应用数学和力学, 第 23 卷 第 3 期(2002 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 03_0221_08

求解非线性方程的一种线化和校正方法*

何吉欢

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委何吉欢来稿)

摘要: 提出了一种拟摄动理论——线化和校正方法• 在该理论中, 不象传统的摄动方法假设其近似解可表示成小参数的级数形式, 而是先把方程线性化, 再求其线化方程的解, 然后再校正线化方程的解• 这样得到的近似解不受方程中的"参数" 的影响•

关 键 词: 非线性; 近似解; 摄动理论

中图分类号: O175.14; O322 文献标识码: A

引 言

几乎所有的摄动理论都依赖于小参数假设: 方程的解可表示成小参数 ε 的级数形式

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \tag{1}$$

式中 u_0 为未扰动方程($\varepsilon = 0$) 的解• 所以校正式(1) 只有在摄动参数 ε 很小时才有效• 如果 u_0 是原非线性方程的一个近似解, 而不管方程中参数 ε 的大小, 那么得到的近似解就有可能对大参数 ε 也有效, 这是本文的企图•

大家知道大多数非线性方程不存在小参数或难确定小参数, 在这种情况下, 可假设近似解可表示为

$$u = u_0 + u_1, \tag{2}$$

在这里 u_0 是线化方程的解, u_1 是 u_0 的校正项, 即应有以下关系

$$| u_0 | \gg | u_1 |• \tag{3}$$

显然如果 u_1 能精确求得, 那么可得到问题的精确解; 然而对于非线性方程 u_1 只能通过一定的方法近似解得• 本文通过几个例子说明该思想的应用是很有效的并且也很方便• 我们称该新理论为线化校正方法•

在阐述这种新理论之前, 在第 1 节将综述一下"人工参数" 摄动理论; 在第 2 节将阐述该新理论的基本思想; 在第 3 节将给出一些应用, 通过和精确解比较可以发现本文得到的近似解具有相当高的精度•

---

* 收稿日期: 2001_01_08; 修订日期: 2001_08_28
作者简介: 何吉欢(1965—), 男, 浙江诸暨人, 教授, 博士; 任下列两个国际杂志的主编: International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation(英国 Freund 出版公司) 和 International Journal of Nonlinear Modelling in Science and Engineering(英国剑桥国际出版公司) (E_mail: jhhe@mail.shu.edu.cn).

1 人工参数摄动方法

为了求解无小参数的非线性方程, 最近文献上出现一些新的摄动理论, 这些理论都借助人工摄动参数。为了说明问题, 考虑下面一个简单方程:

$$u' + u^2 = 1, \quad u(0) = 0 \tag{4}$$

它有精确解

$$u_{ex} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}},$$

由于方程中没有小参数, 文献[1]引进了一人工参数 ε:

$$u' + (\varepsilon u + 1)(u - 1) = 0, \quad \varepsilon = 1。 \tag{5}$$

并假设方程(5)的解可表示成 ε的级数形式, 于是可得方程(5)的摄动解

$$u = (1 - e^{-t}) + \varepsilon e^{-t}(e^{-t} + t - 1)。 \tag{6}$$

在方程(6)中令 ε= 1即可得到原方程(4)的近似解

$$u = (1 - e^{-t}) + e^{-t}(e^{-t} + t - 1)。 \tag{7}$$

可见上述近似解(7)具有相当高的精度。但是这种方法很有技巧性, 如果按以下方法嵌入人工参数 ε:

$$u' + (u + 1)(\varepsilon u - 1) = 0。 \tag{8}$$

那么得到的解就不一致有效了。鉴于上述认识, 文献[2,3]提出了同伦摄动理论, 根据这种理论可构造含嵌入参数 $p \in [0, 1]$ 的一个同伦(homotopy), 对于上述方程可构造以下一个同伦

$$(1 - p)(v' + \alpha v - u_0' - \alpha u_0) + p(v' + v^2 - 1) = 0, \tag{9}$$

式中 u_0 为方程初始近似解, α为线化参数。方程(1)中非线性项可用一个线性项近似表示

$$u^2 \sim \alpha u。 \tag{10}$$

有多种方法可识别线化参数 α, 最常用的是最小二乘法, 即让下面的表达式取极小:

$$\int_o^{t_0} (u^2 - \alpha u)^2 \mathrm{d}t \to \min。 \tag{11}$$

很显然当嵌入参数 p 为零时, 方程(9)变成一个线性方程; 而嵌入参数为1时, 方程变成了原来的非线性方程。这样可把 p 看成是小参数, 并可假设方程(9)的解可表为

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{12}$$

于是可得方程(9)的摄动解, 再令 $p = 1$ 即可得到原方程的近似解:

