

文章编号: 1000_0887(2002) 05_0459_18

三维斯托克斯流动在扁球坐标系中的 基本解及其应用*

庄宏^{1,2}, 严宗毅¹, 吴望一¹

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871;

2. 4837_267_605, Pharmaceutical Sciences, Pharmacia Corporation, 301 Henrietta Street,
Kalamazoo, Michigan 49007, U. S. A)

(本刊编委吴望一来稿)

摘要: 通过把 Lamb 基本解中的调和函数转换为扁球坐标系下的表达式, 这项研究成功地得到了一个新的 Stokes 流动三维基本解。此基本解可用于解决任意多个扁椭球处于任意位置和方向时的流动问题。应用最小二乘法, 三维流动问题中常遇到的收敛性差的困难在此得以完全克服。结果表明该方法具有准确度高, 收敛性好和计算量小的特点。

由于扁球可用于模拟从圆盘到圆球的多种物体形状, 此基本解被用于系统地分析了各种几何因素对两个扁球所受力和力矩的影响。为了显示此方法的通用性, 该基本解还用于研究了两例三个扁球的问题。

关键词: Stokes 流动; 基本解; 三维; 扁椭球; 多极子配置; 最小二乘法;
低雷诺数; 多体问题

中图分类号: O357.2 **文献标识码:** A

引 言

近三十年来, 至少发展出了四种新的方法用于解决 Stokes 流动中多个物体间(包括有其它物面存在的情形)的强动力学相互作用问题, 它们是: 多极子配置法, 边界积分方程法, 内部奇点分布法, 多极子矩法(详见参考文献[1])。对于这四种方法, 每一种都有其优越性和不足之处。其中, 首先被 Gluckman 等^[2]提出的多极子配置法一般被认为是准确度最高和计算量最小的方法。然而, 应用此方法需要物体以及边界的形状要与正交坐标面一致, 而且在该坐标系中已知 Stokes 方程的基本解。如果物形偏离了坐标面形状, 一般情况下, 多极子级数对此物形是不完备的函数组, 因而级数不收敛。Gluckman^[3]等人曾深入地研究过这一问题, 结果表明, 球坐标系中的 Lamb 基本解对于流体绕过长球(长短轴半径之比为 2)的问题已经不再收敛。实际上, 利用球坐标系中的 Lamb 基本解, 多极子配置法大多被用于解决轴对称问题和多个圆球

* 收稿日期: 2000_05_18; 修订日期: 2001_10_15

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(86030028; 38970244)

作者简介: 庄宏(1965—), 男, 河南南阳人, 北京大学理学硕士, 美国犹他大学理学博士, 研究员, 在药剂学与生物医学方面发表专业论文多篇。

体的三维运动问题(如 Gluckman 等^[2], Ganatos 等^[4], Yan 等^[5], Hassonjee 等^[6])。另外, 圆柱坐标系中的基本解系已经得到, 并被广泛应用于多个圆球体在有界流动中的运动问题(例如 Leichtberg 等^[7], Ganatos 等^{[8], [9]}, Dagan 等^[10]); 而且, 长球坐标系和扁球坐标系中的轴对称基本解已被用于解决长球串或扁球串在无界流体中的运动问题^[2]。Yoon 等^[11]曾利用边界配置法处理过两个椭球体间的相互作用问题, 但是, 这种方法只适用于在椭球坐标系(包括球坐标系)中。本文的目标是设法获得 Stokes 方程在扁球坐标系中的基本解。这不仅有助于得到其它新的基本解, 而且, 利用这个基本解, 就可以解决任意多个扁球处于任意位置 and 方向时的三维流体运动问题。

通过改变扁球的短长轴比 β (定义为短轴长与长轴长之比), 扁球的形状可以在零厚度的圆盘($\beta = 0$) 和圆球($\beta = 1$) 之间变化。因此扁球可以用来模拟实际问题中的许多物体形状。例如, Hsu 和 Ganatos^[12]利用边界积分法证明, 在其它条件完全相同的情况下, $\beta = 0.5$ 的扁球和具有同等直径的双凹圆盘所受到的阻力和阻力矩相等。因此, 这样的扁球可用来模拟在微循环中红血球的行为(红血球的正常形状是双凹圆盘形)。另外, 血液循环中对血栓形成起重要作用的血小板也近似于扁球形状。可以预期, 如果物形与扁球坐标面一致, 利用多极子配置法可以得到比上述其它三种方法准确度高和计算量小的结果。

推导新基本解的关键是, 把圆球坐标系下 Lamb 基本解中的立体调和函数转换为扁球坐标系下的形式, 然后, 通过比较两组基本解分别在圆球坐标系和扁球坐标系中无穷远处的渐近性质, 得到作用于物体上的力和力矩公式。新得到的基本解中含有连带 Legendre 函数的虚数形式, 经过重新处理后得到它的实数形式并在本文中称之为修正的连带 Legendre 函数。

在三维问题中应用多极子配置法时, 一个难以避免的困难是数值结果对配置点的选择十分敏感。Ganatos 等人^[4]通过 6 000 多次数值试验表明, 尽管某种配置点分布对一定方向的流动会给出很好的结果, 但同样的配置点分布对其它方向的流动却会产生很大的误差。Yan^[5]和 Hassonjee^[6]等人曾克服了这一困难, 他们成功地利用加权平均的概念在一些分立的环上, 而不是离散的配置点上, 满足了边界条件。然而, 这种方法需要大量的数值积分, 从而增加了许多额外的计算量。在本文中, 我们将采用是长春等人^[13]提出的最小二乘配置点法来满足边界条件。利用这种方法, 无论怎样选择配置点和改变流动条件, 我们都能够以较小的计算量获得稳定并且准确的结果。

在下一部分中, 我们将推导 Stokes 方程在扁球坐标系下的基本解。第三部分中, 该基本解将应用于计算两个和三个扁球存在时的三维流动问题。第四部分将讨论本文所提出方法的优越性及局限性。最后, 附录部分将推导扁球坐标系中立体调和函数的表达式, 而且将简要地讨论修正的连带 Legendre 函数的一些性质。

1 公式推导

如图 1 所示, 考虑在无界流体中由 N 个扁球任意运动所引起的定常流动。流体由于扰动所产生的速度 V 和压力 P 满足 Stokes 方程:

$$\mu \nabla^2 V = \nabla P, \quad \nabla \cdot V = 0, \quad (1a, b)$$

以及边界条件:

$$|\mathbf{r}| \rightarrow \infty: V = 0, P = 0 \quad (1c)$$

Stokes 方程(1)的基本解首先由 Lamb^[14]获得, 并被 Happel 和 Brenner^[15](第 149 页)表述为

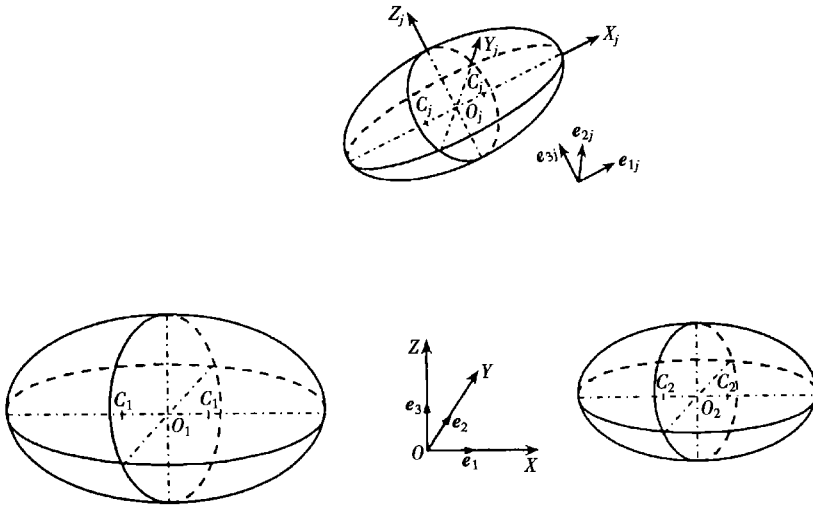


图 1 三维空间中的扁球分布

如下形式

$$\begin{cases} V = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dots \times (rX_{-(n+1)}) + \dots \Phi_{-(n+1)} - \frac{(n-2)}{42n(2n-1)} r^2 \dots P_{-(n+1)} + \right. \\ \left. \frac{(n+1)}{4n(2n-1)} r P_{-(n+1)} \right], \\ P = \sum_{n=1}^{\infty} P_{-(n+1)}. \end{cases} \quad (2)$$

这里 r 代表径向位置矢量, $X_{-(n+1)}$, $\Phi_{-(n+1)}$ 和 $P_{-(n+1)}$ 满足 Laplace 方程:

$$\dots^2 X_{-(n+1)} = 0, \dots^2 \Phi_{-(n+1)} = 0, \dots^2 P_{-(n+1)} = 0 \quad (3a, b, c)$$

这三个 $-(n+1)$ 阶立体调和函数在球坐标系中可以表示为如下形式,

$$\begin{cases} X_{-(n+1)} \\ \Phi_{-(n+1)} \\ P_{-(n+1)} \end{cases} = \sum_{m=0}^n P_n^m(\zeta) \frac{1}{r^{n+1}} \begin{bmatrix} A'_{mn} \\ C'_{mn} \\ E'_{mn} \end{bmatrix} \cos m\phi + \begin{bmatrix} B'_{mn} \\ D'_{mn} \\ F'_{mn} \end{bmatrix} \sin m\phi, \quad (4)$$

其中, $P_n^m(\zeta)$ 是连带 Legendre 函数, $\zeta = \cos\theta$, A'_{mn} , B'_{mn} , ..., F'_{mn} 代表未知常数.

