

文章编号: 1000-0887(2002) 04-0371-05

各向异性交通流动力学模型的波动特性^{*}

姜 锐, 吴清松, 朱祚金

(中国科学技术大学 工程科学学院, 合肥 230026)

(戴世强推荐)

摘要: 对姜锐等人最近提出的一种新的交通流动力学模型的波动特性进行了分析。该模型中, 不存在大于宏观车流速度的特征速度, 从而满足交通流各向异性的要求。线性稳定性分析发现, 新模型在一定条件下保持稳定, 文中给出了稳定条件判定标准。分析指出, 这一模型的波由一阶波和二阶波两种层次构成, 既允许交通光滑波的存在, 也允许交通激波的存在, 但是其激波条件与其它相关模型有明显区别。正是这种区别, 使得新模型在处理某些交通问题(如车辆倒退现象)上更加符合实际车流情况。

关键词: 交通流; 动力学模型; 波动特性

中图分类号: U491.1⁺12 文献标识码: A

引 言

最近, 我们提出了一种新的交通流动力学模型^[1]。这一模型由连续方程和动力学方程构成

$$\partial k / \partial t + \partial(ku) / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e(k) - u}{T} + a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

其中 k 是交通密度; u 是车辆平均速度; x, t 分别为空间和时间坐标; T 是松弛时间; a 是小扰动传播速度; $u_e(k)$ 是平衡速度密度关系。方程(1)表明路段上的车辆数目守恒。方程(2)左边是车辆加速度, 右边第一项是松弛项, 表明驾驶员调节车辆速度以期达到平衡速度的过程; 第2项为预期项, 表明驾驶员对其前方的交通状况产生反应的过程。与其它相关的动力学模型相比, 如由连续方程(1)和如下动力学方程所组成的 Payne 模型^[2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{T} - \frac{a^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x}, \quad (3)$$

其连续方程是相同的, 但是在动力学方程的预期效应中, 新模型以速度梯度项取代了密度梯度项。正是这一取代, 使得新模型中不存在大于宏观车流速度的特征速度。对方程(1)、(2)进行特征线法分析, 我们可以得到2个特征速度

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad (4)$$

而 Payne 模型方程(1)、(3)的两个特征速度分别为

* 收稿日期: 2000_12_14; 修订日期: 2001_10_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872062)
作者简介: 姜锐(1978—), 男, 安徽蚌埠人, 博士。

$$\lambda_1 = u - a, \lambda_2 = u + a \quad (5)$$

很明显 Payne 模型中第二个特征速度 λ_2 大于宏观车流运动速度 u , 而新模型中并不存在这个问题。因为大于车流宏观运动速度的特征速度意味着车辆会受到后方车辆的影响, 从而违背了车流运动为各向异性, 车辆只受前方车辆影响这一基本性质^[3]。从这个角度出发, 新模型更加符合车流实际情况。

由于新模型控制方程(1)、(2)构成了双曲型方程组, 而波动现象研究在双曲型方程组中具有重要意义, 因此有必要对新模型的波动特性进行分析。下面我们分别就新模型的线性稳定性、波的层次和激波条件加以探讨。

1 线性稳定性分析

假定 k_0 和 $u_0 = u_e(k_0)$ 为方程组(1)、(2)的稳态解, 且 $k = k_0 + \xi$, $u = u_0 + \eta$ 为(1)、(2)的扰动解, 其中 $\xi = \xi(x, t)$ 和 $\eta = \eta(x, t)$ 是附加在稳态解上的小扰动。下面我们讨论扰动随时间的演化情况。将扰动解 $k = k_0 + \xi$, $u = u_0 + \eta$ 代入模型方程(1)、(2), 对所得方程在 k_0 和 u_0 处进行 Taylor 展开, 并忽略 ξ 和 η 的高阶项, 可以得到如下的线性化方程组:

$$\xi + u_0 \xi_x + k_0 \eta_k = 0, \quad (6)$$

$$\eta_t + u_0 \eta_x = \frac{u_e'(k_0) \xi - \eta}{T} + a \eta_x, \quad (7)$$

式中 $u_e' = du_e/dk$ 。(7)式两边对 x 求导, 可得

$$\eta_{kx} + u_0 \eta_{kx} = \frac{u_e'(k_0) \xi_x - \eta_x}{T} + a \eta_{kx}, \quad (8)$$

