应用数学和力学,第 23 卷 第 4 期(2002 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 04_0407_08

Lienard 系统的某些性质*

韩茂安

(上海交通大学 数学系, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 给出了广义 Lienard 系统有与垂直等倾线不交的正、负半轨的精细条件, 并对多项式系统给出了应用例子•

关 键 词: Lienard 系统; 局部性质; 全局性质
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

考虑下述广义 Lienard 系统

$$\dot{x} = h(y) - F(x), \quad \dot{y} = -g(x), \tag{1}$$

其中 F, g 和 h 为 Lipschitz 连续函数且满足

$$F(0) = h(0) = 0, \ xg(x) > 0 \qquad x \neq 0 • \tag{2}$$

对(1) 的局部与全局性质已有许多研究, 见[1~ 9]• 本文进一步研究这些性质• 记

$$C^+ = \{(x, y) \mid h(y) = F(x), x > 0\},$$
$$C^- = \{(x, y) \mid h(y) = F(x), x < 0\},$$

据[4, 8], 引入下列定义:

定义 1 若在原点附近存在点 $P \in C^+$ (或 C^-) 使正半轨 $\gamma^+(P)$ 在第一(第三) 象限内趋于原点, 则称(1) 在原点有性质(Z_1^+)(或(Z_3^+))•

定义 2 若在原点附近存在点 $P \in C^-$ (C^+) 使负半轨 $\gamma^-(P)$ 在第二(第四) 象限内趋于原点, 则称(1) 在原点有性质(Z_2^-)(或(Z_4^-))•

定义 3 如果(1) 没有正半轨 γ^+ 满足 (ⅰ) γ^+ 无界, (ⅱ) γ^+ 完全位于右半平面(或左半平面), 则称(1) 在右半平面(或左半平面) 具有性质(X^+)•

定义 4 如果(1) 没有负半轨 γ^- 满足(ⅰ) γ^- 无界, (ⅱ) γ^- 完全位于右半平面(或左半平面), 则称(1) 在右半平面(或左半平面) 具有性质(X^-)•

易见, 定义 1 和 2 所述的性质为局部的且与原点的稳定性有关, 而定义 3 与 4 所述的性质为全局的且与解的有界性及极限环有关• 关于局部性质, 文[1] 证得:

定理 1[1] 设(2) 成立, 且存在常数 $p > 0$ 使得

* 收稿日期: 2000_07_14; 修订日期: 2001_12_21
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(19531070); 上海市曙光计划项目(1998)
作者简介: 韩茂安(1961—), 男, 山东荷泽人, 教授, 博士, 博士生导师.

$$yh(y) > 0,\ |h(y)| \geqslant |y|^p \qquad 0 < |y| \ll 1. \tag{3}$$

设

$$Q(x) = \frac{F(x)}{[G(x)]^{p/(p+1)}},\quad G(x) = \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u, \tag{4}$$

$$b(p) = (p+1)\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p/(p+1)}. \tag{5}$$

(ⅰ) 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sup Q(x) < b(p)$, 则(1) 不具有性质$(Z_1^+)$.

(ⅱ) 若 $\lim\limits_{x\to 0^-}\inf Q(x) > -b(p)$, 则(1) 不具有性质$(Z_3^+)$.

(ⅲ) 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\inf Q(x) > -b(p)$, 则(1) 不具有性质$(Z_4)$.

(ⅳ) 若 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sup Q(x) < b(p)$, 则(1) 不具有性质$(Z_2^-)$.

我们指出定理 1 的证明首见[1], 其方法也在[7]中引理 3. 1. 4 与 3. 1. 5 的证明中用到. 上述定理还包含了[8]中的定理 4. 6, 4. 8, 4. 10 与 4. 12([8]中设 $h(y) = m|y|^p\,\mathrm{sgn}\,y$, 但不失一般性可设 $m = 1$). 此外, 若条件(3) 换为

$$h(y) = |y|^p\,\mathrm{sgn}\,y(1 + o(1)) \qquad |y| \ll 1. \tag{6}$$

则定理 1 仍成立. 事实上, 由(6) 知存在常数 $0 < m < 1$ 和 $r > 0$ 使

$$|h(y)| \geqslant m|y|^p\,\mathrm{sgn}\,y \qquad |y| \leqslant r.$$

于是尺度变换

$$t \to m^{-p/(p+1)}t,\quad y \to m^{-p/(p+1)}y$$

把(1) 变为

$$\dot{x} = h^*(y) - F^*(x),\quad \dot{y} = -g(x),$$

其中

$$h^*(y) = m^{-p/(p+1)}h(m^{-p/(p+1)}y),\quad F^*(x) = m^{-p/(p+1)}F(x).$$

因为 $|h^*(y)| \geqslant |y|^p\,\mathrm{sgn}\,y(|y| \leqslant r)$, 可取 m 满足 $0 < 1 - m \ll 1$, 从而对上述方程应用定理 1 即得所述结论.