为了得到扁球坐标系下的一般解, 我们先将立体调和函数 $X_{-(n+1)}$, $\Phi_{-(n+1)}$, $P_{-(n+1)}$ 转化为扁球坐标系下的表达式. 然后把这些表达式代入方程(2)中, 最后进行所有相关的转换.

图 2 给出本文采用的扁球坐标系. 圆柱坐标系 (ρ, z, ϕ) 与扁球坐标系 (ξ, η, φ) 存在如下的关系

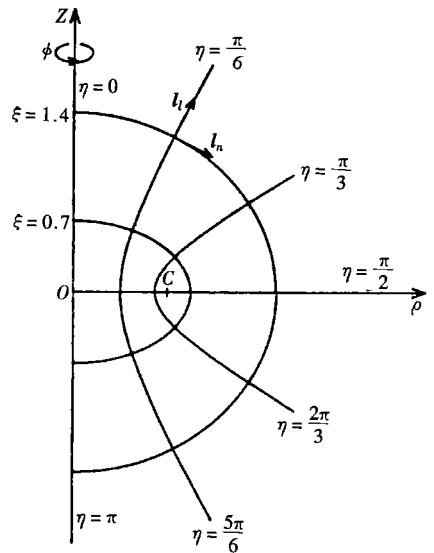


图 2 扁球坐标系

$$\begin{cases} z = c \sinh \xi \cos \eta, \\ \rho = c \cosh \xi \sin \eta, \end{cases} \quad (5)$$

其中, $0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq \pi, 0 \leq \phi < \pi, c$ 是焦点半径. 为了简便起见, 引入变量 p 和 q , 它们分别被定义为

$$p = \sinh \xi, \quad q = \cos \eta. \quad (6)$$

如附录中所示, 立体调和函数在扁球坐标系中可表示为如下形式,

$$\begin{cases} X_{-(n+1)} \\ \Phi_{-(n+1)} \\ P_{-(n+1)} \end{cases} = \sum_{m=0}^n P_n^m(q) Q_n^m(p) \begin{bmatrix} \begin{cases} A_{mn} \\ C_{mn} \\ E_{mn} \end{cases} \cos m\phi + \begin{cases} B_{mn} \\ D_{mn} \\ F_{mn} \end{cases} \sin m\phi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中, $P_n^m(q)$ 是第一类连带 Legendre 函数, $Q_n^m(p)$ 是第二类修正的连带 Legendre 函数, $A_{mn}, B_{mn}, \dots, F_{mn}$ 是由边界条件来确定的未知常数. $Q_n^m(p)$ 的定义将在附录中给出.

在扁球坐标系中, 流体速度和压力场公式(2)可以重新表达为如下形式:

$$\begin{cases} V_\xi = - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial X_{-(n+1)}}{\partial \phi} + \frac{\sqrt{1+p^2}}{c \sqrt{p^2+q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \Phi_{-(n+1)}}{\partial p} + \frac{q}{\mu} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \times \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n(2n-1)} P_{-(n+1)} - \frac{c \sqrt{1+p^2}(1+p^2-q^2)}{\mu \sqrt{p^2+q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)}{2n(2n-1)} \frac{\partial P_{-(n+1)}}{\partial p}, \\ V_\eta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial X_{-(n+1)}}{\partial \phi} - \frac{\sqrt{1-q^2}}{c \sqrt{p^2+q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \Phi_{-(n+1)}}{\partial q} + \frac{cq}{\mu} \frac{\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}} \times \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n(2n-1)} P_{-(n+1)} + \frac{c \sqrt{1-q^2}(1+p^2-q^2)}{\mu \sqrt{p^2+q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)}{2n(2n-1)} \frac{\partial P_{-(n+1)}}{\partial q}, \\ V_\phi = \frac{q \sqrt{1+p^2} \sqrt{1-q^2}}{p^2+q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial X_{-(n+1)}}{\partial p} + \frac{p \sqrt{1+p^2} \sqrt{1-q^2}}{p^2+q^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial X_{-(n+1)}}{\partial q} + \\ \frac{1}{c \sqrt{1+p^2} \sqrt{1-q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \Phi_{-(n+1)}}{\partial \phi} - \frac{c(1+p^2-q^2)}{\mu \sqrt{1+p^2} \sqrt{1-q^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)}{2n(2n-1)} \frac{\partial P_{-(n+1)}}{\partial \phi}, \\ P = \sum_{n=1}^{\infty} P_{-(n+1)}. \end{cases} \quad (8)$$

将公式(7)代入(8)式中, 由于第 j 个球的扰动所引起的流体速度和压力可表示为

$$\begin{aligned} V_{\xi j} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[- \frac{q_j}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{1}{\sqrt{1+p_j^2}} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (-m A_{jmn} \sin m\phi_j + m B_{jmn} \cos m\phi_j) + \right. \\ & \frac{\sqrt{1+p_j^2}}{c \sqrt{p_j^2+q_j^2}} P_n^m(q_j) \frac{\partial Q_n^m}{\partial p_j} (C_{jmn} \cos m\phi_j + D_{jmn} \sin m\phi_j) + \\ & \frac{c_j p_j \sqrt{1+p_j^2}}{\mu \sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{(n+1)}{n(2n-1)} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (E_{jmn} \cos m\phi_j + F_{jmn} \sin m\phi_j) - \\ & \left. \frac{q_j \sqrt{1+p_j^2}(1+p_j^2-q_j^2)}{\mu \sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{(n-2)}{2n(2n-1)} P_n^m(q_j) \frac{\partial Q_n^m}{\partial p_j} (E_{jmn} \cos m\phi_j + F_{jmn} \sin m\phi_j) \right], \quad (9a) \\ V_{\eta j} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{p_j}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{1}{\sqrt{1-q_j^2}} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (-m A_{jmn} \sin m\phi_j + m B_{jmn} \cos m\phi_j) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-q_j^2}}{c_j} \frac{\partial P_n^m}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} Q_n^m(p_j) (C_{jmn} \cos m\phi_j + D_{jmn} \sin m\phi_j) + \\ & \frac{c_j q_j \sqrt{1-q_j^2}}{\mu} \frac{(n+1)}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{1}{n(2n-1)} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (E_{jmn} \cos m\phi_j + F_{jmn} \sin m\phi_j) + \\ & \frac{c_j \sqrt{1-q_j^2} (1+p_j^2-q_j^2)}{\mu} \frac{(n-2)}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \frac{1}{2n(2n-1)} \frac{\partial P_n^m}{\partial q_j} Q_n^m(p_j) (E_{jmn} \cos m\phi_j + F_{jmn} \sin m\phi_j) \end{aligned} \right], \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} V_{\phi_j} = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{q_j \sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2}}{q_j^2+q_j^2} P_n^m(q_j) \frac{\partial Q_n^m}{\partial p_j} (A_{jmn} \cos m\phi_j + mB_{jmn} \sin m\phi_j) + \right. \\ & \frac{p_j \sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2}}{p_j^2+q_j^2} \frac{\partial P_n^m}{\partial q_j} Q_n^m(p_j) (A_{jmn} \cos m\phi_j + B_{jmn} \sin m\phi_j) + \\ & \frac{1}{c_j \sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2}} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (-mC_{jmn} \sin m\phi_j + mD_{jmn} \cos m\phi_j) - \\ & \left. \frac{c_j (1+p_j^2-q_j^2)}{\mu} \frac{(n-2)}{\sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2}} \frac{1}{2n(2n-1)} P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (-mE_{jmn} \sin m\phi_j + mF_{jmn} \cos m\phi_j) \right], \end{aligned} \quad (9c)$$

$$P_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(q_j) Q_n^m(p_j) (E_{jmn} \cos m\phi_j + F_{jmn} \sin m\phi_j), \quad (9d)$$

其中, $p_j = \sinh \xi_j$, $q_j = \cos \eta_j$, ξ_j, η_j, ϕ_j 是以第 j 个扁球中心为起点的扁球坐标系坐标. c_j 是第 j 个扁球的焦点半径. $A_{jmn}, B_{jmn}, \dots, F_{jmn}$ 是未知常数, 对于空间位置和方向一定的多个扁球, 它们将由所有扁球表面的无滑移边界条件来决定.

扁球坐标系坐标 (ξ_j, η_j, ϕ_j) 和局部单位向量 $(\mathbf{e}_{1j}, \mathbf{e}_{2j}, \mathbf{e}_{3j})$ 对于不同的扁球是不一样的. 因此, 将所有坐标 p_j, q_j 和 ϕ_j 表达为某个单一正交坐标系下的形式将带来很大的好处. 为此, 引入含有方向余弦的变换矩阵 \mathbf{R} , 它的定义为

$$(\mathbf{e}_{1j}, \mathbf{e}_{2j}, \mathbf{e}_{3j}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \mathbf{R}, \quad (10a)$$

则总体笛卡尔坐标 (X, Y, Z) 与局部扁球坐标 (p_j, q_j, ϕ_j) 可通过下面公式联系起来 (参看图 1)

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} c_j \sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2} \cos \phi_j \\ c_j \sqrt{1+p_j^2} \sqrt{1-q_j^2} \sin \phi_j \\ c p_j q_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_{j0} \\ Y_{j0} \\ Z_{j0} \end{Bmatrix}, \quad (10b)$$

其中, (X_{j0}, Y_{j0}, Z_{j0}) 是第 j 个扁球中心的坐标.

