

文章编号: 1000-0887(2002) 04-0376-05

# 八次对称二维准晶中的 II 型裂纹<sup>\*</sup>

尹姝媛<sup>1</sup>, 周旺民<sup>1,2</sup>, 范天佑<sup>2</sup>

(1. 河北建筑科技学院 基础部, 河北邯郸 056038; 2 北京理工大学 材料科学研究中心, 北京 100081)

(王银邦推荐)

摘要: 发展了八次对称二维准晶材料的断裂理论。应用 Fourier 变换与对偶积分方程理论, 得到了八次对称二维准晶材料 II 型 Griffith 裂纹的精确解析解, 并由此确定了应力强度因子和应变能释放率, 讨论了与相位子场有关结果的物理意义以及晶体与准晶体裂纹问题力学行为的差别, 这些为研究此新固体材料的变形和断裂提供了重要的信息。

关键词: II 型裂纹; 八次对称二维准晶; 应力强度因子

中图分类号: O346.1; O346.1<sup>+</sup>1 文献标识码: A

## 引 言

1984 年左右发现的准晶是最近几年凝聚态物理上的一大突破<sup>[1,2,3]</sup>。这种固体的准周期对称性具有很大的理论意义。大量具有稳定性能的准晶材料已制备出来, 表明此固体材料将成为一种新的结构材料, 具有广泛的应用前景。

已观察到准晶材料的不完整性<sup>[4]</sup>。众所周知, 缺陷严重影响固体材料(包括准晶材料)的物理与力学性能。实验表明准晶是相当脆弱的<sup>[5]</sup>, 脆性材料对缺陷非常敏感。裂纹是一类特殊而重要的缺陷, 它的存在和传播是脆性材料断裂的基本原因。研究准晶材料的裂纹问题在理论及应用上都具有重要意义。最近, 在点群 10 mm 二维十次准晶和一维六次准晶中发展了 Fourier 分析和函数论方法, 得到了许多结果<sup>[6]</sup>。本文推广了前面的工作求解二维八次准晶的裂纹问题, 得到了其精确分析解, 并由此确定了位移与应力场, 以及应力强度因子与能量释放率。同时该工作也说明了此结果关于相位子场的物理意义以及晶体与准晶体裂纹问题力学行为的区别。

## 1 基本方程的化简

在二维准晶中, 二维八次准晶的基本方程, 包括应力\_应变关系、几何方程和平衡方程, 是最复杂的<sup>[7,8]</sup>, 直接求解非常困难。但对于许多情形, 可化简方程<sup>[9]</sup>。例如, 对于某些问题, 如果场变量在几何上与物理上不随  $z$  变化, 即  $\partial_z = 0$ , 那末由基本方程描述的准晶的弹性问题可以分解为两个问题的叠加。其中之一是平面弹性问题, 其应力\_应变关系是

\* 收稿日期: 2000\_10\_18; 修订日期: 2001\_12\_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972011)

作者简介: 尹姝媛(1963—), 女, 河北唐山人, 高级实验师, 已发表论文 10 多篇。

$$\sigma_{xx} = C_{11} \varepsilon_{xx} + C_{12} \varepsilon_{yy} + R(w_{xx} + w_{yy}), \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = C_{12} \varepsilon_{xx} + C_{11} \varepsilon_{yy} - R(w_{xx} + w_{yy}), \quad (2)$$

$$\sigma_{zz} = C_{13}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad (3)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2C_{66}\varepsilon_{xy} + R(w_{yx} - w_{xy}), \quad (4)$$

$$H_{xx} = K_1 w_{xx} + K_2 w_{yy} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad (5)$$

$$H_{yy} = K_1 w_{yy} + K_2 w_{xx} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \quad (6)$$

$$H_{xy} = (K_1 + K_2 + K_3)w_{xy} + K_3 w_{yx} - 2R\varepsilon_{xy}, \quad (7)$$

$$H_{yx} = (K_1 + K_2 + K_3)w_{yx} + K_3 w_{xy} + 2R\varepsilon_{xy}; \quad (8)$$

几何方程是

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad w_{ij} = \partial_i w_j; \quad (9)$$

$\partial_i$  表示对变量  $i$  的偏导数 ( $i = x, y$ )。

不计体力的平衡方程是

$$\partial_j \sigma_j = 0, \quad \partial_j H_j = 0. \quad (10)$$

另一个是反平面弹性问题, 它是一个经典弹性问题, 我们这里不予考虑。

这里假定  $z$  方向为周期排列方向,  $xy$  平面是准周期平面;  $\sigma_j, H_j, \varepsilon_j$  和  $w_j$  分别是声子场与相位子场应力张量与应变张量;  $u_i$  和  $w_i$  是声子位移场和相位子位移场;  $C_j$  是声子场弹性常数, 其中  $C_{66} = (C_{11} - C_{22})/2$ ,  $K_1, K_2, K_3$  是相位子场弹性常数;  $R$  是声子-相位子场耦合弹性常数。