关于全局性质, 文[1]还证得(也见[7]引理 3. 1. 5 与 3. 1. 6)

定理 2[1] 设 $h(\pm\infty) = \pm\infty$ 且(2) 成立. 又设 $p > 0$, $Q(x)$ 与 $b(p)$ 由(4) 与(5) 给出, 且

$$|h(y)| \geqslant |y|^p \qquad |y| \gg 1. \tag{7}$$

(ⅰ) 若 $G(+\infty) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\inf Q(x) > -b(p)$, 则(1) 在右半平面具有性质$(X^+)$.

(ⅱ) 若 $G(-\infty) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\inf Q(x) > -b(p)$, 则(1) 在左半平面具有性质$(X^-)$.

(ⅲ) 若 $G(-\infty) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sup Q(x) < b(p)$, 则(1) 在左半平面具有性质$(X^+)$.

(ⅳ) 若 $G(+\infty) = \infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup Q(x) < b(p)$, 则(1) 在右半平面具有性质$(X^-)$.

与局部性质类似, 若(7) 换为

$$h(y) = |y|^p\,\mathrm{sgn}\,y(1 + o(1)) \qquad |y| \gg 1, \tag{8}$$

则上述定理仍成立. 易见, 定理 2(ⅰ)与(ⅱ)蕴涵[8]的定理 4. 2 与 4. 4. 本文将给出(1) 有性质(Z_1^+), (Z_3^+), (Z_2^-) 与(Z_4) 及不具有性质(X^+) 的精细条件. 作为应用获得了一些多项式系统有这些性质的充要条件.

1 主要结果和证明

上一节的定理 1 给出了(1) 不具有性质 (Z_1^+), (Z_3^+), (Z_2^-) 与 (Z_4^-) 的充分条件· 下列定理给出(1) 具有这种性质的充分条件·

定理 3 设(2) 成立· 又设存在常数 $p>0$, q 与 $\epsilon>0$ 使得

$$yh(y)>0,\ |h(y)|\leqslant|y|^p+|y|^{p+\epsilon}\qquad 0<|y|\ll 1,\tag{9}$$

及 $q>p/(p+1)$· 则

(i) 若 $F(x)\geqslant b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}-[G(x)]^q$, $0<x\ll 1$, 则(1) 有性质 (Z_1^+)·

(ii) 若 $F(x)\leqslant -b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}+[G(x)]^q$, $0<-x\ll 1$, 则(1) 有性质 (Z_3^+)·

(iii) 若 $F(x)\leqslant -b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}+[G(x)]^q$, $0<x\ll 1$, 则(1) 有性质 (Z_4^-)·

(iv) 若 $F(x)\geqslant b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}-[G(x)]^q$, $0<-x\ll 1$, 则(1) 有性质 (Z_2^-)·

在证明上述定理之前先建立二个引理·

考虑方程

$$\frac{dz}{dy}=b(p)z^{p/(p+1)}-z^q-(y^p+y^{p+\epsilon}),\tag{10}$$

其中 $z\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $p>0$, $\epsilon>0$, $q>p/(p+1)$·

引理 1 存在 $\delta>0$ 使得(10) 在区域 $0\leqslant z<\delta$, $0<y<\delta$ 中有一族积分曲线, 其上端点在正 y 轴上而下端点在原点·