另外, 为了有利于在每一个扁球表面上应用无滑移边界条件, 有必要将第 j 个扁球的扰动速度场 $(V_{\xi_j}, V_{\eta_j}, V_{\phi_j})$ 表达为总体笛卡尔坐标 (V_{Xj}, V_{Yj}, V_{Zj}) 下的形式, 即

$$\begin{Bmatrix} V_{Xj} \\ V_{Yj} \\ V_{Zj} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} V_{\xi_j} \frac{p_j \sqrt{1-q_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \cos \phi_j + V_{\eta_j} \frac{q_j \sqrt{1+p_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \cos \phi_j - V_{\phi_j} \sin \phi_j \\ V_{\xi_j} \frac{p_j \sqrt{1-q_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \sin \phi_j + V_{\eta_j} \frac{q_j \sqrt{1+p_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \sin \phi_j + V_{\phi_j} \cos \phi_j \\ V_{\xi_j} \frac{q_j \sqrt{1+p_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} - V_{\eta_j} \frac{p_j \sqrt{1-q_j^2}}{\sqrt{p_j^2+q_j^2}} \end{Bmatrix}, \quad (10c)$$

从而, 对于 N 个扁球在静止流体中运动的任何问题, 流体扰动速度场是每个扁球扰动速度场的线性迭加, 也就是

$$\mathbf{V} = V_X \mathbf{e}_1 + V_Y \mathbf{e}_2 + V_Z \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^N (V_{Xj} \mathbf{e}_1 + V_{Yj} \mathbf{e}_2 + V_{Zj} \mathbf{e}_3) \quad (11)$$

扁球表面的无滑移边界条件为

$$\mathbf{V}|_{r_j \in s_j} = \mathbf{U} + \Omega_j \times \mathbf{r}_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

其中, \mathbf{V} 代表流体的扰动速度场, s_j 表示第 j 个扁球的表面, \mathbf{r}_j 是源于第 j 个扁球中心的向量, \mathbf{U}_j 和 Ω_j 分别为第 j 个扁球的平移速度和旋转(角)速度. 对于 N 个扁球来说, 如果三个速度分量在每个扁球表面的 L 个配置点上满足无滑移边界条件, 并且将(9) 式中的级数截断从而每一双重级数保留 M 项, 则可得到共有 $3 \times N \times L$ 个方程和 $N \times M$ 个未知数 ($A_{jmn}, B_{jmn}, \dots, F_{jmn}$) 的联立线性代数方程组. 在截断(9) 式中级数时, 级数项须按下列顺序保留:

$$A_{j01}, C_{j01}, E_{j01}, A_{j11}, B_{j11}, C_{j11}, D_{j11}, E_{j11}, F_{j11},$$

$A_{j02}, C_{j02}, E_{j02}, A_{j12}, B_{j12}, C_{j12}, D_{j12}, E_{j12}, F_{j12}, A_{j22}, B_{j22}, C_{j22}, D_{j22}, E_{j22}, F_{j22}, \dots$ (请注意, 含有 $B_{j0n}, D_{j0n}, F_{j0n}$ 的级数项对此方程的解没有贡献, 因而被舍去). 为了在第 j 个扁球的所有配置点上满足无滑移边界条件, 将公式(9), (10) 和(11) 代入(12) 式中, 则可得到如下方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_X |_{r_j \in s_j} = \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^n \sum_{m=0}^m (A_{jmn} A_{jmn}^* + B_{jmn} B_{jmn}^* + C_{jmn} C_{jmn}^* + D_{jmn} D_{jmn}^* + E_{jmn} E_{jmn}^* + F_{jmn} F_{jmn}^*)}_{\text{总共 } M \text{ 项}}, \\ V_Y |_{r_j \in s_j} = \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^n \sum_{m=0}^m (A_{jmn} A_{jmn}^{**} + B_{jmn} B_{jmn}^{**} + C_{jmn} C_{jmn}^{**} + D_{jmn} D_{jmn}^{**} + E_{jmn} E_{jmn}^{**} + F_{jmn} F_{jmn}^{**})}_{\text{总共 } M \text{ 项}}, \\ V_Z |_{r_j \in s_j} = \underbrace{\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^n \sum_{m=0}^m (A_{jmn} A_{jmn}^{***} + B_{jmn} B_{jmn}^{***} + C_{jmn} C_{jmn}^{***} + D_{jmn} D_{jmn}^{***} + E_{jmn} E_{jmn}^{***} + F_{jmn} F_{jmn}^{***})}_{\text{总共 } M \text{ 项}}, \end{array} \right. \quad (13)$$

公式(13) 中带星的是自变量为 p_j, q_j 和 ϕ_j (扁球坐标系坐标) 的已知函数, 不带星的量表示待定常数.

在引言部分中我们曾讨论过, 为了使数值结果不受边界配置点选取的影响(数值结果对边界配置点的稳定性), 本文采用了最小二乘配置点法来解矩阵方程(13). 这个方法要求边界配置点的数目比未知常数 $A_{jmn}, B_{jmn}, \dots, F_{jmn}$ 的数目多出许多, 从而使线性方程的个数 ($3NL$) 比未知量的个数 (NM) 多出许多. 如果将此线性方程组写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{CX} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (14a)$$

则应用最小二乘配置点法可得下面的正规方程组:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{CX} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad (14b)$$

因为 $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ 是方形矩阵, 从而处理线性代数方程组的任何标准方法都可用来解此方程组. 为了提高数值精度和减少计算量, 本文采用修正的 Gram-Schmidt 正交化方法来解此方程组. 最小二乘配置点法的特点和长处将在第二部分中结合数值算例加以讨论.

下面我们推导扁球坐标系中流体作用于第 j 个物体上的力的力矩的公式. 在圆球坐标系中, 该公式已经被 Happel 和 Brenner (1973) 得到, 它们是

$$\mathbf{F} = -4\pi \cdot (r^3 P_{-2}) = -4\pi (E'_{11} \mathbf{e}_1 + F'_{11} \mathbf{e}_2 + E'_{01} \mathbf{e}_3), \quad (15a)$$

$$\mathbf{T} = -8\pi\mu \nabla \cdot (r^3 \mathbf{X}_{-2}) = -8\pi\mu (A'_{11} \mathbf{e}_1 + B'_{11} \mathbf{e}_2 + A'_{01} \mathbf{e}_3) \quad (15b)$$

这里, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 是总体笛卡尔坐标系的单位向量, 函数 P_{-2}, X_{-2} 和系数 $E'_{11}, F'_{11}, E'_{01}, A'_{11}, B'_{11}, A'_{01}$ 由公式(4) 来定义. 众所周知, 如果用 r 来表示到物体中心的距离, 在 $r \rightarrow \infty$ 时, 代表力和力矩的公式分别以 $O(r^{-1})$ 和 $O(r^{-2})$ 的形式衰减. 可以预期, 这些渐近性质是与坐标系的选取无关的. 在扁球坐标系中 $r = \sqrt{1 + p^2 - q^2}$, 含有 E_{01}, E_{11} 和 F_{11} 的项应该与流体作用力相对应, 而含有 A_{01}, A_{11} 和 B_{11} 的项应该与流体作用力矩相对应. 所以, 下面我们打算将系数 $E_{01}, E_{11}, F_{11}, A_{01}, A_{11}, B_{11}$ 和与之相对应的系数 $E'_{01}, E'_{11}, F'_{11}, A'_{01}, A'_{11}, B'_{11}$ 联系起来. 为此, 首先考虑单个扁球在无界静止流体中沿其旋转轴方向(即 z_j 轴方向, 见图 1) 平移的情况, 由流场的对称性与反对称性可得

$$A_{mn} = 0, \quad D_{mn} = 0, \quad F_{nm} = 0, \quad (16a)$$

和

$$\begin{cases} X_{-(n+1)} = \sum_{\substack{m=0 \\ (n+m)=\text{偶数}}}^n B_{mn} P_n^m Q_n^m \sin m\phi, \\ \Phi_{(n+1)} = \sum_{\substack{m=0 \\ (n+m)=\text{奇数}}}^n C_{mn} P_n^m Q_n^m \cos m\phi, \\ P_{-(n+1)} = \sum_{\substack{m=0 \\ (n+m)=\text{奇数}}}^n E_{mn} P_n^m Q_n^m \cos m\phi \end{cases} \quad (16b)$$

可见上述六个系数中唯一非零的是 E_{01} , 因而含有 E_{01} 的项对应于 z_j 方向的流体作用力. 可以推出, 当 $r \rightarrow \infty$ 时(等价于 $p \rightarrow \infty$), 此项的渐近公式为

$$pP_{-2} = pE_{01}P_1^0(q)Q_1^0(p) = E_{01}pq \left[-\frac{1}{3p^2} + \frac{1}{5p^4} - \dots \right]. \quad (17a)$$

类似地, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 还可以得到在圆球坐标系中此对应项的渐近公式为

$$rP_{-2} = E'_{01}P_1^0(\cos\theta) \frac{1}{r} = E'_{01} \frac{pq}{c^2(1+p^2-q^2)}, \quad (17b)$$

由上面两个表达式中含有 p^{-1} 项的等价性, 可以得出

$$E'_{01} = -\frac{1}{3}c^2E_{01}. \quad (18)$$

根据完全相似的推理, 可以得到上述六个系数与相对应的力和力矩的关系. 最后, 我们可以将扁球坐标系中第 j 个扁球上的流体作用力和力矩归纳为:

$$\mathbf{F}_j = -\frac{4}{3}\pi c_j^2 (2E_{j11} \mathbf{e}_{1j} + 2F_{j11} \mathbf{e}_{2j} - E_{j01} \mathbf{e}_{3j}), \quad (19a)$$

$$\mathbf{T}_j = -\frac{8}{3}\pi \mu c_j^2 (2A_{j11} \mathbf{e}_{1j} + 2B_{j11} \mathbf{e}_{2j} - A_{j01} \mathbf{e}_{3j}), \quad (19b)$$

其中 c_j 和单位向量 $\mathbf{e}_{1j}, \mathbf{e}_{2j}, \mathbf{e}_{3j}$ 分别在公式(9) 和(10a) 中给出.

