

文章编号: 1000-0887(2002) 04-0391-09

一种新型的高次多结点薄壁杆件单元^{*}

李正良, 白绍良, 谢 炜

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

(陈山林推荐)

摘要: 应用 Hermite 插值多项式以及最小势能原理导出了一种新型的高次多结点薄壁杆件单元, 这种单元的特点是精度高, 并可应用于桥梁、高层建筑巨型结构的有限元分析中。

关键词: Hermite 插值多项式; 有限元; 最小势能原理; 薄壁杆件

中图分类号: O343.2 文献标识码: A

引 言

工程中大量采用薄壁杆件结构。采用薄壁杆件可以减轻结构自重, 合理利用材料, 显著提高经济效益, 并且使得结构外观美观。正是由于这些明显的优点, 目前在航空、船舶、桥梁和高层建筑等方面, 薄壁杆件的应用已日益广泛。

薄壁弹性杆件的弯曲与扭转的一般理论在力学领域中发展较晚。20 世纪 30 年代符拉索夫(V. Z. Vlasov)发展了开口薄壁杆件的扭转与弯曲相结合的综合理论, 随后符拉索夫理论在工程结构的分析中得到了广泛的应用。如一些高层建筑结构分析软件(如 TBSA, TAT)中, 一般将剪力墙和筒体结构简化成薄壁杆件, 薄壁柱理论的优点是自由度少, 使复杂的高层建筑结构分析得到了大大简化。

Vlasov 的薄壁杆件理论有如下几个假设^[1]:

1) 几何截面假设: $\delta/b \leq 0.1$, $b/L \leq 0.1 \sim 0.2$,

其中, δ —壁厚; b —截面最大宽度或高度; L —杆长;

2) 刚周边假设: 杆件截面外形轮廓线在自身平面内保持不变形, 在出平面方向(杆轴线方向)可以翘曲;

3) 杆件中面上的剪应变为零。即认为相交于某点的母线与外形轮廓线变形仍保持为直角。

关于假定 1)、2)、3), 国内外沿用了几十年, 精度如何, 这里暂且不予讨论。在上述三个假定的基础上, 对于两结点薄壁杆件单元的刚度矩阵, 在许多文献中已有详细的论述。而在有限元法中, 采用高次位移插值函数往往能够提高计算的精度, 由高次位移插值函数得出的单元称为“高次单元”, 在高次单元中, 为了使插值多项式中的结点自由度数目与广义坐标的数目相

* 收稿日期: 2001_01_15; 修订日期: 2001_11_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59378351); 教育部高等学校骨干教师资助计划项目

作者简介: 李正良(1963—), 男, 江苏江阴人, 教授, 博士, 主要从事结构工程和工程力学研究。

匹配,除了主要的结点外,还引进了一些次要的结点(内部结点)•因此,本文在薄壁杆件单元中间增加 1~2 个结点,采用高次插值函数来模拟单元的位移形函数,应用 Hermite 插值多项式以及最小势能原理导出了一种新型的高次多结点薄壁杆件单元•

1 一维高次多结点薄壁杆单元的特点

根据有限元理论,在高次单元中,为了使位移形函数的插值多项式中的结点自由度数目与广义坐标的数目相匹配,除了主要的结点(两端)外,还引进一些次要的结点(内结点),通常只需要较少的高次单元就可以使最后的结果达到较好的精度•在曲线型箱形梁及高层建筑巨型结构体系的巨柱(如图 1b)的分析中,采用这样的高次单元能提高计算的精度,并减少单元数目•

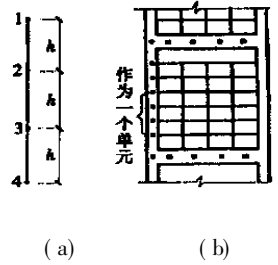


图 1

2 Hermite 插值多项式^[2]

我们把一般的一维插值多项式表示为 $H_{ki}^{(N)}(x)$, 其中, N 是插值的导数数目, k 是从 0 到 N 变化的脚标, i 是对应位置的脚标, 即一组不同的离散插值点群中的第 i 点• 在简单的情况下, 即只有两个结点的情况(如普通的杆单元), 记插值的第一点为 $i = 1(x_1 = 0)$, 第二点记为 $i = 2(x_2 = L)$ • 其中, L 是两点之间的距离(杆长), 则位移函数可表达为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(N)}(x) \phi_i^{(k)}, \quad (1)$$

