文章编号: 1000_0887(2002) 05_0526_07

一类条件数为常数的随机辛阵的性质*

闫庆友

(大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(戴世强推荐)

摘要: 对 A. Bunse_Gerstner 和 V. Mehrmann 使用的一种随机辛阵的性质进行了研究• 证明了 1) 其可以通过正交相似变换化为一种特殊的 Schur 标准型; 2) 其条件数为一常数; 3) 该常数约为 2.618•

关 键 词: 辛矩阵; QR 型算法; 特征值; 条件数; 约当标准型; Schur 标准型
中图分类号: O241.6 文献标识码: A

引 言

文[1]和文[2]为了求解离散时间的实代数 Riccati 方程和连续时间的实代数 Riccati 方程, 分别提出了求解与它们相对应的Symplectic 矩阵和 Hamilton 矩阵的稳定的不变子空间的QR 型(SR) 算法• 对这两种算法的研究在线性最优控制中具有非常重要的意义• 在这些算法中, 为了保持矩阵的 Symplectic 结构和 Hamilton 结构, 使用的相似变换都是辛变换• 由于辛变换矩阵不一定是正交的, 算法存在着中断和严重失稳这一致命弱点• 当这两种算法遇到中断和严重失稳时, 随机生成一形如 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 随机辛阵, 用其对 Symplectic 矩阵和 Hamilton 矩阵进行处理, 以使得算法可以继续进行• 因此, 对此辛矩阵的性质的研究变得极有价值• 本文证明了: 1) 其可以通过正交相似变换化为一种特殊的Schur 标准型; 2) 其条件数为一与 $\boldsymbol{w}$ 无关的常数; 3) 该常数仅为$(3+\sqrt{5})/2$• 这些结论对改进 SR 算法和检验保结构算法的有效性极具实际意义•

1 预 备 结 果

定义[2] 设 $\boldsymbol{S} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$, 如果

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{J}, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵, 则称 $\boldsymbol{S}$ 为辛矩阵•

定理 1 设 $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^{2n}$, 则

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}•$$

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2001_12_04
基金项目: 国家重点基础研究项目(G1999032805) ; 国家教委博士点科研基金资助项目
作者简介: 闫庆友(1963—) , 男, 山东茌平人, 副教授, 博士.

证明　略. □

定理 2[3, 命题2.2]　设 $\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{2n\times 2n}$ 是一辛阵, 如果 $\lambda\in\lambda(\boldsymbol{S})$($\lambda(\boldsymbol{S})$ 表示 $\boldsymbol{S}$ 的特征谱), 则 $\frac{1}{\lambda}\in\lambda(\boldsymbol{S})$.

证明　因为 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{J}$, 所以 $\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{S}^{-1}$. 即 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 相似. 故 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 有相同的特征值, 进而推出 $\boldsymbol{S}$ 与 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 有相同的特征值. 所以, 如果 $\lambda\in\lambda(\boldsymbol{S})$, 则 $\frac{1}{\lambda}\in\lambda(\boldsymbol{S})$. □

2　主要结果

定理 3　设 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, 则

1) $\boldsymbol{S}$ 为辛阵;

2) $\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$;

3) $1\in\lambda(\boldsymbol{S})$.

证明　1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{S}=&(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=\\&(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{J}(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=\\&(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=\\&\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}.\end{aligned}$$

2) 因为
$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=\\&\quad\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{I}_{2n}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{I}_{2n}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$.

3) 由定理 1 知 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$. 所以
$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}.$$

故 $1\in\lambda(\boldsymbol{S})$. □

定理 4　设 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{2n}$, 则 $\boldsymbol{u}\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})$ 的充分必要条件为
$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

证明　$\boldsymbol{u}\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})\Leftrightarrow(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. □

推论　设 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, 则
$$\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n}))=2n-1.$$

证明　因为 $\boldsymbol{u}\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$, 而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})=1$. 所以, 根据[4, 定理 0.5.7; 引理 0.5.8] 有 $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n}))=2n-1$ □

定理 5　设 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, 则 $\boldsymbol{S}$ 的特征值全为 1.