为了便于表达多个扁球问题的结果, 我们利用特征长度 R 和特征速度 U 将(19) 式中的流体作用力和力矩无量纲化, 它们是:

$$\lambda_j = \frac{\mathbf{F}_j}{6\pi\mu UR} = -\frac{2}{9} \frac{c_j^2}{\mu UR} (2E_{j11} \mathbf{e}_{1j} + 2F_{j11} \mathbf{e}_{2j} - E_{j01} \mathbf{e}_{3j}), \quad (20a)$$

$$\mu_j = \frac{\mathbf{T}_j}{8\pi\mu UR^2} = -\frac{1}{3} \frac{c_j^2}{UR^2} (2A_{j11} \mathbf{e}_{1j} + 2B_{j11} \mathbf{e}_{2j} - A_{j01} \mathbf{e}_{3j}), \quad (20b)$$

其中 λ_j 和 μ_j 分别被称为(阻)力和(阻)力矩的修正因子。

2 数值算例

在这一部分中,我们首先以单个扁球情况以及两个几乎接触扁球情况为例子,对本文方法的收敛性进行检验。然后,通过与两个圆球 Goldman 等^[16]和一个扁球(Happel 和 Brenner^[15],第 149, 233 页)情况下的分析解相比较,说明本方法的准确性。最后,我们将给出两个扁球问题和三个扁球问题的三维算例,这些结果是迄今为止首次得到的。

2.1 方法的收敛性

在引言部分我们曾讨论过,应用配置点法解决本文的三维流动问题时,数值结果对配置点的选取非常敏感,而在不同的环上利用加权平均法满足边界条件又需要极大量的数值积分。因此,本文采用最小二乘法配置点法来满足边界条件,该方法的本质是:对于 N 个物体其表面共有 NL 个配置点的情形,若每个物体所对应的多极子级数均保留 M 项($M \ll 3L$),则数值结果在所有配置点上满足边界条件的误差平方和为最小。为了方便计算,我们将配置点选择在 I 个均匀分布的纬线和 J 个均匀分布的经线的交点上(即 $L = IJ$)。

对很多实际问题,利用多个物体分布时存在的对称性可以大量减少计算时间和存储空间。例如,当两个同样扁球相对于 $X = 0$ 平面对称放置时,多极子级数中的一些未知常数(相应于对称的配置点对来说)大小相等而符号相同或相反。通过把对应的两个方程相加或相减,可以消掉某些未知常数,从而只在两个对称配置点的一个满足边界条件就可以了。利用这种方法,可以将方程的总数减少一半,并且将(14)式中配置点矩阵的大小(矩阵元素的总数)减至原来的四分之一。如果多体问题的几何分布对于 $X = 0$, $Y = 0$ 和 $Z = 0$ 平面均对称,则方程的总数将减至原来的八分之一,配置点矩阵的大小将减至原来的六十四分之一,并且只需在 $X > 0$, $Y > 0$ 和 $Z > 0$ 的配置点上满足边界条件就可以了。详细情况请见 Hassonjee 等的[6]。

下面我们将给出扁球的阻力和阻力矩修正因子(λ_j 和 μ_j)的一些计算结果。 λ_j 和 μ_j 由公式(20a, b)来定义,其中 R 值取为系统中第一个扁球的长轴半径为 b_1 ,若不加特别说明, U 取为来流速度(如果物体在均匀来流中静止)或物体平移速度(如果物体在静止流体中运动)的数值。

表 1 单个扁球(短长轴比 $\beta = 0.7$)沿其对称轴方向下落时 λ_j 的计算收敛性试验

(($I \times J$)表示扁球上边界配置点的数目)

$M = 12$	$M = 21$	$M = 30$	$M = 39$	$M = 48$
- 0.946 8 (20×4)	- 0.940 3 (4×5)	- 0.941 8 (5×6)	- 0.940 7 (6×6)	- 0.933 1 (6×6)
- 0.946 1 (40×4)	- 0.941 9 (5×6)	- 0.942 4 (6×7)	- 0.941 0 (8×8)	- 0.941 0 (8×8)
- 0.945 7 (80×4)	- 0.942 4 (6×6)	- 0.942 7 (7×8)	- 0.941 1 (9×9)	- 0.941 1 (9×9)
- 0.945 5 (160×4)	- 0.942 9 (8×6)	- 0.942 9 (8×8)	- 0.941 3 (13×9)	- 0.941 3 (13×9)
- 0.945 4 (260×4)	- 0.943 1 (20×6)	- 0.943 0 (10×8)	- 0.941 4 (21×9)	- 0.941 4 (21×9)
- 0.945 3 (360×4)	- 0.943 0 (3×6)	- 0.943 1 (11×8)	- 0.941 5 (22×9)	- 0.941 5 (22×9)
- 0.945 3 (460×4)	- 0.943 0 (50×6)	- 0.943 1 (12×8)	- 0.941 5 (23×9)	- 0.941 5 (23×9)

准确解: - 0.941 5 (Happel 和 Brenner, [15], 第 149 页)

表 1 给出计算单个扁球(短长轴比 $\beta = 0.7$) 沿 z_j 方向平移时(见图 1) 的收敛情况。从表中可见, 如果的多极子级数的截断项数(M) 一定, 当配置点个数(IJ) 增加时, λ_j 的计算结果趋近于一个极限数值, 而当级数的项数(M) 增加时这些极限值收敛到准确结果。对于表 1 所示的情况, 计算结果收敛到四位有效数字与准确结果一致时需要 M 大致为 40 而 IJ 大致为 200, 因而很好地满足了 $M \ll 3IJ$ 的条件。

表 2 均匀流体侧向绕过单个扁球时的计算收敛性试验(I 和 J 分别代表纬线和经线的数目, 其中通解(多极子) 级数共保留 $M = 85$ 项)

I	$J = 10$	$J = 20$	$J = 30$	$J = 40$
8	0. 877 496	0. 877 498	0. 877 498	0. 877 498
10	0. 877 498	0. 877 500	0. 877 501	0. 877 501
20	0. 877 506	0. 877 508	0. 877 508	0. 877 508
30	0. 877 509	0. 877 511	0. 877 512	0. 877 512

准确解: 0. 877 512 (根据 Happel 和 Bremer, [15], 第 224 页的方程(15.11.20) 计算得到,)

增加数值 I 或者 J 对于计算收敛的相对重要性可从表 2 看出, 此时的情况为单个扁球 ($\beta = 0.7$) 沿着 x_j 方向平移运动(见图 1)。在级数项数一定($M = 85$) 的条件下, $I = 20$ 和 $J = 10$ ($IJ = 200$) 时能使计算结果收敛到五位有效数字与准确解一致, 而当 $I = 10$ 和 $J = 40$ ($IJ = 400$) 时却不能达到这个精度。这些数值试验(连同表 1 中的结果) 表明, 无论是扁球问题的轴对称流动或三维流动, 增加 I 比增加 J 能更有效地加快收敛速度。

表 3 流体沿 Z 轴方向流动并绕过两个相同扁球(短长轴比 $\beta = 0.7$, 两球间距离 $d/2b = 1.01$) 时阻力修正因子 λ_j 的收敛性

$M = 6$	$M = 30$	$M = 46$	$M = 54$	$M = 62$
- 0. 577 9(38× 4)	- 0. 681 1(5× 6)	- 0. 685 6(5× 5)	- 0. 668 8(5× 6)	- 0. 677 3(5× 6)
- 0. 578 8(54× 4)	- 0. 681 5(6× 7)	- 0. 680 7(5× 6)	- 0. 680 8(7× 8)	- 0. 689 4(6× 7)
- 0. 579 2(70× 4)	- 0. 681 7(7× 8)	- 0. 680 8(9× 10)	- 0. 680 7(11× 10)	- 0. 681 1(7× 8)
- 0. 579 7(102× 4)	- 0. 681 9(12× 9)	- 0. 681 0(16× 10)	- 0. 680 8(19× 10)	- 0. 681 0(9× 9)
- 0. 580 0(118× 4)	- 0. 682 0(13× 9)	- 0. 681 1(17× 10)	- 0. 680 9(20× 10)	- 0. 680 9(10× 10)
- 0. 580 0(134× 4)	- 0. 682 0(14× 9)	- 0. 681 1(18× 10)	- 0. 680 9(21× 10)	- 0. 680 9(11× 10)