对于平面问题 (1) ~ (10), 如果我们引入一个位移函数  $F(x, y)$ , 使得

$$u_x = \left\{ [C_{66}\alpha\Pi_1 + C_{11}\beta\Pi_2] \dots^2 + 4\omega(K_2 + K_3)[C_{66}\partial_x^2 + (C_{12} + C_{66})\partial_y^2] \Lambda^2 \right\} \partial_x \partial_y F, \quad (11)$$

$$u_y = \left\{ [C_{66}\alpha\partial_y^2\Pi_1 - C_{11}\beta\partial_x^2\Pi_2] \dots^2 - 4\omega(K_2 + K_3)(C_{12} + C_{66})\partial_x^2\partial_y^2\Lambda^2 \right\} F, \quad (12)$$

$$w_x = [\omega(\alpha - \beta)\Pi_1\Pi_2 - 4\omega^2(K_2 + K_3)\Lambda^2\Lambda^2] \partial_x \partial_y F, \quad (13)$$

$$w_y = [-\omega(\alpha\partial_y^2\Pi_1 + \beta\partial_x^2\Pi_2) - 8\omega^2(K_2 + K_3)\partial_x^2\partial_y^2\Lambda^2] F, \quad (14)$$

其中

$$\alpha = C_{11}R - \omega(K_1 + K_2 + K_3), \quad \beta = C_{66}R - \omega K_1, \quad \omega = C_{11}C_{66}/R,$$

$$\Pi_1 = 3\partial_x^2 - \partial_y^2, \quad \Pi_2 = 3\partial_y^2 - \partial_x^2,$$

那末控制方程可简化为下面的一个高阶偏微分方程

$$(\dots^2 \dots^2 \dots^2 \dots^2 - 4\varepsilon \dots^2 \Lambda^2 \Lambda^2 + 4\varepsilon \Lambda^2 \Lambda^2 \Lambda^2) F = 0, \quad (15)$$

这里  $\dots^2, \Lambda^2$  是二阶微分算子

$$\dots^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \Lambda^2 = \partial_x^2 - \partial_y^2;$$

$\varepsilon$  表示一个材料常数

$$\varepsilon = \frac{R^2(C_{12} + C_{66})(K_2 + K_3)}{[C_{66}(K_1 + K_2 + K_3) - R^2][C_{11}K_1 - R^2]}, \quad (16)$$

这是一个非常重要的参数, 其值的分布决定解的性质, 如果  $K_2 + K_3 = 0$ , 则  $\varepsilon = 0$ , 这时材料归结为点群 10 mm 二维十次准晶, 方程 (15) 是十次准晶平面弹性的控制方程<sup>[6]</sup>, 对于八次准晶,  $K_2 + K_3 \neq 0$ , 因此  $\varepsilon \neq 0$ , 但有 3 种情况: (i)  $0 < \varepsilon < 1$ , (ii)  $\varepsilon < 0$ , (iii)  $\varepsilon > 1$ 。

一般,情形(ii)在物理上不可能出现。下面的推导表明情形(iii)导致没有意义的发散解,在物理和数学上唯一有意义的是情形(i),即  $0 < \varepsilon < 1$ 。

由广义 Hooke 定律(1)~(8),容易得到用  $F(x, y)$  表示的声子场与相位子场应力的表达式,限于篇幅,这里省略。

## 2 II 型 Griffith 裂纹及其解

考虑二维八次准晶材料中央有一长度为  $2a$  的 Griffith 裂纹,在无穷远处受一剪应力  $s$  作用(如图 1 所示),此问题在 Griffith 理论意义下等价于在裂纹表面作用于一剪应力  $s$ ,而在无穷远处应力自由(如图 2 所示)。下面我们研究后者。

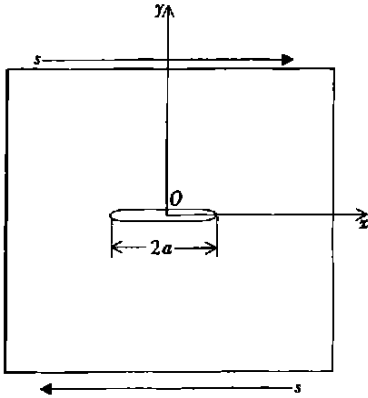


图 1 八次准晶中的 II 型 Griffith 裂纹

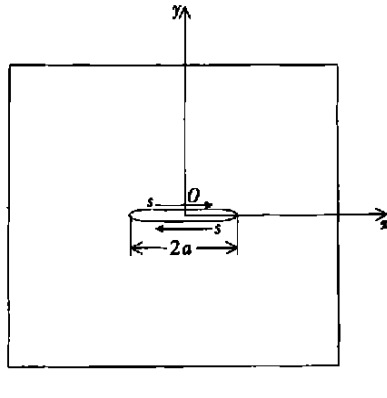


图 2 八次准晶中的 II 型 Griffith 裂纹

由于问题的对称性,只须研究上半平面  $z > 0$ 。在这种情况下,边界条件可表示如下:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty: \sigma_{ij} = H_{ij} = 0, \quad (17)$$

