应用数学和力学, 第 23 卷 第 5 期(2002 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0548_03

关于概率度量空间的等距同构

刘明学

(长沙大学 数学系, 长沙 410003)

(张石生推荐)

摘要: 概率度量空间理论中有两种等距同构, 一种是一个概率度量空间等距同构于另一个概率度量空间 另一种是一个概率度量空间等距同于一个准度量族生成空间 该文建立了这两种等距同构之间的联系

关 键 词: 概率度量空间; 准度量族生成空间; 等距同构
中图分类号: O189 11 文献标识码: A

引 言

概率度量空间理论中有两种等距同构(见文献[1~ 9]等), 一种是一个概率度量空间等距同构于另一个概率度量空间, 另一种是一个概率度量空间等距同于一个准度量族生成空间 前一种等距同构有利于用结构较简单的概率度量空间描述结构较复杂的概率度量空间, 后一种等距同构有利于揭示概率度量空间的度量性质 本文建立了这两种等距同构之间的联系

1 定 义

除特别声明外, 本文的符号和术语与文献[2, 4, 8, 9]相同

定义 1[8] 设 E 是一个非空集合, $\left\{ d_r, r \quad (0, 1) \right\}$ 是 $E \quad E$ 到 $\mathbf{R}^+$ 中的一族映射 若 $r \quad (0, 1)$, $s = s(r) \quad [r, 1)$, 使得 $x, y, z \quad E$, 都有 1) $d_r(x, x) = 0$; 2) $d_r(x, y) = d_r(y, x)$; 3) $d_r(x, y) \quad d_s(x, z) + ds(y, z)$, 则称 $\left\{ d_r, r \quad (0, 1) \right\}$ 是 E 上的一个准度量族 如果还有 $x, y \quad E$, 当 $x \quad y$ 时, $\sup\left\{ d_r(x, y); r \quad (0, 1) \right\} > 0$, 则称 $\left\{ d_r, r \quad (0, 1) \right\}$ 是 E 上的一个完全准度量族 如果 $\left\{ d_r, r \quad (0, 1) \right\}$ 是 E 上的一个完全准度量族, 则称 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$ 为准度量族生成空间

定义 2[8, 5, 4] 设 (E, F) 是一个 PM 空间, $(E, d_r, r \quad (0, 1))$ 是一个准度量族生成空间 若存在 E 到 E 上的一个一一映射 , 使得 $x, y \quad E, \quad r \quad (0, 1)$, 都有

$$L\left\{ t \quad R^+; F_{x,y}(t) < r \right\} = d_r(\ (x), \ (y)),$$

其中 L 为 Lebesgue 测度, 则称 PM 空间 (E, F) 等距同构于准度量族生成空间 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$, 称 是 (E, F) 到 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$ 上的一个等距同构映射

收稿日期: 1999_12_15; 修订日期: 2001_11_20
基金项目: 福建省教育厅高等学校科技项目
作者简介: 刘明学(1954), 男, 四川蓬安县人, 教授, 硕士生导师(E_mail: liumingx@public.cs.hn.cn).

定义 3[2,3]　设 (E, F) 和 (E, F) 是两个 PM 空间, 若存在 E 到 E 上的一个一一映射 , 使得 x, y E, t $\mathbf{R}^+$, 都有

$$F_{x,y}(t) = F_{(x),(y)}(t),$$

则称 PM 空间 (E, F) 等距同构于 PM 空间 (E, F), 称 是 (E, F) 到 (E, F) 上的一个等距同构映射

2　引理及定理

引理 1　设 E 是一个非空集合, $\{d_r, r \quad (0, 1)\}$ 是 E 上的一个完全准度量族, 且 x, y E, $d_r(x, y)$ 都是 r 的非降左连续函数, 令

$$F_{x,y}(t) = L\{r \quad (0, 1); d_r(x, y) < t\}, \qquad t \quad R,$$

这里 L 为 Lebesgue 测度　那么 (E, F) 是一个 PM 空间

证　由文献[9]定理 2 的证明过程易知引理 1 成立

引理 2　设 (E, F) 是一个 PM 空间, 且 $\sup\{T(a, a); a < 1\} = 1$, 这里 T 表示 (E, F) 的最佳弱 t_模[7], r $(0, 1)$, 令

$$d_r(x, y) = L\{t \quad R^+; F_{x,y}(t) < r\}, \qquad x, y \quad E,$$

这里 L 为 Lebesgue 测度, 那么 $\{d_r, r \quad (0, 1)\}$ 是 E 上的一个完全准度量族

证　由文献[8]定理 1 充分性的证明过程易知引理 2 成立

定理 1　如果 PM 空间 (E, F) 等距同构于一个准度量族生成空间, 那么存在一个 PM 空间 (E, F), 使得 PM 空间 (E, F) 等距同构于 PM 空间 (E, F)