证明　因为 $\dim(\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n}))=2n-1$, 所以特征值 $\lambda=1$ 的重数至少为 $2n-1$. 如果存在另一个特征值 $\lambda\neq 1$, 由定理 2 知 $\frac{1}{\lambda}\neq 1$ 也是特征值, 从而 $\boldsymbol{S}$ 至少为 $2n+1$ 个特征值, 矛盾. 所以 $\boldsymbol{S}$ 的特征值全为 1. □

推论　设 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, 则 $\det(\boldsymbol{S})=1$, $\det(\boldsymbol{S}^{-1})=1$.

证明　略. □

定理 6 设 $w \in \mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $S = I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J$, 则

1) $\forall u \in \mathbf{R}^{2n}$, 都有 $(S - I_{2n})^2 u = 0$.

2) 令 $y = Jw$, 有 $(S - I_{2n})y \neq 0$, 而 $(S - I_{2n})^2 y = 0$.

证明 1) 由定理 1 知 $w^{\mathrm{T}}Jw = 0$, 所以

$$(S - I_{2n})^2 = (-ww^{\mathrm{T}}J)^2 = w(w^{\mathrm{T}}Jw)w^{\mathrm{T}}J = 0,$$

故 $\forall u \in \mathbf{R}^{2n}$, 都有 $(S - I_{2n})^2 u = 0$.

2) $(S - I_{2n})y = -ww^{\mathrm{T}}JJw = w \neq 0$. 由 1) 知 $(S - I_{2n})^2 y = 0$. □

推论 1 设 $w \in \mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $S = I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J$, 则 1) S 有且仅有一个非线性初等因子 $(\lambda - 1)^2$. 2) S 有 $2n-2$ 个相同的线性初等因子 $\lambda - 1$.

证明 由[4, 定理 6.4.7; 引理 6.4.8] 易知.

推论 2 设 $w \in \mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $S = I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J$, 则存在可逆矩阵 $X \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$, 使得 S 化为如下若当标准型

$$X^{-1}SX = \begin{pmatrix} I_{2n-2} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 由[5] 易知. □

定理 7 设 $w \in \mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $S = I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J$, $y = Jw$, u 为 S 的属于特征值 $\lambda = 1$ 的任意特征向量, 则

1) $(y, u) = 0$.

2) $Sy = w + y$.

证明 1) 因为

$$(y, u) = (Jw)^{\mathrm{T}}u = w^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}u = -w^{\mathrm{T}}Ju,$$

由定理 4 知 $u \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n})$ 的充分必要条件为 $w^{\mathrm{T}}Ju = 0$, 所以

$$(y, u) = 0. \tag{3}$$

2) $Sy = (I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J) = Jw - ww^{\mathrm{T}}JJw = w + Jw = w + y$. □

定理 8 设 $w \in \mathbf{R}^{2n}$ 是任意单位向量, $S = I_{2n} - ww^{\mathrm{T}}J$,

则 1) 存在正交矩阵 $U \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$, 使得 S 化为如下 Shur 标准型

$$U^{\mathrm{T}}SU = \begin{pmatrix} I_{2n-1} & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } v = [k_1, k_2, \cdots, k_{2n-1}]^{\mathrm{T}},\ k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{2n-1}^2 = 1.$$

2) $\mathrm{cond}_2(S) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ($\mathrm{cond}_2(S)$ 表示 S 的谱条件数).

证法Ⅰ 1) 设 $u_1, u_2, \cdots, u_{2n-1}$ 为 $\mathrm{Ker}(S - I_{2n})$ 的任意一组标准正交基. 又令 $u_{2n} = Jw$, 由定理 7 知 $u_1, u_2, \cdots, u_{2n-1}, u_{2n}$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 的一组标准正交基. 且

$$Su_i = u_i (i = 1, 2, \cdots, 2n-1), \quad Su_{2n} = w + u_{2n}.$$

设 $U = [u_1, u_2, \cdots, u_{2n-1}, u_{2n}]$, 则 U 为正交矩阵.

