

文章编号: 1000-0887(2002) 04-0400-07

正交各向异性弹性力学平面问题的 样条虚边界元法*

苏 成, 韩大建

(华南理工大学 土木工程系, 广州 510640)

(云天銓推荐)

摘要: 采用域外奇点技术并根据问题的边界条件, 建立了正交各向异性弹性力学平面问题的非奇异虚边界积分方程, 然后采用性能优越的 B 样条函数去逼近未知虚荷载函数, 并采用性能稳定的最小二乘边界子段法去消除边界余量, 据此获得积分方程的数值解。数值算例表明: 该方法具有相当高的精度和良好的数值稳定性, 且计算工作量少。文中引言部分还对域外奇点法的发展作了系统的评述。

关键词: 正交各向异性; 平面问题; 样条函数; 边界元法

中图分类号: O343.8 文献标识码: A

引 言

传统的边界元法是将奇点分布在所研究区域的边界上, 由于基本解的奇异性, 因此得到的是奇异边界积分方程, 在对它进行数值求解时必然会遇到奇异积分问题, 这是常规边界元法中一个专门且难度较大的课题^[1]。此外, 由于积分的核函数具有奇异性, 当场点由域内趋近边界时, 如仍采用一般的内点变量积分公式, 则场点处的解的精度将显著下降, 这就是边界元法中的边界层效应问题。这个问题还给常规边界元法的误差估计带来较大的困难。尽管针对这个问题已有一些解决方法^[2-4], 但还是显得比较复杂, 不便使用。

针对常规边界元法的上述问题, 我们可以将奇点由边界移到域外, 得到的是非奇异(虚)边界积分方程或直接得到一个线性代数方程组, 从而完全避开了边界奇异积分的计算, 并能有效地克服边界层效应问题, 提高边界及其附近区域上解的精度。这种方法在发展的过程中有多种名称, 很不统一, 且缺乏较系统的评述。作者把这类方法统称为域外奇点法。与常规边界元法一样, 域外奇点法也有直接法和间接法之分, 而间接法又可分为连续型和离散型两种。直接域外奇点法是对常规直接边界元法的修正, 有些文献也称之为正则边界元法。该方法同样可以采用加权余量法或功的互等定理等导出以真实边界上真实物理量为基本未知量的边界积分方程, 但得到的积分方程是非奇异的。这种方法已经成功地应用于圆孔应力集中问题^[5]、流体

* 收稿日期: 2000_11_20; 修订日期: 2001_10_09

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(984059)

作者简介: 苏成(1968—), 男, 广东潮阳人, 副教授, 博士, 已发表论文 30 余篇, 主要研究方向: 计算力学、高层建筑结构、桥梁结构。

力学问题^[6]、薄板弯曲问题^[7~9]、弹性力学平面问题^[10]和二维波动问题^[11]等的分析中。至于间接方法,连续型间接域外奇点法是对常规间接边界元法的修正。该法在域外虚拟边界(或域外某一线段)上连续地分布一些未知虚拟量,然后利用基本解的叠加去满足问题的边界条件,从而建立起相应的非奇异虚边界积分方程。它们需通过数值方法求解,一般采用类似于常规边界元法的做法,把虚拟边界离散为若干虚边界元,将积分方程转化为线性代数方程组来求解,因此这种方法又称为虚边界元法。文[12]首次采用这种思想分析了回转体的扭转问题,文[13~15]采用同样的方法对嵌于弹性半空间的竖桩和竖井进行了分析。这种方法还可以用来进行厚板弯曲问题^[16]和弹性力学平面问题^[17]的分析。与连续型方法不同,在离散型间接域外奇点法中,未知虚拟量是离散地分布在域外虚拟边界的有限个点上,因此建立的方程不是积分方程,而是直接得到一个关于集中虚拟量值的线性代数方程组。这种方法实质上是微分方程边值问题加权余量法的一种,即采用基本解为试函数的边界配点法。有关这种方法的文献较多,文[18~25]是其中的若干例子。