证　不妨设 PM 空间 (E, F) 等距同构于准度量族生成空间 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$, 且 是相应的等距同构映射　那么, x, y E, r $(0, 1)$, 都有

$$d_r((x), (y)) = L\{t \quad R^+; F_{x,y}(t) < r\} \tag{1}$$

因此, x, y E, $d_r((x), (y))$ 都是 r 的非降左连续函数　由此易知, x, y E, t R, $\{r \quad (0, 1); d_r((x), (y)) < t\}$ 都是 Lebesgue 可测集　x, y E, 令

$$F_{(x),(y)}(t) = L\{r \quad (0, 1); d_r((x), (y)) < t\}, \qquad t \quad R, \tag{2}$$

这里 L 为 Lebesgue 测度　那么, 由引理 1 可知 (E, F) 是一个 PM 空间

另一方面, 因为 x, y E, $F_{x,y}(t)$ 都是 t 的非降左连续函数, 所以, 由(1)式和文献[10]的命题 2 可知, x, y E, 都有

$$F_{x,y}(t) = L\{r \quad (0, 1); d_r((x), (y)) < t\}, \qquad t \quad R$$

因此, 由(2)式可知 $F_{x,y}(t) = F_{(x),(y)}(t)$　从而 (E, F) 等距同构于 (E, F)

定理 2　如果 PM 空间 (E, F) 等距同构于另一个 PM 空间 (E, F), 且 $\sup\{T(a, a); a < 1\} = 1$, 这里 T 表示 (E, F) 的最佳弱 t_模, 那么存在一个准度量族生成空间 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$, 使得 PM 空间 (E, F) 等距同构于准度量族生成空间 $(E, d_r, r \quad (0, 1))$

证　因为 PM 空间 (E, F) 等距同构于 PM 空间 (E, F), 所以不妨设 是相应的等距同构映射　因此, x, y E, t R, 都有

$$F_{x,y}(t) = F_{(x),(y)}(t) \tag{3}$$

现在, x, y E, r $(0, 1)$, 令

$$d_r((x), (y)) = L\{t \quad R^+; F_{(x),(y)}(t) < r\}, \tag{4}$$

这里 L 为Lebesgue 测度　那么, 由引理2可知$(E\ ,\ d_r,\ r\quad (0,1))$ 是一个准度量族生成空间

另一方面, 由(3) 和(4) 式可知, 对　$x, y\quad E,\quad r\quad (0,1)$ 都有

$$d_r(\ (x),\ \ (y)) = L\left\{t\quad R^+;\ F_{x,y}(t) < r\right\}$$

因此, PM 空间 (E, F) 等距同构于准度量族生成空间$(E\ ,\ d_r,\ r\quad (0,1))$

[参 考 文 献]

[1] Menger K, Schweizer B, Sklar A. On probabilistic metrics and numerical metrics with probability 1 [J]. Czechoslovak Math J, 1959, **9**(84): 459　466.

[2] Sherwood H. On E spaces and their relation to other classes of probabilistic metric spaces[J]. J London Math Soc, 1969, **44**: 441　448.

[3] Sherwood H. On the completion of probabilistic metric spaces[J]. Z Wahr Verw Geb, 1966, **6**: 62　64.

[4] Stevens R. Metrically generated prodabilistic metric spaces[J]. Fund Math, 1968, **61**: 259　269.

[5] 游兆永, 朱林户. 概率度量空间的等距度量化[J]. 中国科学, A 辑, 1989, (1): 19　24.

[6] 方锦暄. 关于概率度量空间的等距度量化的注记[J]. 科学通报, 1990, **35**(22): 1701　1703.

[7] 游兆永, 朱林户. 概率度量空间的最佳弱 t_模[J]. 科学通报, 1991, **36**(1): 10　11.

[8] 刘明学, 游兆永. 一般概率度量空间的等距度量化[J]. 科学通报, 1995, **40**(18): 1636　1638.

[9] 刘明学, 游兆永. 关于概率度量空间的等距度量化[J]. 科学通报, 1997, **42**(4): 362　364.

[10] Sherwood H, Taylor M D. Some PM structures on the set of distribution functions[J]. Rev Roum Math et Appl, 1974, **19**(10): 1251　1260.

[11] 张石生. 概率度量空间的基本理论及应用(I) [J]. 应用数学和力学, 1988, **9**(2): 117　126.

[12] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metrics Spaces[M]. New York: Amsterdam, Oxford: North_Holand, 1983.

On the Isometric Isomorphism of Probabilistic Metric Spaces

LIU Ming_xue

(Department of Mathematics, Changsha University, Changsha 410003, P R China)

Abstract: There are two kinds of isometric isomorpism in probabilistic meteric space theory. The first is that a PM space (E, F) is isometrically isomorphic to another PM space $(E\ ,\ F\ )$, and the second is that a PM space (E, F) is isometrically isomorphic to a generating space of quasi_metric family $(E\ ,\ d_r,\ r\quad (0,1))$. This paper establishes the connection between the two kinds of isometric isomorphism.

Key words: probabilistic meteric space; generating space of quasi_metric family; isometric isomorphism