证明 设 $h_0(y)=y^p+y^{p+\epsilon}$,

$$F(z)=b(p)z^{p/(p+1)}-z^q,\ R(z)=\frac{b(p)}{p+1}z^{p/(p+1)}+z^k,$$

其中 $k>p/(p+1)$ 为待定常数· 显然, 存在 $\delta_0=\delta_0(k)>0$ 使 $R(z)<F(z)$, $0<z\leqslant\delta_0$· 用 h_0^{-1} 表 h_0 之逆· 则对 $0<v\ll 1$ 有

$$h_0^{-1}(v)=v^{1/p}+O(v^{(1+\epsilon)/p})·\tag{11}$$

要证对 $y=h_0^{-1}(R(z))$, $0<z\ll 1$ 有

$$K(z)\equiv[h_0^{-1}(R(z))]'_z-\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(9)}>0·\tag{12}$$

事实上, 由(11)

$$\begin{aligned}h_0^{-1}(R)={}&R^{1/p}+O(R^{(1+\epsilon)/p})=\\&\left(\frac{b}{p+1}\right)^{1/p}z^{1/(p+1)}\left[1+\frac{p+1}{b}z^{k-p/(p+1)}\right]^{1/p}+O(z^{(1+\epsilon)/(p+1)})=\\&\left(\frac{b}{p+1}\right)^{1/p}z^{1/(p+1)}\left[1+\frac{p+1}{pb}z^{k-p/(p+1)}+O(z^{2(k-p/(p+1))}+z^{\epsilon/(p+1)})\right]·\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}h_0'(h_0^{-1}(R))={}&p[h_0^{-1}(R)]^{p-1}+O(|h_0^{-1}(R)|^{p+\epsilon-1})=\\&p\left(\frac{b}{p+1}\right)^{(p-1)/p}z^{(p-1)/(p+1)}\left[1+\frac{p^2-1}{pb}z^{k-p/(p+1)}+\right.\\&\left.O(z^{2(k-p/(p+1))}+z^{\epsilon/(p+1)})\right]·\end{aligned}$$

注意到

$$K(z) = \frac{R'(z)}{h_0'(h_0^{-1}(R))} - \frac{1}{\frac{bp}{p+1}z^{p/(p+1)} - z^q - z^k},$$

于是(12)成立当且仅当

$$\left[\frac{bp}{(p+1)^2}z^{-1/(p+1)} + kz^{k-1}\right]\left[\frac{bp}{p+1}z^{p/(p+1)} - z^q - z^k\right] >$$
$$p\left(\frac{b}{p+1}\right)^{(p-1)/p} z^{(p-1)/(p+1)}\left[1 + \frac{p^2-1}{pb}z^{k-p/(p+1)} + \right.$$
$$\left. O(z^{2(k-p/(p+1))} + z^{\epsilon/(p+1)})\right].$$

上不等式等价于

$$\frac{p^2}{(p+1)^3}b^{(p-1)/p}Az^{(p-1)/(p+1)} + z^{k-1/(p+1)}\left[\frac{bp}{p+1}(k-B) + C(z)\right] > 0, \tag{13}$$

其中

$$A = b^{(p+1)/p} - \frac{p+1}{p}(p+1)^{(p+1)/p},$$
$$B = \frac{1}{p+1} + \frac{(p^2-1)(p+1)}{pb^2}\left(\frac{b}{p+1}\right)^{(p-1)/p},$$
$$C(z) = O(z^{q-k} + z^{q-p/(p+1)} + z^{k-p/(p+1)} + z^{(p+\epsilon)/(p+1)-k}).$$

利用(5)易知 $A = 0, B = p/(p+1)$. 现取 k 使

$$\frac{p}{p+1} < k < q, \quad k < \frac{p+\epsilon}{p+1},$$

从而

$$\lim_{z\to 0^+} C(z) = 0$$

且当 $0 < z \ll 1$ 时(13)成立. 于是(12)得证. 由(12)知存在 $\delta > 0$ 使对任何 $z_0 \in (0, \delta)$ 过点 $(z_0, h_0^{-1}(F(z_0)))$ 的积分曲线位于曲线 $y = h_0^{-1}(R(z))$ 之上方. 于是结论得证. 同理可证:

引理 2 考虑方程

$$\frac{dz}{dy} - b(p)z^{p/(p+1)} + z^q + (|y|^p + |y|^{p+\epsilon}), \tag{14}$$

其中 $z \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $p > 0$, $\epsilon > 0$, $q > p/(p+1)$. 存在 $\delta > 0$ 使得(14)在区域 $0 \leqslant z < \delta$, $-\delta < y < 0$ 中有一族积分曲线, 其下端点在负 y 轴上而上端点在原点.