而由(6)式

$$\eta_k = -(\xi + u_0 \xi_x) / k_0 \quad (9)$$

(9)式两边对 x, t 分别求导, 可得 $\eta_{kx} = -(\xi_x + u_0 \xi_{xx}) / k_0$, $\eta_x = -(\xi_t + u_0 \xi_x) / k_0$ 。将 η_{kx} 、 η_x 、 η_k 代入(8)式, 且令 $c_0 = (ku)'|_{k=k_0} = u_0 + k_0 u_e'(k_0)$, 可以消去 η , 得到如下的二阶方程:

$$(\partial_t + c_0 \partial_x) \xi = -T [(\partial_t + c_1 \partial_x)(\partial_t + c_2 \partial_x) \xi], \quad (10)$$

其中 $c_1 = u_0 - a$, $c_2 = u_0$ 。 (11)

按照线性稳定性分析常用方法, 考虑具有 $\xi(x, t) = \xi_0 \exp i(\lambda x - \omega t)$ 形式的小扰动, 将这一扰动表达式代入(10)式, 可得

$$(-i\omega + ic_0 \lambda) \xi = -T [(-i\omega + c_1 i \lambda)(-i\omega + c_2 i \lambda)] \xi \quad (12)$$

考虑到 ξ 是方程(12)的非奇异解, 必有

$$T(\omega - c_1 \lambda)(\omega - c_2 \lambda) + i(\omega - c_0 \lambda) = 0 \quad (13)$$

因此, 新模型的线性稳定性就由关于 ω 的二次方程(13)的根的虚部所决定。如果有一个根的虚部大于零, 那么新模型就是不稳定的; 只有当两个根的虚部均小于或等于零时, 新模型才是线性稳定的。对于形如(13)式的方程, Whitham^[4]和 Zhang^[5]都给出, 当以下不等式得到满足时, 能够保证其两个根的虚部均小于或等于零:

$$c_1 \leq c_0 \leq c_2, \quad (14)$$

此即新模型的线性稳定性条件。这一条件的物理意义在下一节中予以一定的解释。

2 波的层次

本节我们讨论新模型波的层次。我们注意到(10)式右边是一个二阶波算子, 其中 c_1, c_2

表示二阶波的特征传播速度。而(10)式左边是一个一阶波算子,其中 c_0 为一阶波的特征传播速度。(10)式表明,新模型的波应该由一阶波和二阶波两个层次所构成。

Whitham^[4]给出Payne模型的二阶线化方程,其形式与(10)式完全一致,只是 c_1 、 c_2 的表达式有所不同。在Payne模型中

$$c_1 = u_0 - a, \quad c_2 = u_0 + a, \quad (15)$$

比较(4)、(5)和(11)、(15)4式,我们发现,二阶波传播速度与特征速度极其相似,只是由于线化的原因,由稳态解参数 u_0 取代了 u^* 。

综合以上分析,我们发现,无论是在我们的新模型中,还是在Payne模型中,波均由两个层次构成。其中,一阶波均以相同的波速 c_0 传播。而高阶波以不同的速度传播,这一速度取决于其特征速度。

我们知道,二阶波传播速度 c_1 、 c_2 决定了二阶方程中扰动信息传播的最快速度和最慢速度,而一阶波传播速度 c_0 是主要扰动信息的传播速度。因此,当 $c_1 \leq c_0 \leq c_2$ 得到满足时,扰动传播之间不会产生矛盾,所以系统得以保持稳定。但是当 $c_0 > c_2$ 或 $c_0 < c_1$ 时,主要扰动信息的传播速度大于信息传播的最快速度或是小于信息传播的最慢速度,扰动传播之间产生了矛盾,从而造成一阶波和二阶波之间无法解决的竞争。正是这种竞争使得系统失去了稳定。这就解释了稳定性条件(14)的物理意义。