表 3 给出流体绕过两个完全相同扁球 ($\beta = 0.7$) 时的结果, 其中两个扁球的对称轴均与来流方向(即总体坐标系的 Z 轴方向) 平行, 两扁球的中心均在总体坐标系的 X 轴上。我们考虑一种比较困难的算例, 即两体几乎接触(扁球中心间的无量纲距离 $d/(2b) = 1.01$) 的情况。在计算中可以看到一个明显的特点: 如果 M 充分大, 则计算结果可以稳定地收敛到四位有效数字不变(即 M 和 IJ 进一步增加时 λ_j 不再改变); 而如果只增加 IJ 而将 M 固定为某个较小的数值时(例如 $M = 6$), 则计算结果可能会收敛到一个伪值。这种计算当中的伪收敛现象应当通过这种办法来避免: 在增加 IJ 的同时, 要不断地增加 M 。

2.2 方法的准确性

在表 4 中本文的计算结果与 Goldman 等人^[16] 得到的准确解进行了比较, 此时两个相同圆

球(半径为 b) 静止于均匀来流中, 来流的方向垂直于两球中心连线(即 Z 轴方向, 见图 1)• 从表中可见, 对于 Z 轴方向的阻力修正因子 λ_z , 无论两球间的距离为多少(除去两球相接触的情况), λ_z 可收敛到五位有效数字与准确解一致; 而当两球相接触时(即 $d/(2b) = 1.0$), λ_z 有四位有效数字与准确解一致• 当两球的距离分别为 $d/(2b) \geq 2$, $2 > d/(2b) > 1$ 和 $d/(2b) = 1$ 时, 平行于 Y 轴方向的阻力矩修正因子 μ_y 可分别收敛到五位, 四位和三位有效数字与准确解相同• 数值试验表明, 本文的方法不仅能准确计算像 λ_z 和 μ_y 那样的宏观量, 而且可以计算局部流场的细微结构, 例如两球间存在的涡旋• 显然, 为了获得同样精度的收敛结果, 当两球逐渐接近时(即 $d/(2b) \rightarrow 1$ 时), M 和 IJ 的数值都应当增大•

表 4 当 $\beta = 0.999999$ 时本文数值结果与准确解与 Goldman 等^[16]的比较
(此时均匀流体绕过两个相同的圆球, 球中心连续垂直于来流方向)

间距 ($d/2b$)	准确解 (λ_z)	本文结果 λ_z	准确解 (μ_y)	本文结果 μ_y	$I \times J$	M
10	0.963 80	0.963 80	$0.180\ 70 \times 10^{-2}$	$0.180\ 70 \times 10^{-2}$	25×15	75
9	0.959 93	0.959 93	$0.222\ 19 \times 10^{-2}$	$0.222\ 19 \times 10^{-2}$	25×15	75
8	0.955 12	0.955 12	$0.279\ 79 \times 10^{-2}$	$0.279\ 79 \times 10^{-2}$	25×15	75
7	0.949 01	0.949 01	$0.363\ 07 \times 10^{-2}$	$0.363\ 07 \times 10^{-2}$	25×15	75
6	0.940 95	0.940 95	$0.489\ 93 \times 10^{-2}$	$0.489\ 93 \times 10^{-2}$	25×15	75
5	0.929 87	0.929 87	$0.697\ 03 \times 10^{-2}$	$0.697\ 03 \times 10^{-2}$	25×15	75
4	0.913 63	0.913 63	$0.106\ 95 \times 10^{-1}$	$0.106\ 95 \times 10^{-1}$	25×15	75
3	0.887 54	0.887 54	$0.184\ 41 \times 10^{-1}$	$0.184\ 41 \times 10^{-1}$	25×15	75
2	0.838 83	0.838 83	$0.389\ 10 \times 10^{-1}$	$0.389\ 10 \times 10^{-1}$	25×15	75
1.543 1	0.799 57	0.799 57	$0.613\ 14 \times 10^{-1}$	$0.613\ 13 \times 10^{-1}$	25×15	75
1.000 5	0.725 52	0.725 52	0.117 9	0.117 7	30×20	100
1	0.724 69	0.724 66	0.118 7	0.118 5	30×20	200

表 5 给出单个扁球在均匀来流中的本文计算结果和准确解(Happel 和 Brenner[15], 第 149, 223 页) 的比较, 其中我们只考虑来流方向平行或垂直于扁球旋转轴(z_j) 的情况• 从表中可见, 当短长轴之比 $\beta > 0.5$ 时, 计算结果收敛到四位有效数字与准确解相同, 而当 $\beta = 0.4$ 或 $\beta = 0.3$ 时, 分别收敛到三位或两位有效数字与准确解相同• 显然, 当短长轴之比 β 较小时, 计算时需要较大的 M 和 IJ , 因而计算量也较大• 例如, 当计算 $\beta = 0.7$ 的情况时, ELXI6400 小型计算机(时钟频率为 40MHz, 速度为 17MIPS) 需要 CPU 时间 100 秒和内存 400KB; 而当 $\beta = 0.3$ 时, 同样的计算精度需要 CPU 时间 3000 秒和内存 8000KB• 由于计算机速度和容量的限制, 本文只计算了 $\beta \geq 0.3$ 时的情况•

数值试验表明, 应用本文的方法, 当去掉一个或两个边界配置点, 移动一部分或全部配置点时, 计算收敛的结果不受影响• 因而 Ganatos 等人^[4] 所遇到的收敛性差的困难在此全部得到了解决• 所有这些表明, 本文所采用的最小二乘配置点法具有计算稳定性好和准确度高的特点•

从上面的讨论中可以看到, 当扁球的短长轴比或物体间的距离减少时, 计算中 M 和 IJ 需要采用较大的数值• 在下文的计算中, 我们将利用表 1~ 5 的结果作为指导来选取适当的 M ,

I 和 J 的数值, 从而确保计算结果的收敛。

表 5 单个扁球情况下本文数值结果与 Happel 和 Brenner^[15] 所得准确解的比较

(a) 扁球沿平行于对称轴方向移动				
短长轴比 (β)	准确解 λ	本文结果 λ	$I \times J$	M
1.0	1.0	1.0	30×20	85
0.9	0.980 1	0.980 1	30×20	135
0.8	0.960 6	0.960 6	30×20	135
0.7	0.941 5	0.941 5	30×20	135
0.6	0.923 0	0.923 0	30×20	135
0.5	0.905 3	0.905 3	30×20	175
0.4	0.888 8	0.888 5	30×20	175
0.3	0.874	0.872	30×25	225
(b) 扁球沿垂直于对称轴方向移动				
短长轴比 (β)	准确解 λ	本文结果 λ	$I \times J$	M
1.0	1.0	1.0	30×23	85
0.9	0.959 7	0.959 7	30×23	85
0.8	0.918 9	0.918 9	30×23	85
0.7	0.877 5	0.877 5	30×23	85
0.6	0.835 5	0.835 5	30×23	85
0.5	0.792 7	0.792 7	30×20	125
0.4	0.749 2	0.748 6	30×20	160
0.3	0.705	0.700	30×25	225

2.3 两个扁球的算例

下面考虑均匀流体绕过两个静止扁球的情况, 两扁球的中心均位于 X 轴上并且它们的对称轴均平行于 Z 轴(见图 1 和图 3 内的插图)。由于 Stokes 流动是线性的, 从而一个任意方向的流动可以分解为三个分别沿 X , Y 和 Z 轴方向流动的线性迭加。对于这种两个扁球的情形, Stokes 流动的一个显著特征是, 无论流动是沿 X , Y 或 Z 轴方向, 任一扁球上的流体作用力都与来流方向相同(即无侧向力存在)。下面我们系统地研究一下两扁球间距 d/b , 短长轴比 β , 两扁球的相对大小和短长轴比的差异对阻力和阻力矩修正因子的影响。在这一节中, 当来流分别沿 Z 或 Y 轴方向时, 我们只讨论沿 Y 或 Z 轴方向的力矩。

当两个相同的扁球其短长轴比 $\beta = 0.7$ 时, 图 3 给出两扁球间短 d/b 的效应。在本图和下面的各图中, 符号 X , Y , Z 分别代表沿 X , Y , Z 方向的流动, 图右侧的箭头表示当 $d \rightarrow \infty$ 时的结果(即单个扁球时的结果, 源自 Happel 和 Brenner^[15], 第 149 页, 223 页)。从图 3(a) 可见, 两个扁球间的流体相互作用使得每个扁球上的作用(阻)力都比只有单个扁球时的小。当 d/b 增加时, 流体作用力单调增加并趋近于 $d \rightarrow \infty$ 时的极限值(当 $d/b = 20$ 并且流动分别沿着 X , Y 和 Z 轴方向时, 作用力分别达到极限值的 96.8%, 98.4% 和 96.6%)。 Z 轴方向的流动引起的流体阻力最大, 而 X 轴方向的流动——最小。图 3(b) 表明, 由于对称性, 沿 X 轴方向的流动不引起阻力矩; 而沿 Y 轴方向的流动引起的阻力矩最大, 沿 Z 轴方向的流动次之。阻力