由定理 1 知 $w \in \mathrm{Ker}(S - I_{2n}) = \mathrm{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_{2n-1}\}$, 所以存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{2n-1}$, 满足 $k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{2n-1}^2 = 1$, 使得

$$w = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_{2n-1}u_{2n-1}.$$

于是

$$SU = [Su_1, Su_2, \cdots, Su_{2n-1}, Su_{2n}] =$$

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}] =$$
$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{J}\boldsymbol{w} + k_1\boldsymbol{u}_1 + k_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + k_{2n-1}\boldsymbol{u}_{2n-1}] =$$
$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{u}_{2n}]\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{S}$ 如下有 Shur 分解

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

2)

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\det(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{I}_{2n}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 & k_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & k_{2n-1} \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{2n-1} & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & k_2 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 & k_3 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & k_{2n-1} \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_{2n-1} & 2-\lambda \end{vmatrix} - k_1^2(1-\lambda)^{2n-2} = \cdots =$$
$$(1-\lambda)^{2n-1}(2-\lambda) - (1-\lambda)^{2n-2}(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_{2n-1}^2) =$$
$$(1-\lambda)^{2n-1}(2-\lambda) - (1-\lambda)^{2n-2} =$$
$$(\lambda-1)^{2n-2}(\lambda^2 - 3\lambda + 1),$$

因此 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}$ 的特征值为

$$\lambda_{\max} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{\min} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

所以, 根据[6, 7] 有

$$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{S}) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S})}} = \sqrt{\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

证法 II　1) 设 $\boldsymbol{e}_i(i = 1, \cdots, 2n)$ 为 $\boldsymbol{I}_{2n}$ 的第i 个列向量, $\boldsymbol{H}$ 为满足 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1$ 的 Householder 矩阵. 令 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{J}\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_{i+1}(i = 1, \cdots, 2n-1)$, $\boldsymbol{u}_{2n} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{w}$.

因为 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{H}$ 为 Houselholder 矩阵, 所以 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_1$, 故 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{u}_{2n}] = \boldsymbol{J}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{2n-1}, \boldsymbol{e}_1]$ 是正交矩阵.

因为 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_{i+1} = = -\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_{i+1} = -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{0}(i = 1, \cdots, 2n-1)$, 由定理 4 知 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}$ 为 $\boldsymbol{S}$ 的对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量.

由定理1和定理4知 $\boldsymbol{w}\in\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})$，故存在 $k_1, k_2, \cdots, k_{2n-1}$，满足 $k_1^2+k_2^2+\cdots+k_{2n-1}^2=1$，使得

$$\boldsymbol{w}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_{2n-1}\boldsymbol{u}_{2n-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{SU}&=[\boldsymbol{Su}_1, \boldsymbol{Su}_2, \cdots, \boldsymbol{Su}_{2n-1}, \boldsymbol{Su}_{2n}]=\\&[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{Jw}+\boldsymbol{w}]=\\&[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{Jw}+k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_{2n-1}\boldsymbol{u}_{2n-1}]=\\&[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-1}, \boldsymbol{u}_{2n}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{S}$ 如下有Schur分解

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{SU}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-1} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}. \tag{7}$$

2) 的证明与证法I 同.

证法III 1) 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-2}, \boldsymbol{w}$ 为包含 $\boldsymbol{w}$ 的 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}_{2n})$ 的标准正交基. 令 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{Jw}]$. 易证 $\boldsymbol{U}$ 为正交矩阵. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{SU}&=[\boldsymbol{Su}_1, \boldsymbol{Su}_2, \cdots, \boldsymbol{Su}_{2n-2}, \boldsymbol{Sw}, \boldsymbol{SJw}]=\\&[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-2}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{Jw}+\boldsymbol{w}]=\\&[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{2n-2}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{Jw}]\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}, \text{其中 } \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{S}$ 如下有Schur分解

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{SU}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

2)

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{2n-2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

所以

$$\det(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}-\lambda\boldsymbol{I}_{2n})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-1)^{2n-2}(\lambda^2-3\lambda+1).$$

因此可得定理结论. □

注 (8)说明，对于 $\boldsymbol{S}$ 来说，存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{SU}$ 为Jordan标准型.