综上所述,域外奇点法已在很多方面得到应用,其中直接域外奇点法在导出基本方程时需借助加权余量法等手段,推导比较复杂和抽象;而间接域外奇点法仅需用到叠加原理,概念清晰,操作简便。在间接域外奇点法中,离散型方法可以直接导出线性代数方程组,而不是积分方程,故无需作任何数值积分,求解比连续型方法更为简单。但作者也发现,这种方法对域外奇点的布置方式有较高要求,对于边界条件或受力方式比较复杂的问题,离散型方法的精度和数值稳定性往往不如连续型方法的好。而在连续型方法中,即常规虚边界元法中,在对虚边界积分方程进行数值求解时,是将域外虚边界划分为若干个虚边界元,并假设未知虚荷载在每个单元上为常量分布或线性分布,然后结合边界配点法去建立关于虚荷载节点值的数值化方程组。为了进一步提高虚边界元法的精度和数值稳定性,本文改用性态良好的B样条函数去逼近未知虚荷载函数,在消除边界余量时提出了最小二乘子段法,据此对正交各向异性弹性力学平面问题进行了分析,各向同性情况可视为本文的一个特例。

1 积分方程的建立

设所研究的正交各向异性平面域为 Ω , 其边界为 L , 域内体力为 $F_l(l = 1, 2)$, 如图1所示。将 Ω 嵌入到无限大平面域中, 在 Ω 域外作虚边界 S , 并在其上布设密度未知的虚荷载 X_l 。根据叠加原理, 在真实荷载 F_l 和虚荷载 X_l 的共同作用下, 无限域内任一点 P_o 处的位移和应力为:

$$\left. \begin{aligned} u_i(P_o) &= \sum_{l=1}^2 \int_S u_i^{(l)}(P_o; Q) X_l(Q) ds + \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} u_i^{(l)}(P_o; Q_o) F_l(Q_o) d\Omega \\ \sigma_{ij}^{(l)}(P_o) &= \sum_{l=1}^2 \int_S \sigma_{ij}^{(l)}(P_o; Q) X_l(Q) ds + \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(l)}(P_o; Q_o) F_l(Q_o) d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

式中: $Q \in S, Q_o \in \Omega, u_i^{(l)}$ 和 $\sigma_{ij}^{(l)}(i, j = 1, 2; l = 1, 2)$ 为正交各向异性弹性力学平面问题的基本解, 具体表达式详见文[26]。

为了建立积分方程, 必须考虑问题的边界条件。对于平面问题, 将式(1)代入有关的边界条件后得:

$$\sum_{l=1}^2 \int_S G_k^{(l)}(P; Q) X_l(Q) ds + \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} G_k^{(l)}(P; Q_o) F_l(Q_o) d\Omega = H_k(P) \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

式中: $P \in L, H_k$ 为边界上的已知函数; $G_k^{(l)}$ 为由基本解组成的核函数, 它们的具体表达式由不同的边界条件确定; $k = 1, 2$ 表示对于平面问题, 边界上存在两个边界条件。

式(2)即为我们所建立的积分方程。由于虚荷载是分布在域外的虚边界上, 因此式(2)中核函数的源点和场点永远不会重合, 从而核函数不会出现奇异的情况, 即式(2)为非奇异积分方程。又由于未知函数是分布在域外虚边界上, 因此可以进一步将式(2)称为非奇异虚边界积分方程。