$$y = 0, |x| \leq a: \sigma_{yx} = -s, \sigma_{yy} = 0; H_{yy} = H_{yx} = 0, \quad (18)$$

$$y = 0, |x| > a: \sigma_{yy} = 0, u_x = 0; H_{yy} = 0, w_x = 0. \quad (19)$$

这样,确定 Griffith 裂纹的应力和位移就在于求解偏微分方程的边值问题(15)与(17)~(19)。

对方程(15)施行 Fourier 变换,得到

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dy^2} - \xi^2 \right)^4 - 4\varepsilon \left( \frac{d^4}{dy^4} - \xi^4 \right)^2 + 4\varepsilon \left( \frac{d^2}{dy^2} + \xi^2 \right)^4 \right] F = 0, \quad (20)$$

其中 
$$F(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-i\xi x} dx.$$

如上所述,我们仅考虑情形  $0 < \varepsilon < 1$ 。在这种情况下,由条件(17)得方程(20)的解是

$$F(\xi, y) = A_1(\xi) e^{-\lambda_1 |\xi| y} \cos(\lambda_2 | \xi | y) + A_2(\xi) e^{-\lambda_1 |\xi| y} \sin(\lambda_2 | \xi | y) + A_3(\xi) e^{-\lambda_3 |\xi| y} \cos(\lambda_4 | \xi | y) + A_4(\xi) e^{-\lambda_3 |\xi| y} \sin(\lambda_4 | \xi | y), \quad (21)$$

其中

$$\lambda_1 = [(1 + \sqrt{3})^{1/2} + \varepsilon^{1/4}] (1 - \sqrt{3})^{1/2}, \quad \lambda_2 = [(1 + \sqrt{3})^{1/2} + \varepsilon^{1/4}] \varepsilon^{1/4},$$

$$\lambda_3 = [(1 + \sqrt{3})^{1/2} - \varepsilon^{1/4}] (1 - \sqrt{3})^{1/2}, \quad \lambda_4 = [(1 + \sqrt{3})^{1/2} - \varepsilon^{1/4}] \varepsilon^{1/4},$$

$A_j(\xi)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 是待定函数。

由条件(18)、(19),我们得到对偶积分方程组如下:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} A_j |\xi|^7 e^{-i\xi x} d\xi = b_j s \pi, & |x| < a, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} A_j \xi^6 e^{-i\xi x} d\xi = 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (22)$$

其中  $b_j (j = 1, 2, 3, 4)$  是由弹性常数组成的已知常数。

解对偶积分方程组, 得

$$A_j = b_j s a \pi \xi^{-7} J_1(a\xi) / 2 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (23)$$

这里  $J_1(a\xi)$  是第一类一阶 Bessel 函数。

问题已得到解决。通过取 Fourier 逆变换, 且把上式代入(11)~(14)和(1)~(8), 就得到了位移场与应力场的解析表达式。由上面的结果, 容易得到

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \begin{cases} -s & x \leq a, \\ s(x - \sqrt{x^2 - a^2}) / \sqrt{x^2 - a^2} & x > a. \end{cases} \quad (24)$$

这表明应力(包括相位子场应力)在裂纹前缘具有  $1/2$  阶奇异性, 但  $H_{yx}(x, 0) = 0$ 。由此可定义应力强度因子  $K_{II}$  如下<sup>[10]</sup>:

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_{xy}(x, 0). \quad (25)$$

计算表明  $K_{II} = s\sqrt{a\pi}$ , 它不依赖于弹性常数。但我们可以证明, 应变能释放率  $G_{II}$  依赖于所有的材料常数, 包括声子场与相位子场弹性常数  $C_{ij}$ 、 $K_i$  以及声子\_相位子场耦合弹性常数  $R$ , 限于篇幅, 这里从略。

一般地,  $C_{66}(K_1 + K_2 + K_3) > R^2$ ,  $C_{11}K_1 > R^2$ , 即情形  $\varepsilon < 0$  在物理上不可能出现。同时, 对于  $\varepsilon > 1$ , 解是发散的, 没有意义。因此我们得到了所有具有物理意义的解。