其中 $\phi_i^{(k)}$ 是待定函数; 在杆系有限元中, 它代表结点位移未知量;

$H_{ki}^{(N)}(x)$ 即称为 Hermite 多项式, 它有如下性质

$$\frac{d^r H_{ki}^{(N)}}{dx^r}(x_p) = \delta_{ip} \delta_{kr} \quad \text{当 } i, p = 1, 2; k, r = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中, x_p 是第 p 点处的 x 值; δ_{mn} 是具有下述性质的 Kronecker 符号,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases} \quad (3)$$

利用方程(2)的性质, 可以说明方程(1)待定系数 $\phi_i^{(k)}$ 的某些物理意义• 根据方程(1), $x = x_p$ 处 $\phi(x)$ 的第 r 阶导数可以写为

$$\frac{d^r \phi}{dx^r}(x_p) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d^r H_{ki}^{(N)}}{dx^r}(x_p) \phi_i^{(k)}. \quad (4)$$

再利用方程(2)和(3), 上式可化为

$$\frac{d^r \phi}{dx^r}(x_p) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^N \delta_{ip} \delta_{kr} \phi_i^{(k)} = \phi_p^{(r)}, \quad (5)$$

$\phi_p^{(r)}$ 表示 p 点处 $\phi(x)$ 的第 r 阶导数值, 当 $r = 0$ 和 $r = 1$, 参数 $\phi_p^{(r)}$ 如图 3 所示• 因此, 在杆系有限元弯曲单元中, $\phi_1^{(0)}$ 、 $\phi_2^{(0)}$ 实际上就代表了结点平移未知量; $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_2^{(1)}$ 实际上就代表了结点转角未知量• 在杆件扭转和翘曲单元中, $\phi_1^{(0)}$ 、 $\phi_2^{(0)}$ 实际上就代表了结点扭转角未知量; $\phi_1^{(1)}$ 、 $\phi_2^{(1)}$ 实际上就代表了结点翘曲未知量•

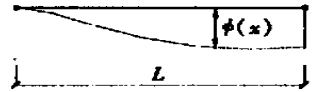
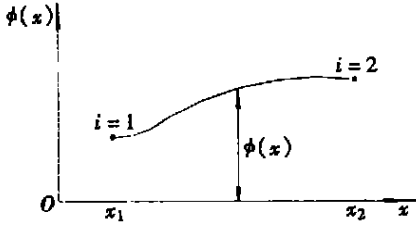


图 2

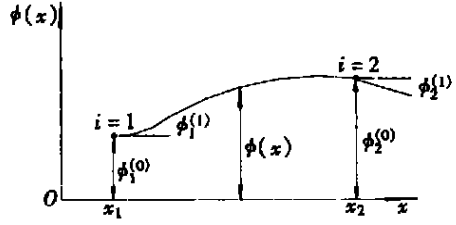
对于多结点薄壁杆件, 位移函数可表为

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^N H_{ki}^{(N)}(x) \phi_i^{(k)}, \quad (6)$$

其中, m 为杆件结点数目, N 是 Hermite 多项式的阶数, N 取 0, 1 (即零阶和一阶 Hermite 多项式)。



(a) 在点 x_1, x_2 之间的插值函数



(b) 参数 $\phi_i^{(r)}$ 的物理意义

图 3

3 形函数

由式(6), 对零阶 Hermite 和一阶 Hermite 多项式, 可分别被表达为

$$\phi(x) = [H_{01}^{(0)}(x), H_{02}^{(0)}(x), H_{03}^{(0)}(x), \dots, H_{0m}^{(0)}(x)] \left\{ \delta \right\}, \quad (7)$$

式中,

$$\left\{ \delta \right\} = \left\{ \phi_1^0, \phi_2^0, \phi_3^0, \dots, \phi_m^0 \right\}^T$$

