件的偏微分方程转化为带合适边界条件的常微分方程· 同时研究了某些参数对流体速度的影响·

关 键 词: Rayleigh 问题; 群方法; 非线性; 导电流体; 非牛顿幂律流体
中图分类号: O361. 4; O152. 9 文献标识码: A

引 言

服从牛顿粘性定律的流体称为牛顿流体· 牛顿的粘性定律是 $\tau = \mu \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, 其中 τ 是剪切应力, μ 是粘性系数· 并非所有流体均服从牛顿应力 _ 应变关系· 一些流体, 例如调味蕃茄酱是剪切致稀的, 其阻力系数随应变率的增大而减小· 那些不服从牛顿应力 _ 应变关系的流体称为非牛顿流体· 非牛顿流体的粘性系数是应变率的函数[1]·

我们研究在横向外在磁场作用下非牛顿导电流体在无限大区域内非定常流动, 其流变学模型由如下关于幂律流体的表达式给出[2]:

$$\tau_{ij} = - p\,\delta_{ij} + k \left| \frac{1}{2} I_2 \right|^{\frac{n-1}{2}} e_{ij},$$

其中 τ_{ij} 是剪切应力, k 是粘性系数, I_2 是第二应变律不变量, e_{ij} 是应变率张量, n 是表征流体非牛顿性态的参数· 当 $n = 1$ 时, 流体是牛顿流体性态; 当 $n > 1$ 时, 流体是膨胀型的; 当 $0 < n < 1$ 时, 则是拟塑性的·

无限大幂律非牛顿流体中半无限大平板在受到冲击载荷并维持恒定速度时的运动可用如下方程描述:

* 收稿日期: 2001_07_30
作者简介: M. B. 阿伯德_尔_马力克(E_mail: minab@ aucegypt. edu) ;
H. S. 豪赛恩(E_mail: hossams@ aast. edu)

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{(n-1)/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+MH^2u=0,$$

其中 $u(y,t)$ 是水平方向的流体运动速度, V 是平板运动的定常速度, t 是时间, y 是垂直于平面的坐标, n 是常数, $\gamma(=k/\rho)$ 是常数, k 是粘性系数, ρ 是流体的密度, $M(=\sigma\mu^2/\rho)$ 是常数, σ 是电导律, μ 是磁通量, H 是磁场强度, 并且是时间的函数 $H=H(t)$•

1970 年 Sapunkov[3] 研究了一种导电流体的非牛顿流动, 他得到在极强磁场和极弱磁场这两种特殊情况下该问题的近似解, 并且所得到的解仅针对 $n=2$ 的幂律流体•　1971 年 Vujanovic[4] 采用一种新颖有效的变分方法得到了近似解•　1972 年 Vujanovic, Stauss 和 Djukic[2] 曾经使用过一种新的变分原理, 从而直接得到方程的解•　本文采用的数学方法是单参数群变换•　群方法作为可以减少自变量的一类方法, 是 Birkhoff 在 1948 年首先引进的, 他在文[5] 中利用了单参数群变换•　1952 年 Morgan[6] 提出了一种理论用来改进以前的相似性方法•　这种方法曾经被 Abd_el_Malek 等[7-10], Ames[11] Moran 和 Gaggioli[12] 以及 A. J. A. Morgan[6] 广泛采用•　在本文中, 我们提出一种一般方法, 把单参数群变换应用到求解幂律非牛顿导电流体的 Rayleigh 问题•

通过变换, 偏微分方程的边值问题化为带合适边解条件的常微分方程•　用非线性有限差分方法数值求解这个非线性二阶常微分方程边值问题[13], 算出了流体运动速度 $u(y,t)$ 的近似值•

假设本文所研究的流体是不可压缩的, 因此电场和极化效应可以忽略•

1　问题的提法和控制方程

考虑在无限大幂律非牛顿流体区域内运动的半无限大平板导致的流动(Rayleigh 问题), 其控制方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{(n-1)/2}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}+MH^2u=0; \tag{1}$$

边界条件为

(i) $u(0,t)=V\qquad t>0,$ (2)

(ii) $u(\infty,t)=0\qquad t>0;$ (3)