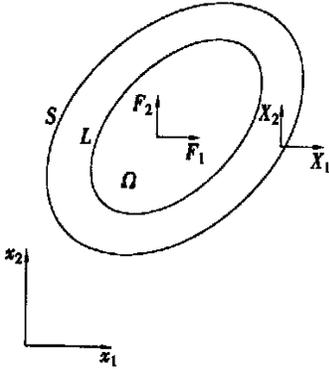


图1 正交各向异性平面域和虚边界

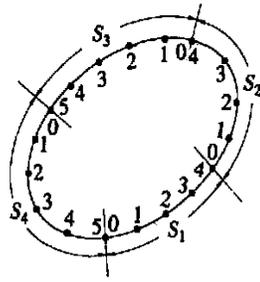


图2 虚边界的划分

2 数值方法

积分方程(2)一般不能获得解析解, 它们需通过数值方法求解。将 Ω 域外虚边界 S 划分成 M 个区间, 分别记为 $S_m (m = 1, 2, \dots, M)$, 如图2所示。在第 m 个区间内将 S_m 均匀划分为 N_m 段(为了和常规“边界元”叫法保持一致, 也可称为 N_m 个“虚边界元”), 得到 $(N_m + 1)$ 个节点, 编号为 $0, 1, 2, \dots, N_m$ 。在第 m 个区间 S_m 内, 将分布在 S_m 上的未知虚荷载函数 $X_{lm}(s)$ 展开成三次 B 样条函数, 即:

$$X_{lm}(s) = \sum_{n=-1}^{N_m+1} x_{lmn} \varphi_n(s) \quad (m = 1, 2, \dots, M; l = 1, 2), \quad (3)$$

式中的 s 为曲线 S_m 的弧坐标, x_{lmn} 为未知样条节点参数, $\varphi_n(s)$ 为三次 B 样条函数^[27]。

将式(3)代入式(2), 可得边界 L 上的余量 $R_k(P)$ 为:

$$R_k(P) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=-1}^{N_m+1} x_{lmn} \int_{S_m} G_k^{(l)}(P; s) \varphi_n(s) ds + \sum_{l=1}^2 \iint_{\Omega} G_k^{(l)}(P; Q_0) F_l(Q_0) d\Omega - H_k(P) \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

为了消除边界余量 $R_k(P)$, 将边界 L 划分成 N_L 个子段, 然后令余量在每个子段上的积分为零, 即:

$$\int_{\Delta L_d} R_k(P) dL = 0 \quad (d = 1, 2, \dots, N_L; k = 1, 2), \quad (5)$$

式中的 ΔL_d 为边界 L 上的第 d 个子段。上述做法与微分方程边值问题加权余量法中的子域法类似, 可称之为边界子段法。数值结果表明^[28, 29], 边界子段法在精度和数值稳定性方面均优于常规的边界配点法。将式(4)代入式(5), 整理后写成矩阵的形式得:

$$[G] \{X\} + \{F\} = \{H\}, \quad (6)$$

式中的 $\{X\}$ 是由 Ω 域外未知虚荷载样条节点参数 x_{lmn} 组成的列阵; $[G]$ 是 $\{X\}$ 的影响矩阵, 其中的元素为核函数与 B 样条函数乘积的积分, 可以用高斯数值积分求出; $\{F\}$ 和 $\{H\}$ 为已知列阵, 分别取决于 Ω 域内的体力和 L 上的边界条件。

线性代数方程组(6) 含有的未知虚荷载样条节点参数的个数为 $N = \sum_{m=1}^M 2(N_m + 3)$, 而它含有的方程个数为 $N = 2N_L$ 。当 $N = N$ 时, 方程组(6) 原则上是可解的。但为了减少方程组病态或缺秩的可能性, 可以采用超额配段的方法, 使 $N > N$, 这时式(6) 是一矛盾方程组, 即无法由式(6) 直接解出 $\{X\}$ 。根据最小二乘法原理, 式(6) 的最好近似解应满足下述方程^[30]:

$$[G']\{X\} + \{F'\} = \{H'\}, \tag{7}$$

式中: $[G'] = [G]^T [G]$, $\{F'\} = [G]^T \{F\}$, $\{H'\} = [G]^T \{H\}$ 。显然, 此时的 $[G']$ 是一个 N 阶方阵, 且具有对称正定的性质, 从而改善了方程组的性态。求解式(7) 得出 $\{X\}$ 后, 将其代入式(1) 的离散型式, 即可求出 Ω 域内任一点的位移和应力。