和

$$\phi(x) = [H_{11}^{(1)}(x), H_{12}^{(1)}(x), H_{13}^{(1)}(x), \dots, H_{1m}^{(1)}(x)] \left\{ \delta \right\}, \quad (8)$$

式中,

$$\left\{ \delta \right\} = \left\{ \phi_1^0, \phi_1^1, \phi_2^0, \phi_2^1, \dots, \phi_m^0, \phi_m^1 \right\}^T.$$

式(7)和(8)可统一表达为

$$\phi(x) = [N(x)] \left\{ \delta \right\}, \quad (9)$$

其中,

$$[N(x)] = [H_{01}^{(0)}(x), H_{02}^{(0)}(x), \dots, H_{0m}^{(0)}(x)] \quad \text{对零阶 Hermite 多项式;}$$

$$\text{和} \quad [N(x)] = [H_{11}^{(1)}(x), H_{12}^{(1)}(x), H_{13}^{(1)}(x), \dots, H_{1m}^{(1)}(x), H_{1m}^{(1)}(x)] \quad \text{对一阶 Hermite 多项式.}$$

实际上, $[N(x)]$ 就是有限元法中的形函数。显然, 由零阶 Hermite 多项式构成的形函数可用于拉压单元; 由一阶 Hermite 多项式构成的形函数可用于弯曲单元、扭转和翘曲单元。

上述表达式(9)中, $\phi(x)$ 、 $\left\{ \delta \right\}$ 为广义位移和广义结点位移的一般表达式。

设杆件轴向位移函数用 $u(x)$ 表达, 杆件在 xy 平面内的横向弯曲位移函数为 $v(x)$, 在 xz 平面内的横向弯曲位移函数为 $w(x)$, 绕 x 轴的扭转位移为 $\theta(x)$, 则它们都可用由零阶和一阶 Hermite 多项式构成的形函数表为

$$u(x) = [N_0(x)] \left\{ \Delta_u \right\}^{(e)}, \quad (10)$$

$$v(x) = [N_1(x)] \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)}, \quad (11)$$

$$w(x) = [N_1(x)] \left\{ \Delta_w \right\}^{(e)}, \quad (12)$$

$$\theta(x) = [N_1(x)] \left\{ \Delta\theta \right\}^{(e)}, \quad (13)$$

其中,

$$[N_0(x)] = [H_{01}^{(0)}(x), H_{02}^{(0)}(x), \dots, H_{0m}^{(0)}(x)],$$

$$[N_1(x)] = [H_{01}^{(1)}(x), H_{11}^{(1)}(x), H_{02}^{(1)}(x), H_{12}^{(1)}(x), \dots, H_{0m}^{(1)}(x), H_{1m}^{(1)}(x)],$$

$$\left\{ \Delta u \right\}^{(e)} = \left\{ u_1, u_2, \dots, u_m \right\}^T,$$

即单元结点的轴向位移;

$$\left\{ \Delta v \right\}^{(e)} = \left\{ v_1, v_1', v_2, v_2', \dots, v_m, v_m' \right\}^T,$$

即单元结点的 xy 平面内的横向弯曲位移及转角;

$$\left\{ \Delta w \right\}^{(e)} = \left\{ w_1, w_1', w_2, w_2', \dots, w_m, w_m' \right\}^T,$$

即单元结点的 xz 平面内的横向弯曲位移及转角;

$$\left\{ \Delta\theta \right\}^{(e)} = \left\{ \theta_1, \theta_1', \theta_2, \theta_2', \dots, \theta_m, \theta_m' \right\}^T,$$

即单元结点的扭转和翘曲位移。

因此,一般多结点薄壁杆件空间弯扭、拉压单元结点之间的位移函数用结点位移表示的关系如下

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} [N_0(x)] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [N_1(x)] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [N_1(x)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [N_1(x)] \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \left\{ \Delta u \right\} \\ \left\{ \Delta v \right\} \\ \left\{ \Delta w \right\} \\ \left\{ \Delta\theta \right\} \end{Bmatrix}^{(e)}. \quad (14)$$