3 激波条件

Whitham^[4]提出,在Payne模型中,当以下条件得到满足时,两个常数状态 $(k, u)_{1,2}$ 可以通过以常速度 U 稳定传播的光滑波连接起来:

$$u - a < U < u + a, \quad (16)$$

而当这个条件不满足时,则可以通过激波连接。在本节,我们将讨论在新模型中,是否存在这种现象。

现研究一个稳定传播解,其传播速度为常数 U 。

$$k = k(X), \quad u = u(X), \quad X = x - Ut.$$

将这一稳定传播解代入模型方程(1)、(2),有

$$- Uk_X + (uk)_X = 0, \quad (17)$$

$$T(u - a - U)u_X = u_e - u. \quad (18)$$

积分(17)式,可得

$$u = U - \frac{A}{k}, \quad (19)$$

这里 A 是积分常数。将(19)式代入(18)式,并在两边同乘以 k ,可以得到

$$- T(U - u)[U - (u - a)]k_X = q_e - Uk + A, \quad (20)$$

这里 $q_e = uek$ 。在常数状态 $(k, u)_{1,2}$ 处,我们有 $k_X = 0$ 。因此传播速度 U 和积分常数 A 需满足

$$q_e(k_1) - Uk_1 + A = q_e(k_2) - Uk_2 + A = 0, \quad (21)$$

从而

$$U = \frac{q_e(k_1) - q_e(k_2)}{k_1 - k_2}. \quad (22)$$

定义 $h(k) = q_e(k) - Uk + A$ 。对交通流来说, $q_e(k)$ 应满足严格下凹条件,即 $q_e''(k) < 0$,由

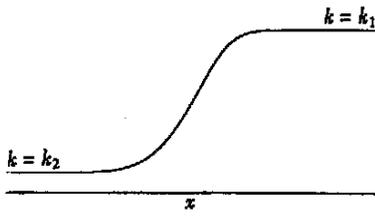


图 1 光滑波面结构

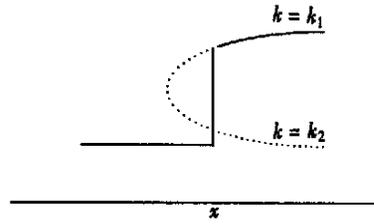


图 2 翻转波面和激波结构

此

$$h''(k) = q_e(k) < 0 \tag{23}$$

由(21)、(23)可得, 当 $k \in (\min(k_1, k_2), \max(k_1, k_2))$ 时, $h(k) > 0$ 。此外, $q_e(k) < 0$ 还意味着连接两个常数状态且稳定传播的波只可能是压缩波^[4,5], 因此有 $k_1 > k_2$ ①。如果能保证 $-T(U-u)[U-(u-a)]$ 在 $k_2 < k < k_1$ 的范围内总是大于零, 那么 $k_X > 0$, 我们可以得到如图 1 所示的光滑坡。求解 $-T(U-u)[U-(u-a)] > 0$, 我们得到

$$u - a < U < u \tag{24}$$

注意到(20)式的左边与松弛时间 T 成正比。随着 T 的增大, $-T(U-u)[U-(u-a)]$ 逐渐增大, 波面也变得越来越光滑。

当条件(24)不满足时, $-T(U-u)[U-(u-a)]$ 在波面上将改变符号, 此时已不存在单值连续波面, 波面自身会发生翻转。这时, 我们可以通过引入一个合适的激波, 来矫正这种情况(如图 2 所示) ②。

对比(16)与(24)式, 区别在于新模型中以 u 取代了 Payne 模型中的 $u+a$ 。下面我们通过一个交通实例来考察这一区别所造成的不同结果。初/边值条件如下(图 3 所示)

$$u = 0, k = k_j H(x); \tag{25}$$

$$\forall x \leq A, t = 0 (A > 0),$$

$$u = 0; x = A, t > 0, \tag{26}$$

其中 $H(x)$ 是 Heavyside 步阶函数, k_j 是堵塞密度。

在这种初/边值条件下, 正确的结果是车流不会发生任何运动, 即存在一个传播速度为零的激波间断。对 Payne 模型, 若存在稳定传播解, 则由(22)式可得 $U = 0$ 。将 $u = 0$ 和 $U = 0$ 代入(16)式, 可知(16)式成立, 即稳定传播解为光滑面, 这就意味着车辆出现倒退(如图 3 所示)。而对新模型, 将 $u = 0$ 和 $U = 0$ 代入(24)式, (24)式并不成立, 因此存在激波间断, 没有倒退现象出现。这证实了特征线速度 $u+a$ 的存在的确会造成非正确的车流运动情况。而