3 算 例

单位厚度各向同性简支深梁受均布面力或均布体力的作用, 如图 3 所示, $E = 100$, $\mu = 0.16$ 。用虚边界元法求解时, 采用了 20 个虚边界元和 40 个边界子段, 虚边界至直实边界的距离为 2.0。有关的计算结果列于表 1 中。由表 1 可见, 样条虚边界元法具有很高的计算精度, 在虚边界元数相等的前提下, 样条虚边界元法的精度明显高于线性虚边界元法。值得注意的是, 这里的线性虚边界元法在消除边界余量时也采用了最小二乘边界子段法, 如采用常规线性虚边界元法(即采用等额边界配点法消除边界余量), 则结果会更差^[28]。事实上, 在上面两例中, 虚边界元的数目还可进一步减少, 用样条虚边界元法求得的结果仍能保持相当高的精度。

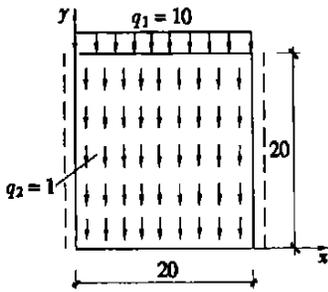


图 3 简支深梁受均布面力或均布体力作用

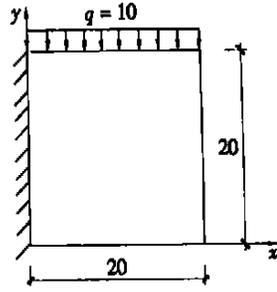


图 4 正交各向异性悬臂板受均布面力作用

表 1 跨中截面 ($x = 10$) 处的 σ_x

方 法	$q_1 = 10$					$q_2 = 1$				
	y					y				
	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0
样条虚边界元法	7.51	3.01	1.29	-2.42	-12.15	18.97	5.76	0.00	-5.76	-18.97
线性虚边界元法 ^[28]	7.50	3.25	1.12	-2.87	-10.77	18.17	6.21	0.00	-6.21	-18.17
样条有限条法 ^[31]	7.43	2.98	1.30	-2.36	-12.05	19.12	5.68	0.00	-5.68	-19.12

单位厚度正交各向异性悬臂板受均布面力作用,如图4所示, $E_x = 100, E_y = 100, \mu_{xy} = 0, G_{xy}$ 的值列于表2和表3中。用样条虚边界元法求解时,采用了25个虚边界元和50个边界子段,其中在固定端处适当加密了虚边界元和边界子段的划分。虚边界至真实边界的距离为2.0。为了进行比较,还采用了有限元法进行分析,其中采用了120个八节点平面单元和96个四节点平面单元,且在固定端附近加密了网格的划分。有关的计算结果分别列于表2和表3中。由表2和表3可见,采用样条虚边界元法计算的结果与有限元法的结果是相当吻合的。由于固定端处应力变化梯度较大,故该处应力值的差异也稍大,这是容易理解的。在本例中,样条虚边界元法的计算工作量远远少于有限元法。

表2 顶部 ($y = 20$) 和中部 ($y = 10$) 处的竖向位移

G_{xy}	方 法	顶部 ($y = 20$)				中部 ($y = 10$)			
		x				x			
		5	10	15	20	5	10	15	20
25	样条虚边界元法	- 2.845	- 5.151	- 7.006	- 8.423	- 2.186	- 4.371	- 6.211	- 7.478
	有限元法	- 2.826	- 5.146	- 7.004	- 8.423	- 2.181	- 4.366	- 6.209	- 7.480
50	样条虚边界元法	- 1.869	- 3.489	- 4.907	- 6.123	- 1.246	- 2.708	- 4.100	- 5.226
	有限元法	- 1.853	- 3.486	- 4.907	- 6.125	- 1.245	- 2.705	- 4.099	- 5.227
100	样条虚边界元法	- 1.355	- 2.636	- 3.842	- 4.958	- 0.766	- 1.858	- 3.025	- 4.084
	有限元法	- 1.344	- 2.636	- 3.844	- 4.962	- 0.768	- 1.859	- 3.027	- 4.088
150	样条虚边界元法	- 1.179	- 2.347	- 3.485	- 4.569	- 0.604	- 1.572	- 2.664	- 3.704
	有限元法	- 1.167	- 2.347	- 3.486	- 4.572	- 0.607	- 1.572	- 2.665	- 3.705