定理 3 的证明 设 $x = x_i(z)(i = 1, 2)$ 为 $z = G(x)$ 的逆函数且 $x_2(z) < 0 < x_1(z)$. 记 $F_i(z) = F(x_i(z))$. 则(1)等价于

$$\frac{dz}{dy} = F_i(z) - h(y) \qquad (i = 1, 2). \tag{15}$$

由于

$$F_1(z) \geqslant b(p)z^{p/(p+1)} - z^q \equiv F(z) \qquad (0 \leqslant z \ll 1)$$

及(由(9)) $h(y) \leqslant y^p + y^{p+\epsilon}$, $0 < y \ll 1$, 可知在区域 $0 < y < h_0^{-1}(F(z))$, $0 < z \ll 1$ 上有

$$0 < \left.\frac{dy}{dz}\right|_{(15),\, i=1} \leqslant \left.\frac{dy}{dz}\right|_{(10)},$$

从而由比较定理即知结论(i)成立. 同理, 利用引理 1、2 及比较定理可得结论(iv)、(ii)与(iii). 关于解的全局性质有下述定理.

定理4 设 $h(\pm\infty)=\pm\infty$, (2) 成立· 又设 $p>0, \epsilon>0$,

$$|h(y)|\leqslant|y|^{p}+|y|^{p-\epsilon} \qquad |y|\gg 1; \tag{16}$$

及 $0<q<p/(p+1)$· 则

(i) 若 $G(+\infty)=\infty$, $F(x)\leqslant -b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}+[G(x)]^{q}(x\gg 1)$, 则(1) 在右半平面不具有性质 (X^{+})·

(ii) 若 $G(-\infty)=\infty$, $F(x)\leqslant -b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}+[G(x)]^{q}(-x\gg 1)$, 则(1) 在左半平面不具有性质 (X^{-})·

(iii) 若 $G(-\infty)=\infty$, $F(x)\geqslant b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}-[G(x)]^{q}(-x\gg 1)$, 则(1) 在左半平面不具有性质 (X^{+})·

(iv) 若 $G(+\infty)=\infty$, $F(x)\geqslant b(p)[G(x)]^{p/(p+1)}-[G(x)]^{q}(x\gg 1)$, 则(1) 在右半平面不具有性质 (X^{-})·

如前, 先给出二个引理如下·

考虑

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=b(p)z^{p/(p+1)}-z^{q}-(|y|^{p}+|y|^{p-\epsilon})\operatorname{sgn}y\equiv F(z)-h_1(y), \tag{17}$$

其中 $z\geqslant 0, p>0, 0<\epsilon<p$ 及 $0<q<p/(p+1)$·

引理3 存在常数 $z_0>0$ 与 $y^*>0$ 且 $h_1(y^*)<F(z_0)$ 使对任何 $y_0\leqslant y^*$, (17) 过点 (z_0, y_0) 的积分曲线可表为 $y=\phi(z, y_0)(z\geqslant z_0)$ 且满足 $h_1(\phi(z, y_0))<F(z)(z\geqslant z_0)$ 及

$$\lim_{z\to+\infty}\phi(z, y_0)=+\infty·$$

证明 设

$$R_1(z)=\frac{b(p)}{p+1}z^{p/(p+1)}-z^{k},$$

其中 $0<k<p/(p+1)$ 为待定常数· 则存在 $z_1=z_1(k)>0$ 使 $R_1(z)<F(z), z\geqslant z_1$· 要证存在 $k>0, z_0>z_1(k)$ 使

$$[h_1^{-1}(R_1(z))]'_z-\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{(17)}>0, \tag{18}$$

其中 $y=h_1^{-1}(R_1(z)), z\geqslant z_0$, 而 h_1^{-1} 表示 h_1 的逆· 由引理1 的证明, 可知

$$h_1^{-1}(v)=v^{1/p}+O(v^{(1-\epsilon)/p}) \qquad v\gg 1,$$

$$h_1^{-1}(R_1)=\left(\frac{b}{p+1}\right)^{1/p}z^{1/(p+1)}\times$$

$$\left[1-\frac{p+1}{pb}z^{k-p/(p+1)}+O(z^{2(k-p/(p+1))}+z^{-\epsilon/(p+1)})\right],$$

$$h_1'(h_1^{-1}(R_1))=p\left(\frac{b}{p+1}\right)^{(p-1)/p}z^{(p-1)/(p+1)}\times$$

$$\left[1-\frac{p^2-1}{pb}z^{k-p/(p+1)}+O(z^{2(k-p/(p+1))}+z^{-\epsilon/(p+1)})\right],$$