4 薄壁杆件的最小势能原理^[3]

由薄壁杆件理论可知,当不计剪切变形时,单元的应变能可表达为

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L [EAu'^2 + EI_x v''^2 + EI_y w''^2 + EI_\omega \theta''^2 + GI_d \theta'^2] dx, \quad (15)$$

式中, EA 为拉压刚度; EI_x, EI_y 为抗弯刚度; GI_d 为抗扭刚度; EI_ω 为约束扭转刚度, 其中的 I_ω 是主扇性极惯性矩。

设 $U_p^{(e)}$ 为单元的荷载势能, 则薄壁杆件的单元总势能可表为

$$\Pi^{(e)} = U^{(e)} + U_p^{(e)}. \quad (16)$$

根据势能驻值原理

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta u \right\}^{(e)}} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta u \right\}^{(e)}} + \frac{\partial U_p^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta u \right\}^{(e)}} = 0, \quad (17a)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta v \right\}^{(e)}} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta v \right\}^{(e)}} + \frac{\partial U_p^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta v \right\}^{(e)}} = 0, \quad (17b)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta w \right\}^{(e)}} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta w \right\}^{(e)}} + \frac{\partial U_p^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta w \right\}^{(e)}} = 0, \quad (17c)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta\theta \right\}^{(e)}} = \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta\theta \right\}^{(e)}} + \frac{\partial U_p^{(e)}}{\partial \left\{ \Delta\theta \right\}^{(e)}} = 0, \quad (17d)$$

并将表达式(10)~(14)代入式(15)和(16), 应用(17)即可得到一维多结点高次薄壁杆件单元的刚度矩阵。

5 单元刚度矩阵

首先,我们以3结点弯曲单元为例,说明 Hermite 多项式和最小势能原理在推导薄壁杆件

单元刚度矩阵中的应用

设位移函数

$$v(x) = \Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^1 H_{ki}^{(1)}(x) \Phi_i^k =$$

$$\begin{bmatrix} H_{01}^{(1)}(x), H_{11}^{(1)}(x), H_{02}^{(1)}(x), H_{12}^{(1)}(x), \dots, H_{0m}^{(1)}(x), H_{1m}^{(1)} \end{bmatrix} \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)} =$$

$$\left[N_1(x) \right] \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)}, \quad (18)$$

其中, 可设

$$\begin{cases} H_{01}^{(1)}(x) = a_{11} + a_{21}x + a_{31}x^2 + \dots + a_{61}x^5, \\ H_{11}^{(1)}(x) = a_{12} + a_{22}x + a_{32}x^2 + \dots + a_{62}x^5, \\ \dots \\ H_{1m}^{(1)}(x) = a_{1n} + a_{2n}x + a_{3n}x^2 + \dots + a_{6n}x^5. \end{cases} \quad (n = 2m), \quad (19)$$

上式用矩阵形式表为

$$\begin{bmatrix} H_{01}^{(1)}(x) \\ H_{11}^{(1)}(x) \\ \vdots \\ H_{1m}^{(1)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{62} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{6n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (n = 2m = 6) \cdot \quad (20)$$

通过对方程(20)两边取转置后可表为

$$\left[N_1(x) \right] = (1, x, x^2, \dots, x^5) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

即

$$\left[N_1(x) \right] = (1, x, x^2, \dots, x^5) \mathbf{A} \cdot \quad (22)$$

矩阵 \mathbf{A} 的元素可根据 Hermite 多项式的性质

$$\frac{d^p H_{ki}^{(n)}}{dx^r} = \delta_{ip} \delta_{kr} \quad p = 1, 2, 3 \text{ 和 } k, r = 0, 1$$

求得, 可以证明

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \quad (23)$$

这里,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 & h^3 & h^4 & h^5 \\ 1 & 2h & (2h)^2 & (2h)^3 & (2h)^4 & (2h)^5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 & 4h^3 & 5h^4 \\ 0 & 1 & 2h & 3(2h)^2 & 4(2h)^3 & 5(2h)^4 \end{bmatrix} \cdot \quad (24)$$