初始条件为

$$u(y,0)=0\qquad y>0• \tag{4}$$

方程(1) 可以改写为

$$\partial u/\partial t-n\gamma\left(\partial u/\partial y\right)^{n-1}\left(\partial^2u/\partial y^2\right)+MH^2u=0• \tag{5}$$

假设

$$u(y,t)=VF(y,t), \tag{6}$$

其中 $F(y,t)$ 是未知函数, 它的具体形式将在下文中确定•

将(6) 代入(5) 式得到

$$V\partial F/\partial t-n\gamma V^n\left(\partial F/\partial y\right)^{n-1}\left(\partial^2F/\partial y^2\right)+MH^2VF=0, \tag{7}$$

可将上述方程改写成

$$\partial F/\partial t-n\gamma V^{n-1}\left(\partial F/\partial y\right)^{n-1}\left(\partial^2F/\partial y^2\right)+MH^2F=0; \tag{8}$$

相应的边界条件为

(i) $F(0,t)=1\qquad t>0,$ (9)

(ii) $F(\infty, t) = 0 \qquad t > 0;$ (10)

初始条件为

$$F(y, 0) = 0 \qquad y > 0. \tag{11}$$

2 问 题 的 解

我们的求解方法是将单参数群变换应用于求解偏微分方程(8). 采用这种变换以后可以将两个自变量减少一个, 原来的偏微分方程就化为常微分方程.

2.1 群系统表示

求解过程起始于具有如下形式的一类关于单参数 a 的变换群 G:

$$G:\begin{cases} y = h^y(a)y + k^y, \\ t = h^t(a)t + k^t, \\ F = h^F(a)F + k^F, \\ H = h^H(a)H + k^H, \end{cases} \tag{12}$$

其中 h 和 k 是实值函数并至少关于实变量 a 可微.

2.2 不变量分析

为变换微分方程, F 和 H 导数的变换可以通过链式法则求得:

$$S_i = [h^S/h^i]S_i;\ S_{ij} = [h^S/h^ih^j]S_{ij} \qquad (i = y, t; j = y, t), \tag{13}$$

其中 S 代表 F.

方程(8) 具有变换不变性, 对于某些函数 $A(a)$ 总是存在

$$\begin{aligned} &\partial F/\partial t - n\gamma V^{n-1}\left(\partial F/\partial y\right)^{n-1}[\partial^2 F/\partial y^2] + MH^2F = \\ &\quad A(a)\left\{\partial F/\partial t - n\gamma V^{n-1}\left(\partial F/\partial y\right)^{n-1}\left(\partial^2 F/\partial y^2\right) + MH^2F\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

将(12) 和(13) 代入(14) 得到

$$\begin{aligned} &\frac{h^F}{h^t}\frac{\partial F}{\partial t} - n\gamma V^{n-1}\left(\frac{h^F}{h^y}\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{n-1}\left(\frac{h^F}{(h^y)^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + M(h^HH + k^H)^2(h^FF + k^F) = \\ &\quad A(a)\left\{\partial F/\partial t - n\gamma V^{n-1}\left(\partial F/\partial y\right)^{n-1}\left(\partial^2 F/\partial y^2\right) + MH^2F\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

方程(15) 的不变性意味着

$$k^H = k^F = 0, \tag{16}$$

$$h^F/h^t = (h^F)^n/(h^y)^{n+1} = (h^H)^2h^F = A(a). \tag{17}$$

附加条件(9)~(11) 的不变性意味着

$$h^F = 1,\ k^y = k^t = 0, \tag{18}$$

并导致

$$h^y = (h^t)^{1/(n+1)},\ h^H = \left(1/\sqrt{h^t}\right). \tag{19}$$

最后, 我们得到使方程(8) 和附加条件(9)~(11) 具有不变形式的单参数群 G:

$$G:\begin{cases} y = (h^t)^{1/(n+1)}, \\ t = h^tt, \\ F = F, \\ H = \left(1/\sqrt{h^t}\right)H. \end{cases} \tag{20}$$