### 3 讨论与结论

计算表明, 当在裂纹表面施加的应力形成自平衡力系时, 即(17)~(19)所给出的条件, 声子场与相位子场的应力分布与材料常数无关, 在这种情况下, II型裂纹的应力强度因子也与材料常数无关(对于I型裂纹与II型裂纹该结论仍然成立)。但是, 声子与相位子位移场依赖于所有的材料常数(声子场、相位子场和声子\_相位子耦合弹性常数  $C_{ij}$ 、 $K_i$  和  $R$ ), 因此裂纹应变能以及应变能释放率依赖于所有的材料常数。相位子场的存在严重影响材料的变形。这说明传统晶体材料的线弹性断裂理论并不能直接用于准晶材料的断裂, 而应建立准晶材料的断裂判据,  $K_{II} = K_{IIc}$  或  $G_{II} = G_{IIc}$ , 这里  $K_{IIc}$ 、 $G_{IIc}$  分别是  $K_{II}$ 、 $G_{II}$  的临界值。关于准晶材料断裂判据临界值的部分测定工作已完成<sup>[5]</sup>。在  $xy$ \_平面, 声子场的变形是各向同性, 而相位子场变形则是各向异性。

八次准晶弹性基本方程很复杂, 要得到裂纹边界条件下该方程组的解非常困难。到目前为止解析解还很少见到。为了构造解析解, 必须应用某些特殊的数学方法和进行冗长的计算。对此问题, 有限元方法能得到数值解, 但它是离散结果<sup>[11]</sup>。封闭形式的解析解比数值解具有很大的优点。本文方法已推广到解决三维立方准晶的弹性与缺陷问题, 且已得到解析解<sup>[12]</sup>, 这说明解析方法是有效的。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry[J]. *Phys Rev Lett*, 1984, **53**(20): 1951—1953.
- [2] Levine D, Steinhardt P J. Quasicrystals: a new class of ordered structure[J]. *Phys Rev Lett*, 1984, **53**(26): 2477—2480.
- [3] Ye H Q, Wang D N, Kuo K H. Five\_fold symmetry in real and reciprocal spaces[J]. *Ultramicroscopy*, 1985, **16**(2): 273—278.
- [4] Zhang Z, Urban K. Transmission electron microscope observation of dislocation and stacking faults in a decagonal Al<sub>6</sub>Cu<sub>2</sub>Co alloy[J]. *Phil Mag Lett*, 1989, **60**(1): 97—102.
- [5] 孟祥敏, 佟百运, 吴玉琨. Al<sub>6</sub>Cu<sub>2</sub>Co<sub>15</sub>准晶体的力学性能[J]. *金属学报*, 1994, **30**(1): 60—64.
- [6] LI Xian\_fang, FAN Tian\_you, SUN Ying\_fei. A decagonal quasicrystal with a Griffith crack[J]. *Phil Mag A*, 1999, **79**(8): 1943—1952.
- [7] HU Cheng\_zheng, DING Di\_hua, YANG Wen\_ge, et al. Possible two\_dimensional quasicrystal structures with a six\_dimensional embedding space[J]. *Phys Rev B*, 1994, **49**(14): 9423—9427.
- [8] HU Cheng\_zheng, WANG Ren\_hui, YANG Wen\_ge, et al. Point groups and elastic properties of two\_dimensional quasicrystals[J]. *Acta Cryst A*, 1996, **52**(2): 251—256.
- [9] 范天佑. 准晶数学弹性力学与缺陷力学[J]. *力学进展*, 2000, **30**(2): 161—172.
- [10] 范天佑. 断裂力学基础[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1978.
- [11] 吴祥法. 准晶弹性与缺陷的有限元方法[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 1998.
- [12] ZHOU Wang\_min, FAN Tian\_you. Axisymmetric elasticity problem of cubic quasicrystal[J]. *Chinese Physics*, 2000, **9**(4): 294—303.

## A Mode II Crack in a Two-Dimensional Octagonal Quasicrystals

YIN Shu\_yuan<sup>1</sup>, ZHOU Wang\_min<sup>1,2</sup>, FAN Tian\_you<sup>2</sup>

(1. Department of Basic Courses, Hebei Institute of Architectural Science & Technology, Handan, Hebei 056038, P R China;

2. Research Center of Materials Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China)

**Abstract:** The present study develops the fracture theory for a two-dimensional octagonal quasicrystals. The exact analytic solution of a Mode II Griffith crack in the material was obtained by using the Fourier transform and dual integral equations theory, then the displacement and stress fields, stress intensity factor and strain energy release rate were determined, the physical sense of the results relative to phason and the difference between mechanical behaviors of the crack problem in crystal and quasicrystal were figured out. These provide important information for studying the deformation and fracture of the new solid phase.

**Key words:** mode II crack; two-dimensional octagonal quasicrystal; stress intensity factor