在只考虑 xy 平面内的位移 $v(x)$ 的情况下, 应变表达式(15)简化为

$$U^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L EI_x v''^2 dx,$$

而外力势能为

$$U_p^{(e)} = - \sum_{i=1}^3 v_i Q_{yi} - \sum_{i=1}^3 v_i' M_{zi} - \int_0^L [p_y(x)v(x) + mv'(x)] dx,$$

从而,总势能为

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= U^{(e)} + U_p^{(e)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EI_{zz}''^2 dx - \left\{ \sum_{i=1}^3 (v_i Q_{yi} + v_i' M_{zi}) + \int_0^L [p_y(x)v(x) + mv'(x)] dx \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

将式(18)代入(25)可得

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= \frac{1}{2} \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)T} \left[\int_0^L [N_1''(x)]^T EI_z [N_1''(x)] dx - \right. \\ &\quad \left. \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)T} \left\{ F_v \right\}^{(e)} - \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)T} \int_0^L \left\{ [N_1(x)]^T p_y(x) + [N_1'(x)]^T m(x) \right\} dx \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

由最小势能原理 $\partial \Pi^{(e)} / \partial \left\{ \Delta_v \right\}^{(e)} = 0$ 可导出弯曲单元的刚度矩阵为

$$[K_v]^{(e)} = \int_0^L [N_1''(x)]^T EI_z [N_1''(x)] dx; \quad (27)$$

等效结点荷载如下:

$$\left\{ F_v \right\}^{(e)} = \int_0^L p_y(x) [N_1(x)]^T dx + \int_0^L m(x) [N_1'(x)]^T dx. \quad (28)$$

由于我们在分析巨型结构体系中,一般多结点高次单元用于柱,而柱间荷载直接简化为结点(楼层)荷载,故对(28)式不考虑其应用。

再将方程(22)代入(27)可得

$$[K_v]^{(e)} = \int_0^{L=2h} \mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^5 \end{Bmatrix} EI_z (1, x, x^2, \dots, x^5) \mathbf{A} dx, \quad (29)$$

经积分运算后得到

$$[K_v]^{(e)} = EI_z \begin{Bmatrix} \frac{1}{70h^3} & -\frac{64}{5h^3} & -\frac{377}{70h^3} & \frac{569}{70h^2} & \frac{96}{7h^2} & \frac{121}{70h^2} \\ -\frac{64}{5h^3} & \frac{128}{5h^3} & -\frac{64}{5h^3} & -\frac{32}{5h^2} & 0 & \frac{32}{5h^2} \\ -\frac{377}{70h^3} & -\frac{64}{5h^3} & \frac{1}{70h^3} & -\frac{121}{70h^2} & -\frac{96}{7h^2} & -\frac{569}{70h^2} \\ \frac{569}{70h^2} & -\frac{32}{5h^2} & -\frac{121}{70h^2} & \frac{166}{35h} & \frac{32}{7h} & \frac{19}{35h} \\ \frac{96}{7h^2} & 0 & -\frac{96}{7h^2} & \frac{32}{7h} & \frac{128}{7h} & \frac{32}{7h} \\ \frac{121}{70h^2} & \frac{32}{5h^2} & -\frac{569}{70h^2} & \frac{19}{35h} & \frac{32}{7h} & \frac{166}{35h} \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

同理,在一般薄壁空间弯扭、拉压的情况下,应用公式(10)~(14)以及方程(15)~(17),可得到一维高次多结点单元的一般单元刚度矩阵如下:

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} EA[Z_{11}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & EI_z[Z_{22}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & EI_y[Z_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & EI_\omega[Z_{22}] + GI_d[Z_{33}] \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中, $[Z_{11}]$ 、 $[Z_{22}]$ 、 $[Z_{33}]$ 的积分表达式如下:

$$[Z_{11}] = \int_0^L [N_0'(x)]^T [N_0'(x)] dx, \quad (32)$$

$$[Z_{22}] = \int_0^L [N_1''(x)]^T [N_1''(x)] dx, \quad (33)$$

$$[Z_{33}] = \int_0^L [N_1'(x)]^T [N_1'(x)] dx. \quad (34)$$

当用于三结点单元时, $L = 2h$; 用于四结点单元时, $L = 3h$. 在方程(31)中, I_ω 、 I_d 分别为薄壁结构截面的主扇性惯性矩和纯扭惯性矩.