表3 跨中截面 ($x = 10$) 和支座截面 ($x = 0$) 处的 σ_x

G_{xy}	方 法	跨中截面 ($x = 10$)				支座截面 ($x = 0$)			
		y				y			
		0.00	6.67	13.33	20.00	0.00	6.67	13.33	20.00
25	样条虚边界元法	- 5.14	- 2.92	3.16	4.19	- 49.87	- 6.22	4.48	63.50
	有限元法	- 5.29	- 2.92	3.17	4.31	- 49.84	- 5.87	4.32	66.98
50	样条虚边界元法	- 6.32	- 2.90	3.36	4.81	- 41.90	- 7.46	4.73	60.59
	有限元法	- 6.36	- 2.91	3.38	4.81	- 39.81	- 7.18	4.79	60.97
100	样条虚边界元法	- 7.24	- 2.72	3.41	5.16	- 34.40	- 8.36	4.40	61.44
	有限元法	- 7.23	- 2.72	3.44	5.13	- 33.08	- 8.31	5.05	57.23
150	样条虚边界元法	- 7.64	- 2.60	3.41	5.30	- 31.89	- 8.98	4.53	59.27
	有限元法	- 7.61	- 2.60	3.44	5.25	- 30.42	- 8.85	5.14	55.78

4 结 束 语

与常规间接边界元法相比,本文方法具有如下特点: 1) 采用域外奇点技术建立问题的非奇异虚边界积分方程; 2) 采用性态良好的 B 样条函数作为未知虚荷载函数的试函数; 3) 在

权函数方面,采用性能稳定的最小二乘边界子段法去消除边界余量,据此获得积分方程的数值解。数值结果表明,该法在精度和数值稳定性方面均明显优于采用常量或线性插值以及边界配点技术的常规虚边界元法。在工程应用方面,样条虚边界元法已成功地用来进行高层建筑上部结构分析^[32]和筏板基础分析^[33]。关于域外虚边界至真实边界的距离取值问题以及方法的误差估计问题,可参阅文[29]中的讨论。

[参 考 文 献]

- [1] Banerjee P K, Butterfield R. Boundary Element Method in Engineering Science [M]. London: McGraw_Hill, 1981.
- [2] 姚振汉,钟晓光. 边界元法中边界变量的确定与误差直观度量[J]. 华中理工大学学报, 1989, 17(6): 91—103.
- [3] 王元丰,邹永超. 边界元边界层处理的一种新方法——拟多连域法[J]. 应用力学学报, 1997, 14(1): 124—127.
- [4] 马杭. 边界变换法求边界近傍的应力[J]. 力学与实践, 1990, 12(3): 39—40.
- [5] Patterson C, Sheikh M A. Regular boundary integral equation for stress analysis [A]. In: Brebbia C A Ed. Boundary Element Methods [C]. Berlin: Springer_Verlag, 1981, 85—104.
- [6] Patterson C, Sheikh M A. A regular boundary element method for fluid flow [J]. Int J Num Methods in Fluids, 1982, (2).
- [7] 许永林,唐锦春. 域外奇点法及格林函数公式法解析弯曲问题[J]. 计算结构力学及其应, 1986, 3(2): 9—17.
- [8] 孙炳楠,唐锦春,项玉寅. 平板弯曲边界元域外奇点新方法[J]. 计算结构力学及其应, 1991, 8(1): 101—107.
- [9] 卢习林,林庆华. 无奇性边界元法解平板弯曲问题[J]. 清华大学学报, 1988, 28(2): 12—27.
- [10] 刘维倩. 弹性力学的正则边界积分方程_边界元法及其应用软件[A]. 见:李家宝 主编. 全国第一届解析与数值结合法会议论文集[C]. 长沙:湖南大学出版社, 1989, 294—300.
- [11] 傅铨铭. 用域外配点边界元法求解二维平面内波动问题[A]. 见:李家宝 主编. 全国第一届解析与数值结合法会议论文集[C]. 长沙:湖南大学出版社, 1989, 328—331.
- [12] YUN Tian_qun. An integral equation method for solving the torsion problem of revolution bodies [J]. Journal of Huazhong Institute of Technology, 1979, 1(1): 82—97.
- [13] 云天铨. 简便积分方程法分析桩[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(3): 307—320.
- [14] 苏成. 线荷载积分方程法分析嵌于粒状半空间的竖桩[J]. 华南理工大学学报, 1993, 21(1): 18—24.
- [15] YUN Tian_qun, SU Cheng. Analysis of a shaft embedded in granular half space by the line_loaded integral equation method [J]. Computers & Structures, 1992, 43(4): 729—735.
- [16] 李丹. 板弯曲问题的边界元解法[A]. 见:第三届全国建工系统计算机应用学术交流会论文集(2) [C]. 海口, 1986, 480—491.
- [17] 孙焕纯,李性厚,张立洲. 弹性力学问题的虚边界元_配点法[J]. 计算结构力学及其应, 1991, 8(1): 15—23.
- [18] Wu B C, Altiero N J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin_plate bending problems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, (25): 343—353.
- [19] Redekop D, Thompson J C. Use of fundamental solutions in the collocation method in axisymmetric elastostatics [J]. Computers & Structures, 1983, 17(4): 485—490.
- [20] 金梦石. 应用嵌入法分析板的弯曲问题[J]. 应用力学学报, 1986, 3(3): 93—103.