3 结束语

本文证明了一类结构简单的随机矩阵 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{ww}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 的一些性质. 其中最主要性质是

$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{S})=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, 从该性质可以看出此矩阵的条件数几乎接近 1, 且和 $\boldsymbol{w}$ 的选取无关• 这个性质说明了文[2] 中使用了该矩阵后, 被变换后的矩阵的特征值几乎没有发生扰动• 我们还可以根据这一性质, 使用此类随机辛阵构造已知特征值的 Hamiltion 实验矩阵, 用其来检验数值算法的有效性•

例如, $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(1,2,3,4,5)$, $\boldsymbol{F}$ 为随机产生的 5×5 对称矩阵• 显然

$$\sigma(\boldsymbol{H})=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5\}•$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}
4.3791\times10^{-1} & 4.3054\times10^{-1} & 1.2085\times10^{+0} & 1.0967\times10^{+0} & 1.4616\times10^{+0}\\
4.3054\times10^{-1} & 1.0388\times10^{+0} & 1.5021\times10^{+0} & 7.2134\times10^{-1} & 1.4542\times10^{-1}\\
1.2085\times10^{+0} & 1.5021\times10^{+0} & 1.5396\times10^{-2} & 9.7239\times10^{-1} & 7.2076\times10^{-1}\\
1.0967\times10^{+0} & 7.2134\times10^{-1} & 9.7239\times10^{-1} & 1.8608\times10^{+0} & 1.2621\times10^{+0}\\
1.4616\times10^{+0} & 1.4542\times10^{-1} & 7.2076\times10^{-1} & 1.2621\times10^{+0} & 1.4023\times10^{+0}
\end{bmatrix}$$

随机产生 10 维向量

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}
1.236358575394460\times10^{-1}\\
4.917381606400272\times10^{-1}\\
3.616707472693370\times10^{-1}\\
3.770329293066770\times10^{-1}\\
3.260663093454182\times10^{-1}\\
3.637719400946810\times10^{-2}\\
3.161150109398354\times10^{-1}\\
4.427704741576759\times10^{-1}\\
1.364834953756237\times10^{-1}\\
2.184113575744549\times10^{-1}
\end{bmatrix}•$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{2n}-\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$, 计算 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}$• 由 Matlab 中的 $\mathrm{eig}(\boldsymbol{H}_1)$ 计算得的特征值为

$\mathrm{eig}(\boldsymbol{H})$	$\mathrm{eig}(\boldsymbol{H}_1)$
1	$9.999999999999996\times10^{-1}$
2	$1.999999999999999\times10^{+0}$
3	$2.999999999999995\times10^{+0}$
4	$4.000000000000004\times10^{+0}$
5	$4.999999999999999\times10^{+0}$
-1	$-1.000000000000000\times10^{+0}$
-2	$-2.000000000000000\times10^{+0}$
-3	$-3.000000000000000\times10^{+0}$
-4	$-4.000000000000000\times10^{+0}$
-5	$-5.000000000000003\times10^{+0}$

可见, 变换后的矩阵的特征值满足精度• 但由于 eig($\boldsymbol{H}_1$) 使用的是 QR 算法, 计算出的特征值已失去了正负成对的性质•

致谢 本文作者感谢熊西文教授的有益讨论和指导•

[参 考 文 献]

[1] Benner P, Farbender H. The symplectic eigenvalue problem, the butterfly form, the SR algorithm, and the Lanczos method[J]. *Linear Alg Appl*, 1998, **19**(47): 275—276.

[2] Bunse_Gerstner A. Mehrmann V. A symplectic QR_like Algorithm for the solution of the real algebraic Riccati equation[J]. *IEEE Trans Automat Contr*, 1986, AC_31: 1104—1113.

[3] Benner P, Mehrmann V, Xu H. A numerically stable, structure preserving method for computing the eigenvalues of real Hamiltonian or symplectic pencils[J]. *Numer Math*, 1998, **78**: 329—358.

[4] Jacob B. *Linear Algebra* [M]. New York: W H Freeman and Company, 1990.

[5] Saad Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* [M]. M13 9PL, Manchester, UK: Manchester University Press, 1992.

[6] Golub G H, Van Loan C. *Matrix Computations* [M]. Third Edition. The Johns Hopkins University Press, 1996.

[7] Van Loan C. A symplectic method for approximating all the eigenvalues of a Hamiltonian matrix[J]. *Linear Algebra Appl*, 1984, **16**: 233—251.

The Properties of a Kind of Random Symplectic Matricess

YAN Qing_you

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: Several important properties of a kind of random symplectic matrix used by A. Bunse_Gerstner and V. Mehrmann are studied and the following results are obtained: 1) It can be transformed to Jordan canonical form by orthogonal similar transformation. 2) Its condition unmber is a constant. 3) The condition unmber of it is about 2.618 .

Key words: symplectic matrix; QR_like algorithm; eigenvalue; condition number; Jordan canonical form; Schur canonical form