2.3 绝对不变量的全集

我们的目标是利用群方法将原来的问题变换成一个常微分方程. 现在通过进一步分析来

得到绝对不变量的全集•

如果 $\eta \equiv \eta(y, t)$ 是自变量的绝对不变量, 那么

$$g_j(y, t, F, H) = \Psi_j[\eta(y, t)] \qquad (j = 1, 2) \tag{21}$$

是对应于 F 和 H 的绝对不变量•

群论的基本定理(参见 Moran 和 Gaggioli 的[12])表明: 函数 $g(y, t, F, H)$ 是单参数群的一个绝对不变量, 如果满足如下一阶线性微分方程:

$$\sum_{i=1}^{4}(\alpha_i S_i + \beta_i)\frac{\partial g}{\partial S_i} = 0, \quad S_i \equiv y, t, F, H, \tag{22}$$

其中

$$\alpha_i = \frac{\partial h^{S_i}}{\partial a}(a^0), \quad \beta_i = \frac{\partial k^{S_i}}{\partial a}(a^0) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{23}$$

a^0 表示使群 G 为恒等元 a 的值•

首先, 我们寻找自变量的绝对不变量• 由方程(22), $\eta(y, t)$ 是绝对不变量, 如果它满足一阶线性微分方程

$$(\alpha_1 y + \beta_1)\frac{\partial \eta}{\partial y} + (\alpha_2 t + \beta_2)\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0• \tag{24}$$

由于 $k^y = k^t = 0$, 并根据 β 的定义得到

$$\beta_1 = \beta_2 = 0•$$

现在方程(24)可以改写成

$$\alpha_1 y \partial \eta / \partial y + \alpha_2 t \partial \eta / \partial t = 0• \tag{25}$$

采用分离变量法, 可以得到如下形式的解:

$$\eta = yt^{-\beta}, \quad \beta = \alpha_1 / \alpha_2• \tag{26}$$

第二步是寻求因变量 F 和 H 的绝对不变量•

通过类似分析, 采用方程(20)、(22)和(23), 我们得到

$$F(y, t) = \phi(\eta) \tag{27}$$

和第二个绝对不变量

$$H(t) = q(t)• \tag{28}$$

3　化简为常微分方程

将(26)~(28)代入方程(8), 我们得到

$$[-\beta y t^{-(\beta+1)}]\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} - n\gamma V^{n-1}\left(t^{-\beta}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right)^{n-1}\left(t^{-2\beta}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\right) + Mq^2\phi = 0, \tag{29}$$

由此

$$n\eta V^{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right)^{n-1}[t^{1-\beta(n+1)}] + \beta\eta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta} - Mtq^2\phi = 0• \tag{30}$$

为了将方程(30)简化为自变量仅为 η 的常微分方程时, 系数必须是常数或仅为 η 的函数• 从而有

$$q(t) = E/\sqrt{t}, \tag{31}$$

$$\beta = 1/(n+1)• \tag{32}$$

因此, 方程(30)可写成

$$nw\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}\right)^{n-1}+\beta\eta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}-N\phi=0, \tag{33}$$

其中 $N(=E^2M)$ 和 $w(=\gamma V^{n-1})$ 是常数•

边界条件(9)~(11)可用变量 η 改写为

$$\phi(0)=1, \tag{34}$$

$$\phi(\infty)=0• \tag{35}$$

4 数值解

4.1 N 的影响

考虑 $n=1, w=0.1$ 和 $t=1$ 的情形•

由方程(32), $\beta=1/2$, 从而可得 $\eta=y/\sqrt{t}$•

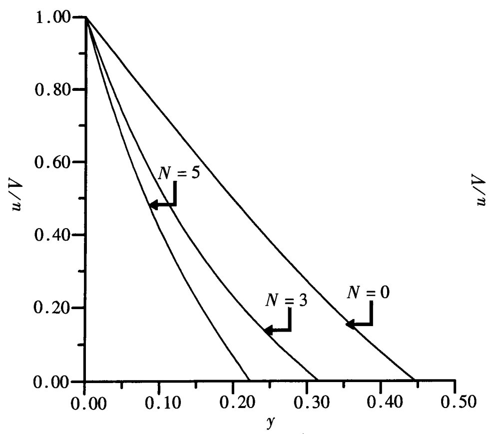

图1　参数 N 对流体速度的影响
($n=1, w=0.1, t=1$)