- [21] 金梦石. 应用 Green 函数法计算平面弹性力学问题[J]. 应用力学学报, 1988, 5(2): 17—26.
- [22] 苏成, 韩大建. 域外奇点法分析薄板的弯曲和平面应力问题[J]. 工程力学, 1994, 11(4): 17—26.
- [23] 苏成, 韩大建. 域外奇点法分析折板结构[J]. 力学与实践, 1995, 17(1): 24—27.
- [24] 苏成, 韩大建. 非均匀弹性支承 Reissner 板分析的域外奇点法[J]. 力学与实践, 1997, 19(5): 34—36.
- [25] 王元淳, Sekiya T. 域外奇点法在弹性问题及其物性值反问题中的应用[J]. 上海力学, 1994, 15(2): 84—90.
- [26] Tomlin G R, Butterfield R. Elastic analysis of zoned orthotropic continua[J]. Proc ASCE, 1974, 100(EM3): 511—529.
- [27] 秦荣. 结构力学的样条函数方法[M]. 南宁: 广西人民出版社, 1985, 9—16.
- [28] 苏成, 韩大建. 弹性力学平面问题的虚边界元_边界子段法[J]. 华南理工大学学报, 1998, 26(3): 22—26.
- [29] SU Cheng, HAN Da_jian. Multidomain SFBEM and its application in elastic plane problems[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2000, 126(10): 1057—1063.
- [30] 徐次达. 固体力学加权残值法[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987, 41—44.
- [31] 吴兹潜, 张佑启, 范寿昌. 结构分析的样条有限条法[M]. 广州: 广东科技出版社, 1986, 91—92.
- [32] 苏成, 韩大建. 高层建筑侧向刚度计算的分域样条虚边界元法[J]. 华南理工大学学报, 1998, 26(6): 81—85.
- [33] 苏成, 韩大建. 高层建筑筏板基础分析的样条虚边界元法[J]. 土木工程学报, 2001, 34(1): 61—66.

Elastic Analysis of Orthotropic Plane Problems by the Spline Fictitious Boundary Element Method

SU Cheng, HAN Da_jian

(Department of Civil Engineering, South China University of Technology,
Guangzhou 510640, P R China)

Abstract: Non_singular fictitious boundary integral equations for orthotropic elastic plane problems were deduced according to boundary conditions by the techniques of singular_points_outside_domain. Then the unknown fictitious load functions along the fictitious boundary were expressed in terms of basic spline functions, and the boundary_segment_least_squares method was proposed to eliminate the boundary residues obtained. By the above steps, numerical solutions to the integral equations can be achieved. Numerical examples are given to show the accuracy and efficiency of the proposed method.

Key words: orthotropic; plane problem; spline function; boundary element method