且(18) 成立当且仅当对 $z\gg 1$ 有

$$\frac{p^2}{(p+1)^3}b^{(p-1)/p}Az^{(p-1)/(p+1)}+z^{k-1/(p+1)}\left[\frac{bp}{p+1}(-k+B)+C(z)\right]>0,$$

此处, 同前,

$$A=b^{(p+1)/p}-\frac{p+1}{p}(p+1)^{(p+1)/p}=0,$$

$$B = \frac{1}{p+1} + \frac{(p^2-1)(p+1)}{pb^2}\left(\frac{b}{p+1}\right)^{(p-1)/p} = \frac{p}{p+1},$$

及

$$C(z) = O(z^{q-k} + z^{q-p/(p+1)} + z^{k-p/(p+1)} + z^{(p-\epsilon)/(p+1)-k}).$$

因此为使(18)成立只须取

$$q < k < \frac{p}{p+1},\quad k > \frac{p-\epsilon}{p+1}.$$

令 $y^* = R_1(z_0)$. 由(18), 对任何 $y_0 \leqslant y^*$ (17)过点 (z_0, y_0) 的积分曲线可表为 $y = \phi(z, y_0)$, $z \geqslant z_0$, 且满足

$$h_1(\phi(z, y_0)) < R_1(z) < F(z) \qquad z \geqslant z_0.$$

从而 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}z > 0$, $z \geqslant z_0$, 且 $\phi(z, y_0) \to y_1 (z \to \infty)$. 若 $y_1 < +\infty$, 则存在 $z^* > 0$ 使对 $z \geqslant z^*$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{F(z) - h_1(\phi)} > \frac{1}{F(z) - h_1(y_1) + 1} > 0.$$

由此可知

$$\phi(z, y_0) \geqslant \phi(z^*, y_0) + \int_{z^*}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{F(z) - h_1(y_1) + 1} \to +\infty \qquad (z \to \infty),$$

矛盾. 证毕.

引理 4 考虑

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -b(p)z^{p/(p+1)} + z^q - (|y|^p + |y|^{p-\epsilon})\operatorname{sgn} y, \tag{19}$$

其中 $z \geqslant 0$, $p > 0$, $0 < \epsilon < p$, $0 < q < p/(p+1)$. 则存在常数 $z_0 > 0$ 和 $y^* < 0$ 且 $h_1(y^*) > F(z_0)$ 使对任何 $y_0 \geqslant y^*$, (19)过点 (z_0, y_0) 的积分曲线可表为 $y = \phi(z, y_0)$, $z \geqslant z_0$ 且满足 $h_1(\phi(z, y_0)) > F(z)$, $z \geqslant z_0$ 和

$$\lim_{z \to +\infty} \phi(z, y_0) = -\infty.$$

定理 4 的证明 与定理 3 的证明完全类似, 即利用引理 3、4 及比较定理.

注 1 定理 3 蕴涵[8]中定理 4.5、4.7、4.9 与 4.11. 而定理 4 的结论(i)和(iii)蕴涵[8]中定理 4.1 和 4.3.

注 2 由[7]及定理 4 证明可知, 若条件(2)改为 $xg(x) > 0(|x| \gg 1)$, 则定理 2 与 4 仍成立.

2 应用例子

本节给出定理 1~4 的应用例子. 首先考虑

$$\begin{cases} \dot{x} = y + y^2 h_0(y) - [a_1 x + a_2 x^2 + x^3 F_0(x)], \\ \dot{y} = -[x^3 + x^4 g_0(x)], \end{cases} \tag{20}$$

其中 h_0、g_0 与 F_0 为多项式函数.

命题 1

(i) 系统(20)在原点有性质 (Z_1^+) 当且仅当 $a_1 > 0$ 或 $a_1 = 0$, $a_2 \geqslant \sqrt{2}$.

(ii) 系统(20)在原点有性质 (Z_3^+) 当且仅当 $a_1 > 0$ 或 $a_1 = 0$, $a_2 \leqslant -\sqrt{2}$.