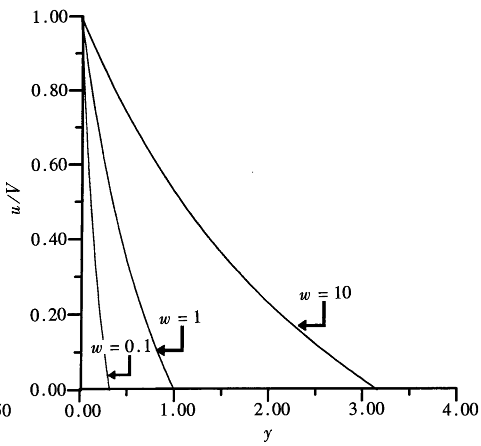

图2　参数 w 对流体速度的影响
($n=1, N=3, t=1$)

方程(33)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\right)+5\eta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}-10N\phi=0• \tag{36}$$

不同 N 值下的结果在图1给出•

4.2 w 的影响

考虑 $n=1, N=3$ 和 $t=1$ 的情形•

由方程(32), $\beta=1/2$, 从而可得 $\eta=y/\sqrt{t}$•

方程(33)化为

$$w\left(\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\eta^2}\right)+\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}-3\phi=0• \tag{37}$$

不同 w 值下的结果在图2给出•

4.3 t 的影响

考虑 $n=1, N=3$ 和 $w=0.1$ 的情形•

由方程(32), $\beta=1/2$, 从而可得 $\eta=y/\sqrt{t}$•

方程(33)化为

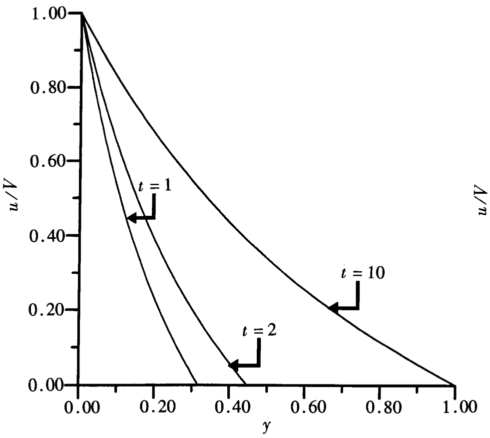

图 3 参数 t 对流体速度的影响

($n = 1, N = 3, w = 0.1$)

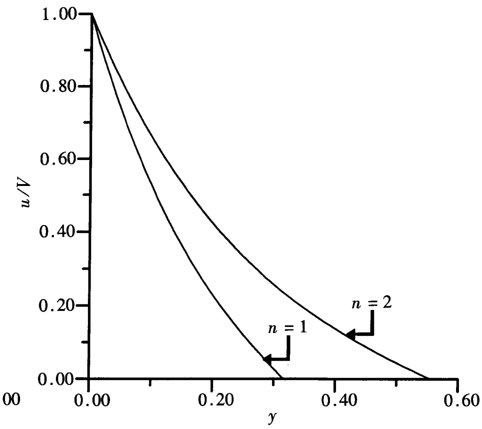

图 4 参数 n 对流体速度的影响

($N = 3, t = 1, w = 0.1$)

$$\left(\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}\eta^2\right) + 5\eta\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\eta - 30\phi = 0. \tag{38}$$

不同 t 值下的结果在图 3 给出.

4.4 n 的影响

考虑 $N = 3, w = 0.1$ 和 $t = 1$ 的情形.

方程(33) 化为

$$n\left(\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}\eta^2\right) + 10\beta\eta\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\eta - 30\phi = 0. \tag{39}$$

不同 n 值下的结果在图 4 给出.

5 结果和讨论

得到相似变换的方法可以分为 (a) 直接方法和 (b) 群论方法两类. 直接方法如分离变量法不必求助于引用群不变性, 相当直接且简单易行. 群论方法则在数学上更加精巧, 总是可以借助微分方程在一类变换群下具有不变性的重要概念. 在一些群论方法(如 Birkhoff_Morgan 方法和 Hellums_Churchill 方法) , 需要预先给定具有特定形式的群. 另一方面, 象 Moran_Gaggioli 有限群方法的步骤是演绎的. 本文中定义了一类变换并且系统推导出了相似解. 采用这种群论方法求解了幂律非牛顿导电流体的 Rayleigh 问题(由方程(1) 给出) .