矩的方向倾向于使两个扁球向内翻转。当 d/b 增加时, 上述两种力矩均单调减少并趋于零。

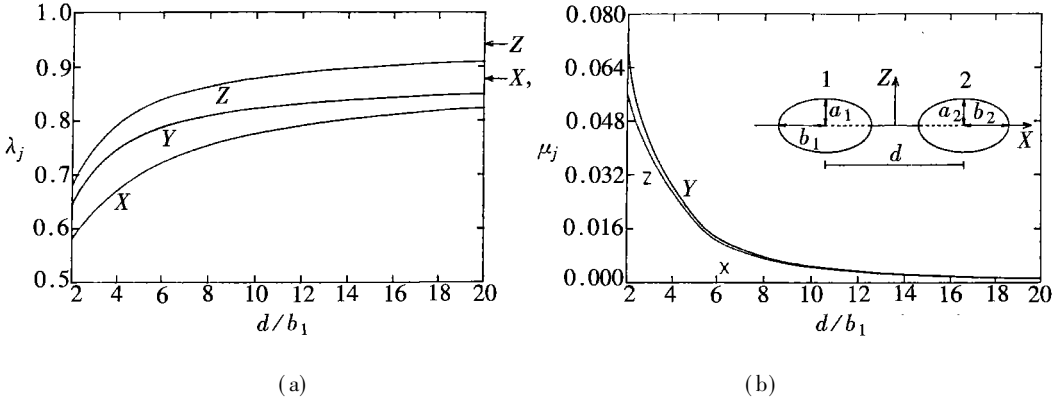


图3 扁球中心间距离 d 的变化对(a)阻力修正因子 λ_j 和(b)阻力矩修正因子 μ_j 的影响(X, Y 和 Z 分别代表沿 X-, Y- 和 Z 方向的均匀来流。其中 $\beta_1 = \beta_2 = 0.7, b_1 = b_2$)

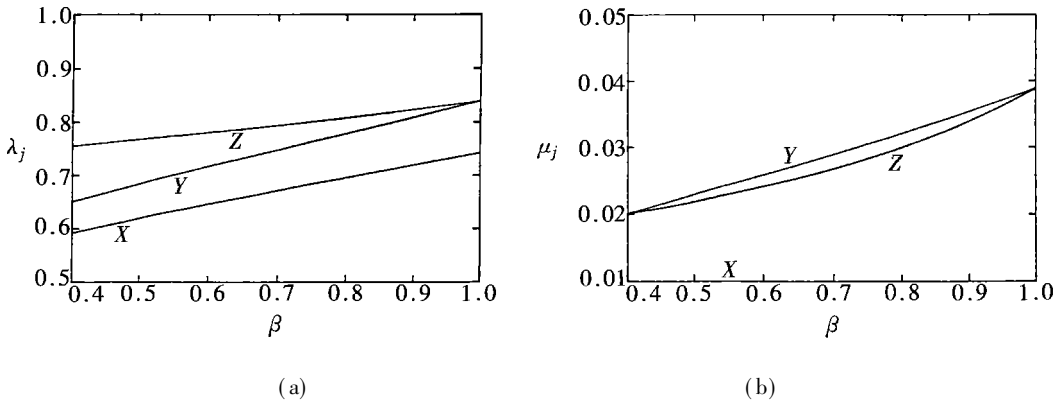


图4 扁球短长轴比 β 的变化对(a)阻力修正因子 λ_j 和(b)阻力矩修正因子 μ_j 的影响(X, Y 和 Z 分别代表沿 X-, Y- 和 Z 方向的均匀来流。其中 $b_1 = b_2 = b, d = 4b, a_1 = a_2 = a$)

图4给出两个相同扁球同时改变其短长轴比 β 时的效应。为此, 将两扁球的长轴半径 b 和间距 d 固定($d/b = 4.0$), 从而可通过同时变化两扁球的短轴半径 a 来改变 β 。从图4(a)可见, 当 β 从 1.0 逐渐减小时(即逐渐偏离圆球形状时), 阻力修正因子 λ_j 几乎是线性地减小。在 $0.4 \leq \beta \leq 1$ 的范围内, 沿 Z 轴方向的流动引起的阻力最大, 而沿 X 轴方向的流动最小。图4(b)说明, 沿 Y 轴方向流动一般要比沿 Z 轴方向流动引起的阻力矩大, 只有当 $\beta = 1.0$ 和 0.4 时例外(此时两个方向流动所引起的阻力矩相等)。当 $\beta = 0.7$ 时, 这两个方向流动所引起的阻力矩相差最大。图4中的现象可从下面两个因素的共同作用来解释: i) 当 β 减小时, 短轴半径 a 也减小, 从而流体剪切力作用的面积在减小; ii) 当 β 减小时, 由于另一扁球存在而引起的流体剪切力的不对称性在减弱。

图5给出两个几何形状相似的扁球当相对大小改变时对 λ_j 和 μ_j 的影响。考虑两个 $\beta = 0.7$ 的扁球, 它们中心的距离为 $d = 2(b_1 + b_2)$, 其中 b_1 和 b_2 是扁球的主轴半径。现在我们通过固定 $(b_1 + b_2)$ 并改变比值 $K = b_1/b_2$ 的方法, 来考查相对于每一个扁球的 λ_j 和 μ_j 的变化。请注意 λ_j 和 μ_j 是由固定的特征长度 $R = 0.5(b_1 + b_2)$ 通过公式(20a, b) 来定义的。在图5中我们只选择了 $K \geq 1$ 的情况, 并且用符号 L 和 S 代表较大和较小的扁球(即扁球 1 和扁

球 2)• 从图 5(a) 可见, 当 K 增加时, 大扁球上的阻力单调增加并趋近于单个扁球存在时的数值(当 $K \rightarrow \infty$ 时), 而小扁球上的阻力则逐渐减小并趋近于零• 图 5(b) 表明, 尽管 $K \rightarrow \infty$ 时所有的阻力矩都趋近于零, 但当流动方向垂直于两扁球中心连线时, 大扁球上的阻力矩在 $k = 2.6$ 时达到最大值• 这一现象可用下面两个因素的相互抵消来解释: i) 当 K 增加时, 大扁球的表面积在增加; ii) 当 K 增加时, 小扁球对大扁球的影响会减少, 从而作用于大扁球上剪切力的不对称性在减小•

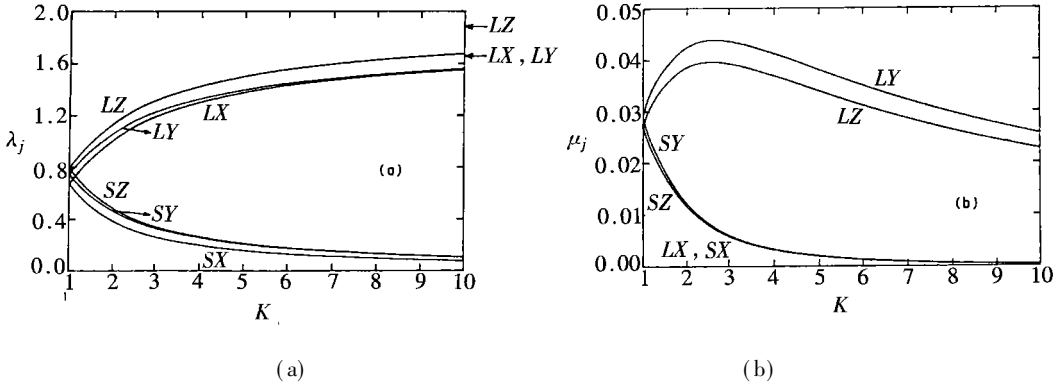


图 5 扁球相对大小(由比率 $k = b_1/b_2$ 来定义) (a) 阻力修正因子 λ_j 和 (b) 阻力矩修正因子 μ_j 的影响(扁球中心间距离 d 及 b_1, b_2 固定不变, L 和 S 表示较大和较小的扁球, X, Y 和 Z 分别代表 $X-, Y-$ 和 Z 轴方向的均匀来流, 其中 $\beta_1 = \beta_2 = 0.7$)

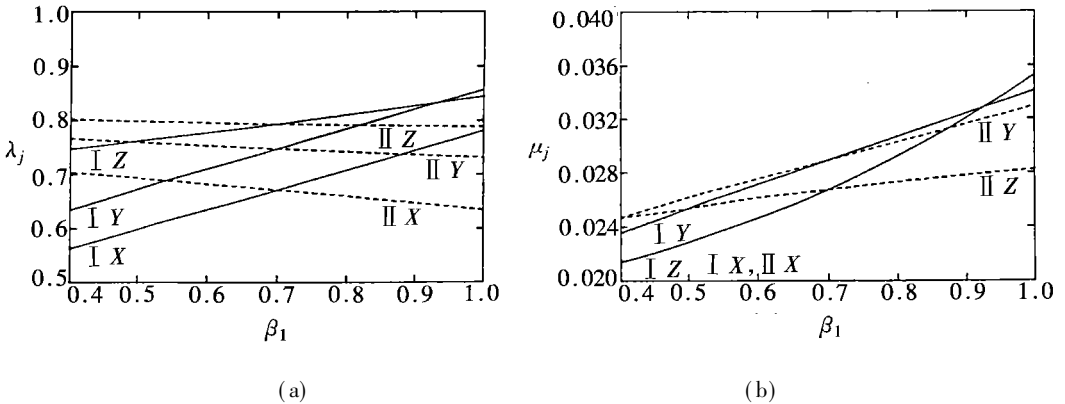


图 6 一个扁球短长轴比 β_1 的变化对 (a) 阻力修正因子 λ_j 和 (b) 阻力矩修正因子 μ_j 的影响(其中 $\beta_2 = 0.7, b_1 = b_2 = b$ 和 $d = 4b$ 固定不变, X, Y 和 Z 分别代表沿 $X-, Y-$ 和 Z 轴方向的均匀来流)