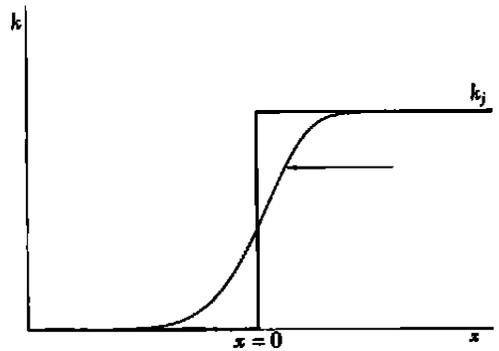


图 3 初/边值条件(25)、(26)下的非正确光滑坡面

① 这里假定 k_1, k_2 分别为稳定传播解下游(右)/上游(左)的密度。

② 在交通流中, 除了知道车辆数目守恒外, 并不清楚车辆速度遵循何种守恒律。所以在确定激波速度方面会遇到一定困难。这一困难存在于所有动力学模型中, 需要更深入的加以研究。

新模型以特征速度 u 取代 $u + a$, 则可以避免这种情况。

4 结 语

本文分析了我们最近提出的一种新的交通流动力学模型的波动特性, 包括线性稳定性, 波的层次以及激波条件。分析指出, 新模型在一定条件下线性稳定, 我们给出了稳定性判据。波的层次分析指出新模型的波由两个层次构成, 以 c_0 速度传播的一阶波和以 c_1 、 c_2 速度传播的二阶波。正是由于一阶波试图突破二阶波的传播速度导致了不稳定现象的发生。分析还指出, 新模型在某些条件下存在光滑解, 而在另一些条件下则必须通过激波对翻转波面进行矫正。

通过和 Payne 模型的对比, 我们发现, 新模型的波动特性虽与之类似, 但存在重要差异。造成这种差异的原因在于新模型中没有大于宏观车流速度的特征速度。正是在这一点上, 新模型更加符合车流运动情况。一个交通实例证实了这一点。通过本文分析我们有理由认为新模型在理论上较其他相关动力学模型更为合理、准确。

[参 考 文 献]

- [1] 姜锐, 吴清松, 朱祚金. 一种新的交通流动力学模型[J]. 科学通报, 2000, 45(17): 1895—1899.
- [2] Payne H J. Models of freeway traffic and control[A]. In: G A Behey Ed. Proc Simulation Council Mathematical Models of Public Systems [C]. La Jolla: Simulation Council, 1971, 1(1): 51—61.
- [3] Dagarzo C F. Requiem for second_order fluid approximations of traffic flow[J]. Transp Res B, 1995, 29(4): 277—286.
- [4] Whitham G B. Linear and Nonlinear Wave[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1974.
- [5] Zhang H M. Analyses of the stability and wave properties of a new continuum traffic theory[J]. Transp Res B, 1999, 33(6): 399—415.

Kinematic Wave Properties of Anisotropic Dynamics Model for Traffic Flow

JIANG Rui, WU Qing_song, ZHU Zuo_jin

(Institute of Engineering Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P R China)

Abstract: The analyses of kinematic wave properties of a new dynamics model for traffic flow are carried out. The model does not exhibit the problem that one characteristic speed is always greater than macroscopic traffic speed, and therefore satisfies the requirement that traffic flow is anisotropic. Linear stability analysis shows that the model is stable under certain condition and the condition is obtained. The analyses also indicate that the model has a hierarchy of first and second order waves, and allows the existence of both smooth traveling wave and shock wave. However, the model has a distinctive criterion of shock wave compared with other dynamics models, and the distinction makes the model more realistic in dealing with some traffic problems such as wrong_way travel analysis.

Key words: traffic flow; dynamics model; kinematic wave property