经积分运算后得到如下的矩阵表达式:

1) 对于三结点单元

$$[Z_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{7}{6h} & -\frac{4}{3h} & \frac{1}{6h} \\ -\frac{4}{3h} & \frac{8}{3h} & -\frac{4}{3h} \\ \frac{1}{6h} & -\frac{4}{3h} & \frac{7}{6h} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$[Z_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{70h} & \frac{273}{5h^3} & -\frac{64}{30h^3} & -\frac{377}{70h^2} & \frac{569}{7h^2} & \frac{121}{70h^2} \\ -\frac{64}{5h^3} & \frac{128}{5h^3} & -\frac{64}{5h^3} & -\frac{32}{5h^2} & 0 & \frac{32}{5h^2} \\ -\frac{377}{70h^3} & -\frac{64}{5h^3} & \frac{1}{70h^3} & \frac{273}{70h^2} & -\frac{121}{7h^2} & -\frac{96}{70h^2} \\ \frac{569}{70h^2} & -\frac{32}{5h^2} & -\frac{121}{70h^2} & \frac{166}{35h} & \frac{32}{7h} & \frac{19}{35h} \\ \frac{96}{7h^2} & 0 & -\frac{96}{7h^2} & \frac{32}{7h} & \frac{128}{7h} & \frac{32}{7h} \\ \frac{121}{70h^2} & \frac{32}{5h^2} & -\frac{569}{70h^2} & \frac{19}{35h} & \frac{32}{7h} & \frac{166}{35h} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$[Z_{33}] = \begin{bmatrix} \frac{139}{105h} & -\frac{128}{105h} & -\frac{11}{105h} & \frac{13}{210} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{70} \\ -\frac{128}{105h} & \frac{256}{105h} & -\frac{128}{105h} & -\frac{8}{105} & 0 & \frac{8}{105} \\ -\frac{11}{105h} & -\frac{128}{105h} & \frac{139}{105h} & \frac{1}{70} & -\frac{8}{21} & -\frac{13}{210} \\ \frac{13}{210} & -\frac{8}{105} & \frac{1}{70} & \frac{4h}{45} & -\frac{8h}{315} & -\frac{h}{63} \\ \frac{8}{21} & 0 & -\frac{8}{21} & -\frac{8h}{315} & \frac{256h}{315} & -\frac{8h}{315} \\ -\frac{1}{70} & \frac{8}{105} & -\frac{13}{210} & -\frac{h}{63} & -\frac{8h}{315} & \frac{4h}{45} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

6 结 语

应用上述推出的高次多结点薄壁杆件单元,作者将这种单元应用于高层建筑巨型结构的分析中,计算表明,这种单元的精度较高,单元数目减少。由于篇幅所限,计算结果的分析在此不再列出。

[参 考 文 献]

- [1] Atle Gjelsvik. 薄壁杆件理论[M]. 何福照,樊勇坚译,北京:人民交通出版社,1987.
- [2] Rao S S. The Finite Element Method in Engineering[M]. Oxford: Pergamon Press, 1982.
- [3] 包世华,周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1991.
- [4] Oden J T, Ripperger E A. Mechanics of Elastic Structures[M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation 1967.
- [5] 朱渝春. 开口薄壁杆件理论基础及程序[M]. 重庆:重庆大学出版社,1990.

A New High_Order Multi_Joint Finite Element for Thin_Walled Bar

LI Zheng_liang, BAI Shao_liang, XIE Wei
(Faculty of Civil Engineering, Chongqing University,
Chongqing 400045, P R China)

Abstract: A new high_order multi_joint finite element for thin_walled bar was derived from the Hermite interpolation polynomial and minimum potential energy principle. This element's characteristics are that it is of high accuracy and can be used in finite method analysis of bridge, tall mega_structure building.

Key words: Hermite interpolation polynomial; finite element; minimum potential energy principle; thin_walled bar