在图 6 中我们考查了不同短长轴比的两个扁球的情况• 这两个扁球的长轴半径相等 ($b_1 = b_2 = b$), 并且两扁球的距离固定为 $d = 4b$ • 符号 I 和 II 分别代表扁球 1(具有可变的短长轴比 β_1) 和扁球 2(具有固定的短长轴比 $\beta_2 = 0.7$)• 阻力和阻力矩修正因子 λ_j 和 μ_j 由(20a, b) 式来定义, 其中 $R = b$ • 从图 6(a), (b) 可见, 当 β_1 从 $\beta_1 = 1.0$ (圆球形状) 逐渐减小时, 扁球 1 上的阻力逐渐减小而扁球 2 上的阻力却略有增加, 并且两个扁球上的阻力矩都在逐渐减小• 值得注意的是, 在 β_1 变化的大部分范围内, 来流沿 Z 轴方向时扁球 1 上的阻力要比来流沿 Y 轴方向时的大, 而来流沿 Y 轴方向时扁球 1 的阻力矩要比来流沿 Z 轴方向时的大, 只有当 β_1 靠近 1.0 时这种情况才改变• 这些现象可用类似于图 5 中的说明来解释•

2.4 三个扁球的算例

在第 1 节中推导并得到的基本解可用来处理任意(有限)多个扁球处于任意位置和方向时的三维 Stokes 流动问题(不局限于均匀流动)• 唯一的限制来自于计算机性能的高低(特别是处理大矩阵的能力)•

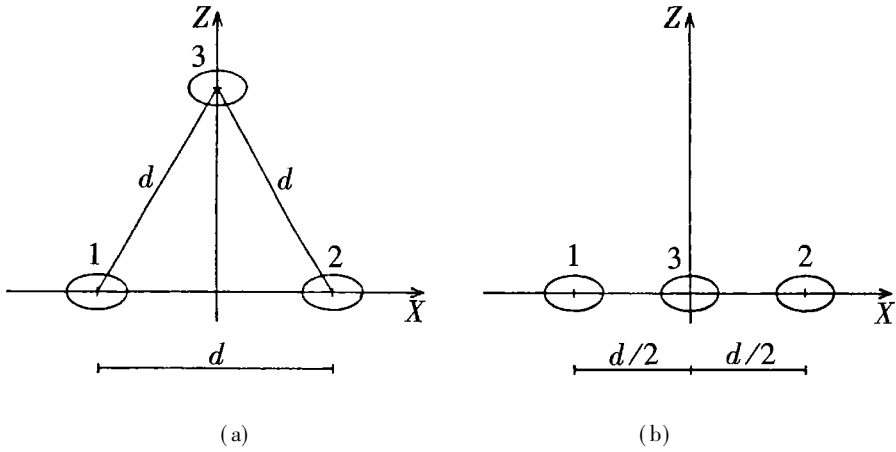


图 7 均匀来流流动绕过三个相同扁球时的扁球分布情况(其中 $\beta = 0.7$, $d = 6b_1$)

为了显示本文所用方法的通用性,下面我们考虑均匀流动绕过三个相同扁球($\beta = 0.7$)的情况,其中扁球的对称轴均平行于 Z 轴并位于 $Y = 0$ 的平面内• 三个扁球按以下两种情形分布:扁球的中心分别位于等边三角形的三个角上(见图 7(a))或者等距离位于 X 轴上(见图 7(b)),其中 $d = 6b_1$ • 表 6 给出阻力和阻力矩修正因子的计算结果,其中 λ_{1X} 表示作用于扁球 1 上的力沿 X 轴方向的分量,并依此类推,表中没有列出的量均为零• 三个扁球问题具有一些两个扁球问题所没有的特点,其中包括: i) 当三个扁球在一串上时可以观察到明显的屏蔽效应,即无论什么方向的来流,中间扁球所受到的阻力小于两边的扁球; ii) 当三个扁球的中心呈三角形时,扁球上存在侧向力作用(当来流沿 Z 轴方向时,侧向力使扁球 1 和 2 相互靠近;当来流沿 X 轴方向时,侧向力使扁球 1 靠近扁球 3 而扁球 2 远离扁球 3); iii) 对于三个扁球在一串上的情况,当来流沿 Y 轴或 Z 轴方向时,扁球 1 和 2 所受到的力矩将由于扁球 3 在它们的中间而增大,此力矩使扁球 1 和 2 向内翻转•

3 结 论

本文提出了扁球坐标系下三维 Stokes 流动的一个新基本解,它适用于处理任意多个扁球处于任意位置和方向时的流动问题• 应用多极子配置点法解决三维流动问题时常会遇到收敛性差的困难,本文深入地研究了最小二乘配置点法并且利用该方法解决了这一难题• 数值试验表明,通过适当增加配置点个数和多极子级数的项数,本文法具有极好的收敛性• 由于在个别情况下存在解析解,从而可以与本方法进行比较,结果表明本方法具有很高的准确度• 本文首次系统地研究了各种几何因素对 Stokes 流动中的两个扁球所受力和力矩的影响,并且通过两个三扁球问题的算例说明了本方法的通用性• 而在以前, Yoon 等人^[11]只研究了两个扁球问题的几个特殊例子• 我们的所有算例都表明,本文提出的方法具有计算准确度,稳定性好和计算量小的特点•

本文的算例还表明,当两个扁球的旋转对称轴相互平行并垂直于两求中心连线时,其流体

动力的一些特性是两个圆球所不具备的。正如在第二部分中曾讨论过的, 流动方向、扁球短长轴比、物体间距离以及扁球相对大小对作用于每个扁球上的力矩都有着复杂而有趣的影响。在许多实际问题中, 当扁球用来模拟红血球、血小板或其它物体时, 这些新的结果将有很高的价值。

表 6 均匀流动绕过三个扁球时的情况

	三个扁球按等边三角形分布	三个扁球按直线分布
(a) 来流沿 X 轴方向		
λ_{1X}	- 0. 643 8	- 0. 583 0
λ_{2X}	- 0. 643 8	- 0. 583 0
λ_{3X}	- 0. 705 3	- 0. 431 1
λ_{1Z}	0. 040 94	0
λ_{2Z}	- 0. 040 94	0
μ_{1Y}	- 0. 005 759	0
μ_{2Y}	- 0. 005 759	0
μ_{3Y}	0. 012 607	0
(b) 来流沿 Y 轴方向		
λ_{1Y}	- 0. 718 6	- 0. 666 6
λ_{2Y}	- 0. 718 6	- 0. 666 6
λ_{3Y}	- 0. 721 7	- 0. 563 2
μ_{1X}	0. 009 232	0
μ_{2X}	0. 009 232	0
μ_{3X}	- 0. 018 468	0
μ_{1Z}	- 0. 018 39	- 0. 050 59
μ_{2Z}	0. 018 39	0. 050 59
(c) 来流沿 Z 轴方向		
λ_{1X}	0. 039 55	0
λ_{2X}	- 0. 039 55	0
λ_{1Z}	- 0. 722 2	- 0. 705 1
λ_{2Z}	- 0. 722 2	- 0. 705 1
λ_{3Z}	- 0. 645 1	- 0. 583 3
μ_{1Y}	0. 019 12	0. 046 16
μ_{2Y}	- 0. 019 12	- 0. 046 16

另外, 本文推导三维 Stokes 流动基本解的方法可以用来寻找其它正交坐标系中的基本解, 从而解决物体形状与该坐标系相关的 Stokes 流动问题, 例如, 利用长球坐标系来解决与长球有关的问题。

由于我们的计算机在速度和容量方面的限制, 本文中的算例都限定在扁球短长轴比 $\beta \geq 0.3$ 的情况, 对于 $\beta < 0.3$ 的情况似乎需要特殊的办法, 这将是后续研究中的一个课题。

附录 方程(7)式的推导及修正的连带 Legendre 函数的一些性质

在扁球坐标系中(见图2), Laplace 方程 $\Delta^2 X = 0$ 具有如下形式:

$$\sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\cosh \xi \frac{\partial X}{\partial \xi} \right] + \cosh \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sin \eta \frac{\partial X}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{\cosh \xi}{\sin \eta} - \frac{\sin \eta}{\cosh \xi} \right] \frac{\partial^2 X}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A. 1})$$

引入变量 p 和 q , 它们的定义为

$$p = i \sinh \xi, \quad q = \cos \eta,$$

并且通过如下方式分离函数 X 的变量

$$X = U(p) \cdot V(q) \cdot \cos(m\phi + \alpha_m),$$

则可得到下面的连带 Legendre 方程:

$$(1 - p^2) \frac{d^2 U}{dp^2} - 2p \frac{dU}{dp} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-p^2} \right] U = 0, \quad (\text{A. 2a})$$

$$(1 - q) \frac{d^2 V}{dq^2} - 2q \frac{dV}{dq} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-q^2} \right] V = 0 \quad (\text{A. 2b})$$

此方程的解为

$$U(p) = C_1 P_n^m(p) + C_2 Q_n^m(p), \quad V(q) = C_3 P_n^m(q) + C_4 Q_n^m(q),$$

其中 P_n^m 和 Q_n^m 分别是第一类和第二类连带 Legendre 函数, C_1, C_2, C_3, C_4 是常数. 因为函数 $Q_n^m(q)$ 在 $q = -1$ 和 $q = 1$ 处有奇点, 并且函数 $P_n^m(p)$ 在 $p \rightarrow \infty$ 时无界, 方程(A. 1) 的常规解应该具有如下形式:

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(q) \cdot Q_n^m(p) \cdot [A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi], \quad (\text{A. 3})$$

其中 A_{mn} 和 B_{mn} 是常数. 请注意 $Q_n^m(p)$ 是自变量为虚数的复函数, 这会给计算带来一些困难. 下面我们将此函数转化为实数形式.