由图 1 可知, 流体的速度随常数 N 的减小而增大. 常数 N 表征流体的性质, 它依赖于流体的密度、磁导率和磁通率. 由图 2 可知, 流体的速度随 γ 的增大而增大, 由于所研究流体假设为不可压缩, 故 $\gamma(= k/\rho)$ 是常数. 其中 k 是粘性系数, ρ 是流体密度. 由图 3 可知, 流体的速度随时间增加而增大. 我们在图 4 中给出常数 n 的两种情形: 当 $n = 1$ 时, 流体是牛顿流体. 当 $n > 1$ 时, 流体是膨胀型流体.

利用条件对称性、接触对称性和经典李方法可对微分方程本身进行更好的化简并得到更多的解, 但是对于初边值问题则不行, 因为这些给定条件限制了方程的化简.

[参 考 文 献]

[1] Gerhart P M. Fundamentals of Fluid Mechanics [M]. Wesly Publishing Comp Inc, 1993, 11—20.

[2] Vujanovic B, Stauss A M, Djukic Dj. A variational solution of the Rayleigh problem for a power law non_

Newtonian conducting fluid[J] . Ingenieur_Archiv, 1972, **41**: 381—386.

[3] Sapunkov Ya G. Rayleigh problem of non_Newtonian electroconductive fluids[J] . J Appl Math Tech Physics, 1970, **2**: 50—55.

[4] Vujanovic B. An approach to linear and nonlinear heat transfer problem using a Lagrangian[J] . J AIAA, 1971, **9**: 327—330.

[5] Birkhoff G. Mathematics for engineers[J] . Elect Eng, 1948, **67**: 1185—1192.

[6] Morgan A J A. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of nonlinear partial differential equations[J] . Quart J Math Oxford, 1952, **3**(2): 250—259.

[7] Abd_el_Malek M B, Badran N A. Group method analysis of unsteady free_convective laminar boundary-layer flow on a nonisothermal vertical circular cylinder[J] . Acta Mechanica, 1990, **85**: 193—206.

[8] Abd_el_Malek M B, Boutros Y Z, Badran N A. Group method analysis of unsteady free_convective boundary_layer flow on a nonisothermal vertical flat plate[J] . J Engineering Mathematics, 1990, **24**: 343—368.

[9] Boutros Y Z, Abd_el_Malek M B, El_Awadi A, et al. Group method for temperature analysis of thermal stagnant lakes[J] . Acta Mechanica, 1999, **114**: 131—144.

[10] Fayez H M, Abd_el_Malek M B. Symmetry reduction to higher order nonlinear diffusion equation[J] . Int J Appl Math, 1999, **1**: 537—548.

[11] Ames W F. Similarity for the nonlinear diffusion equation[J] . I &EC Fundamentals, 1965, **4**: 72—76.

[12] Moran M J, Gaggioli R A. Reduction of the number of variables in system of partial differential equations with auxiliary conditions[J] . SIAM J Applied Mathematics, 1968, **16**: 202—215.

[13] Burden R, Faires D. Numerical Analysis[M] . Prindle: Weberand Scmidt, 1985.

Solution of the Rayleigh Problem for a Power_Law Non_Newtonian Conducting Fluid via Group Method

Mina B. Abd_el_Malek[1], Nagwa A. Badran[1], Hossam S. Hassan[2]

(1. Department of Engineering Mathematics and Physics, Faculty of Engineering, Alexandria University, Alexandria 21544, Egypt;

2. Department of Basic and Applied Science, Arab Academy for Science and Technology and Maritime Transport, P O Box 1029 Alexandria, Egypt)

Abstract: An investigation is made of the magnetic Rayleigh problem where a semi_infinite plate is given an impulsive motion and thereafter moves with constant velocity in a non_Newtonian power law fluid of infinite extent. The solution of this highly non_linear problem is obtained by means of the transformation group theoretic approach. The one_parameter group transformation reduces the number of independent variables by one and the governing partial differential equation with the boundary conditions reduce to an ordinary differential equation with the appropriate boundary conditions. Effect of the some parameters on the velocity $u(y, t)$ has been studied and the results are plotted.

Key words: Rayleigh problem; group method; non_linearity; conducting fluid; non_Newtonian power law fluid