(iii) 系统(20)在原点有性质 (Z_4) 当且仅当 $a_1 < 0$ 或 $a_1 = 0$, $a_2 \leqslant -\sqrt{2}$.

(iv) 系统(20)在原点有性质 (Z_2) 当且仅当 $a_1 < 0$ 或 $a_1 = 0$, $a_2 \geqslant \sqrt{2}$.

证明　对(20)有

$$p=1,\ b(1)=2\sqrt{2},\ Q(x)=\frac{F(x)}{\sqrt{G(x)}}=\frac{2F(x)}{x^2(1+O(x))}.$$

因此

$$\lim_{x\to 0^+}Q(x)=\begin{cases}+\infty & a_1>0,\\ -\infty & a_1<0,\\ 2a_2 & a_1=0;\end{cases}\qquad \lim_{x\to 0^-}Q(x)=\begin{cases}-\infty & a_1>0,\\ +\infty & a_1<0,\\ 2a_2 & a_1=0.\end{cases}$$

于是由定理1及(6)知若 $a_1<0$ 或 $a_1=0$、$a_2<\sqrt{2}$ 则(20)不具有性质(Z_1^+)• 若 $a_1>0$ 或 $a_1=0$、$a_2\geqslant\sqrt{2}$, 则取 $q=5/8$, 对 $0<x\ll 1$ 便有

$$F(x)-\sqrt{8G(x)}+[G(x)]^q=$$
$$a_1x+(a_2-\sqrt{2})x^2+2^{-5/4}x^{5/2}(1+O(x))>0.$$

因此由定理3(ⅰ)知(20)有性质(Z_1^+)• 结论(ⅰ)得证• 其余结论同法可证• 证毕•

由定理2, 3及(8)和注2, 同理可证

命题2　三次系统

$$\dot{x}=b_1y+b_2y^2+y^3-(a_1x+a_2x^2+a_3x^3),$$
$$\dot{y}=-(c_1x+c_2x^2+x^3)$$

在全平面有性质(X^+)当且仅当 $a_3>-4/3^{3/4}$, 在全平面有性质(X^-)当且仅当 $a_3<4/3^{3/4}$•

在上一节我们建立了有关系统(1)的解的局部与全局性质的精细条件, 这些结果包含并改进了一些已有结果• 在本节我们给出了多项式系统的应用例子, 获得了这些系统具有所述局部与全局性质的充要条件, 而这些充要条件是无法利用其他结果来得出的•

[参　考　文　献]

[1] 韩茂安. 关于方程$\dot{x}=\phi(y)-F(x),\dot{y}=-g(x)$的周期解、无界解与振荡解[J]. 南京大学学报数学半年刊, 1984, **1**(1): 89—101.

[2] HAN Mao_an. On boundedness of solutions and existence of limit cycles of Lienard systems[J]. Disc Cont Dynamical System, 2001, **7**(5): 426—434.

[3] Hara T. Notice on the Vinogrard type theorem for Lienard systems[J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1994, **22**(12): 1437—1443.

[4] Hara T, Sugie J. When all trajectories in the Lienard plane cross the vertical isocline[J]. NoDEA, 1995, **6**(2): 527—551.

[5] Hara T, Yoneyama T, Sugie J. A necessary and sufficient condition for oscillation of the generalized Lienard equation[J]. Ann Mat Pura Appl, 1989, **154**(2): 223—230.

[6] Jiang K, Han M. Boundedness of solutions and existence of limit cycles for a nonlinear system[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1996, **36**(12): 1995—2006.

[7] LUO Ding_jun, WANG Xian, ZHU De_ming, et al. Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems[M]. Singapore: World Scientific, 1997.

[8] Sugie J, Da_Li Chen, Matsunaga H. On global asymptotic stability of systems of Lienard type[J]. J

Math Anal Appl, 1998, **219**(1): 140—164.

[9] Villari G, Zanolin F. On a dynamical system in the Lienard plane: Necessary and sufficient conditions for the intersection with the vertical isocline and applications[J]. Funkcial Ekvac, 1990, **33**(1); 19—38.

On Some Properties of Lienard Systems

HAN Mao_an

(Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China)

Abstract: Some sharp sufficient conditions for generalized Lienard systems to have positive or negative semi_orbits which do not cross the vertical isocline are given. Applications of the main results to some polynomial systems are also presented.

Key words: Lienard system; local property; global property