设 $p = ip$ (即 $p = \sinh \xi$) 并且 $U(p) = W(p)$, 则方程(A. 2a) 可写如下形式

$$(1 + p^2) \frac{d^2 W}{dp^2} + 2p \frac{dW}{dp} - \left[n(n+1) + \frac{m^2}{1+p^2} \right] W = 0 \quad (\text{A. 4})$$

这是修正的连带 Legendre 方程, 它的基本解 $P_n^m(p)$ 和 $Q_n^m(p)$ 分别称为第一类和第二类修正的连带 Legendre 函数. $P_n^m(p)$ 和 $Q_n^m(p)$ 都是实函数, 它们与函数 $P_n^m(ip)$ 和 $Q_n^m(ip)$ 的关系为

$$P_n^m(p) = (-i)^n P_n^m(ip), \quad Q_n^m(p) = (-1)^n (-i)^{n-m+1} Q_n^m(ip). \quad (\text{A. 5})$$

将公式(A. 5)代入(A. 3)式, 则可得到

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(q) \cdot Q_n^m(p) \cdot [A_{mn} \cos m\phi + B_{mn} \sin m\phi]. \quad (\text{A. 6})$$

这样, 我们就完成了方程(7)式的推导.

函数 $Q_n^m(p)$ 具有如下一些性质:

$$\begin{cases} Q_n^m(p) = (-1)^n (1+p^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(p)}{dp^m}, \\ Q_n(p) = (-1)^n P_n(p) \left[\arctan p - \frac{\pi}{2} \right] + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} (-1)^k P_{n-2k+1}(p), \\ P_n(p) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(2-2k)!}{2^k k! (n-k)! (n-2k)!} p^{n-2k}, \\ Q_n^m(p) = O(p^{-(n+1)}) \quad (p \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (\text{A. 7})$$

其中 $P_n(p) = P_n^0(p)$ 和 $Q_n(p) = Q_n^0(p)$ 分别是修正的第一类和第二类 Legendre 函数.

在本文的工作中, 需要大量地数值计算函数 $P_n^m(q)$, $Q_n^m(p)$ 以及它们的导函数. 为此, 一个方便的方法是利用递推公式来进行计算. 对于函数 $Q_n^m(p)$, 我们推导出如下的递推关系

$$\begin{cases} (2n+1)pQ_n^m = (n+m)Q_{n-1}^m - (n-m+1)Q_{n+1}^m, \\ Q_n^{m+2} = -2(m+1)p(1+p^2)^{1/2}Q_{n+1}^{m+1} + (n-m)(n+m-1)Q_n^m, \\ (1+p^2)^{1/2} \frac{dQ_n^{m+1}}{dp} = Q_n^m + mp(1+p^2)^{-1/2}Q_n^m, \\ (1+p^2) \frac{d^2Q_n^m}{dp^2} = -2p \frac{dQ_n^m}{dp} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1+p^2} \right] Q_n^m. \end{cases} \quad (A.8)$$

尽管这些递推公式在理论上对任何数值 p 都有效, 但只有当 $0 \leq p \leq 1.1$ 时它们才是数值稳定的。数值试验表明, 当 $p > 1.1$ 时, 舍入误差的迅速放大导致了这些公式的失效。为了克服这一困难, 我们导出了 $p \rightarrow \infty$ 时函数 $Q_n^m(p)$ 的渐近表达式:

$$\begin{cases} Q_{2n}^m(p) = (1+p^2)^{m/2} \sum_{l=n+1}^{\infty} (-1)^{n+l} \frac{(l-n)_n (2l-1)_m}{2 \left[l - \frac{1}{2} \right]_{n+1}} p^{-(2l-m)}, \\ Q_{2n+1}^m(p) = (1+p^2)^{m/2} \sum_{l=n+1}^{\infty} (-1)^{n+l} \frac{(l-n)_n (2l)_m}{2 \left[l + \frac{1}{2} \right]_{n+1}} p^{-(2l+m)}, \end{cases} \quad (A.9)$$

其中 $(\alpha)_n$ 定义为

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1), \quad (\alpha)_0 = 1.$$

当 $p > 1.1$ 时, 通过这些公式可以得到非常准确的计算结果。同时利用公式(A.8)和(A.9), 则可对 p 所有范围内的数值(即 $p \geq 0$) 准确地计算函数 $Q_n^m(p)$ 及其导函数。

完全相似地, 函数 $P_n^m(q)$ 及其导函数在 $0 \leq q \leq 0.9$ 时由递推公式计算, 而在 $0.9 < q \leq 1.0$ 时由渐近公式来计算。我们推导出的这个渐近公式如下:

$$P_n^m(q) = \frac{1}{2^m m!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (1-q^2)^{m/2} \sum_{l=0}^{n-m} \frac{(-n+m)_l (n+m+l)_l}{l! (m+1)_l} \left(\frac{1-q}{2} \right)^l. \quad (A.10)$$

致谢 感谢中国自然科学基金对本文工作的支持。特别感谢温功碧教授对我们工作的宝贵建议和计算机使用方面的大力帮助。

[参 考 文 献]

- [1] Weinbaum S, Ganatos P, YAN Zong_yi. Numerical multipole and boundary integral equation techniques in Stokes flow[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1990, 22: 275—316.
- [2] Gluckman M J, Pfeffer R, Weinbaum S. A new technique for treating multiparticle slow viscous flow: axisymmetric flow past spheres and spheroids[J]. J Fluid Mech, 1971, 50(4): 705—740.
- [3] Guckman M J, Weinbaum S, Pfeffer R. Axisymmetric slow viscous flow past an arbitrary convex body of revolution[J]. J Fluid Mech, 1972, 55(4): 677—709.
- [4] Ganatos P, Pfeffer R, Weinbaum S. A numerical_solution technique for three_dimensional Stokes flows, with application to the motion of strongly interacting spheres in a plane[J]. J Fluid Mech, 1978, 84(1): 79—111.
- [5] YAN Zong_yi, Weinbaum S, Ganatos P, et al. The three_dimensional hydrodynamic interaction of a finite sphere with a circular orifice at low Reynolds number[J]. J Fluid Mech, 1987, 174: 39—68.
- [6] Hassonjee Q, Ganatos P, Pfeffer R. A strong_interaction theory for the motion of arbitrary three_dimensional clusters of spherical particles at low Reynolds number[J]. J Fluid Mech, 1988, 197: 1—37.
- [7] Leichtberg S, Peffer R, Weinbaum S. Stokes flow past finite coaxial clusters of spheres in a circular cylinder[J]. Int J Multiphase Flow, 1976, 3(2): 147—169.
- [8] Ganatos P, Weinbaum S, Pfeffer R. A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere

- between plane parallel boundaries. Part 1. Perpendicular motion[J]. *J Fluid Mech*, 1980, **99**(4): 739—753.
- [9] Garatos P, Pfeffer R, Weinbaum S. A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere between plane parallel boundaries. Part 2. Parallel motion[J]. *J Fluid Mech*, 1980, **99**(4): 755—783.
- [10] Dagan Z, Weinbaum S, Pfeffer R. General theory for the creeping motion of a finite sphere along the axis of a circular orifice[J]. *J Fluid Mech*, 1982, **117**: 143—170.
- [11] Yoon B J, Kim S. A boundary collocation method for the motion of two spheroids in Stokes flow: hydrodynamic and colloidal interactions[J]. *Int J Multiphase Flow*, 1990, **16**(4): 639—649.
- [12] Hsu R, Garatos P. The motion of a rigid body in viscous fluid boundary by a plane wall[J]. *J Fluid Mech*, 1989, **207**: 29—72.
- [13] 是长春, 王为国, 吴望一. 圆球沿无限长锥形管道运动时的轴对称蠕流[J]. *北京大学学报(自然科学版)*, 1988, **24**(1): 85—94.
- [14] Lamb H. *Hydrodynamics* [M]. 6th edn. New York: Dover, 1945.
- [15] Happel J, Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics* [M]. 2nd edn. The Hague: Martinus Noordhoff Publishers, 1973.
- [16] Goldman A J, Cox R G, Brenner H. The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid[J]. *Chem Eng Sci*, 1966, **21**(12): 1151—1170.

The Three Dimensional Fundamental Solution to Stokes Flow in the Oblate Spheroidal Coordinates With Applications to Multiple Spheroid Problems

ZHUANG Hong^{1,2}, YAN Zong_yi¹, WU Wang_yi¹

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking

University, Beijing 100871, P R China;

2. 4837_267_605, Pharmaceutical Sciences, Pharmacia Corporation 301,

Henrietta Street, Kalamazoo, Michigan, U S A)

Abstract: A new three dimensional fundamental solution to the Stokes flow was proposed by transforming the solid harmonic functions in Lamb's solution into expressions in terms of the oblate spheroidal coordinates. These fundamental solutions are advantageous in treating flows past an arbitrary number of arbitrarily positioned and oriented oblate spheroids. The least squares technique was adopted herein so that the convergence difficulties often encountered in solving three dimensional problems were completely avoided. The examples demonstrate that present approach is highly accurate, consistently stable and computationally efficient.

The oblate spheroid may be used to model a variety of particle shapes between a circular disk and a sphere. For the first time, the effect of various geometric factors on the forces and torques exerted on two oblate spheroids were systematically studied by using the proposed fundamental solutions. The generality of this approach was illustrated by two problems of three spheroids.

Key words: Stokes flow; fundamental solution; three dimension; oblate spheroid; multipole collocation; least squares method; low Reynolds number; multiple particle