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots, \tag{13}$$

这里我们写出其一阶近似解:

$$u = 1 - e^{-2t} + \frac{1}{2}(e^{-4t} - e^{-2t})。 \tag{14}$$

很明显近似解也具有很高的精度。

最近文献[4]提出了一种参化摄动方法, 根据这种理论小参数是通过以下一个变换而引入的

$$u = \varepsilon v + b \tag{15}$$

式中 ε为小参数, b 为一常数。

把(15)代入(4)得

$$v' + \varepsilon v^2 + 2bv + \frac{1}{\varepsilon}(b^2 - 1) = 0, \quad v(0) = -\frac{b}{\varepsilon}。 \tag{16}$$

为了方便令 $b = 1$, 于是可得以下含小参数 ε 的摄动方程

$$v' + \varepsilon v^2 + 2v = 0, \quad v(0) = -1/\varepsilon. \tag{17}$$

假设方程(17) 的解可表示成

$$v(t) = v_0(t;\varepsilon) + \varepsilon v_1(t;\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(t;\varepsilon) + \cdots. \tag{18}$$

把式(18) 代入方程(17) 得

$$v_0' + 2v_0 + \varepsilon(v_1' + 2v_1 + v_0^2) + \cdots = 0, \quad v(0) = -\frac{1}{\varepsilon}. \tag{19}$$

在方程(19) 中令

$$v_0' + 2v_0 = 0, \quad v_0(0) = -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{20}$$

$$v_1' + 2v_1 + v_0^2 = 0, \quad v_1(0) = 0. \tag{21}$$

注: 和传统摄动法不同, v_i 可含参数 ε, 并且我们总是假设 $v_0(0) = v(0)$ 和 $\sum_{i=1} v_i(0) = 0$.

求解上述线性方程得

$$v_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-2t}, \tag{22}$$

$$v_1 = \frac{1}{2\varepsilon^2}(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-2t}). \tag{23}$$

于是可得方程(17) 的一阶近似解

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2\varepsilon}(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-2t}). \tag{24}$$

由变换式(15), 我们可得原方程的一个近似解

$$u = \varepsilon v + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-4t} - \mathrm{e}^{-2t}). \tag{25}$$

可见一阶近似已具有很高精度.

我们可把方程(4) 写成如下形式:

$$u' + \alpha u - 1 = \alpha u - u^2, \quad u(0) = 0, \tag{26}$$

式中 α 为线化系数, 可由式(11) 确定, 为了能应用摄动理论, 我们在方程(26) 嵌入一人工参数 ε:

$$u' + \alpha u - 1 = \varepsilon(\alpha u - u^2), \quad u(0) = 0, \tag{27}$$

这种方法称为线化摄动方法[5,6]. 这样我们方便地应用摄动法求解上述方程. 对于非线性振动方程, u_1 不应出现长期项, 根据这一要求可确定系数 α[5,6]. 其他一些方法可参考文献[7].

本文将提出不同于上述方法的一种新理论, 称之为线化校正方法.

2 新理论的基本思想

为了阐述的方便, 我们考虑下面形式的非线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 u = N(u), \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \tag{28}$$

式中 N 为一个非线性算子.

把方程(28) 中的非线性线用一个线性项来逼近

$$N(u) \sim \alpha u, \tag{29}$$

其中 α 为一个线化参数・ 于是可得以下线化方程

$$u'' + \beta^2 u = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \tag{30}$$

式中

$$\beta^2 = \omega^2 + \alpha. \tag{31}$$

线化方程(30)的解可以非常容易地得到:

$$u_0 = A\cos\beta t, \tag{32}$$

当然 u_0 不是原方程的精确解, 只是一个近似解, 为此要用适当的方法校正它・ 先把原方程(28)等价地写成如下形式

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \beta^2 u - N(u) - \alpha u = 0,$$

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \tag{33}$$

假设方程(28)或(33)的解可表示成

$$u = u_0 + u_1. \tag{34}$$

把式(34)代入方程(33)可得

$$u_1'' + \beta^2 u_1 - N(u_0 + u_1) - \alpha(u_0 + u_1) = 0,$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0. \tag{35}$$

根据该理论的基本假设: $|u_0| \gg |u_1|$, 我们可得

$$N(u_0 + u_1) \approx N(u_0), \tag{36}$$

$$u_0 + u_1 \approx u_0. \tag{37}$$

于是方程(35)可近似地用以下线性方程表示

$$u_1'' + \beta^2 u_1 - N(u_0) - \alpha u_0 = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0. \tag{38}$$

为了更进一步提高精度, 可把 $N(u_0 + u_1)$ 展开成 Taylor 级数

$$N(u_0 + u_1) = N(u_0) + u_1 N'(u_0) + \cdots \tag{39}$$

于是方程(35)可近似表示成 Mathieu 方程[8]

$$u_1'' + (\beta^2 + N'(u_0))u_1 - N(u_0) - \alpha u_0 = 0,$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0. \tag{40}$$

3 应 用

考虑 Duffing 方程[8]

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \tag{41}$$

在本文中参数 ε 不受“小参数”的限制, 即 $0 \leqslant \varepsilon < +\infty$.

把非线性项 εu^3 线化成

$$\varepsilon u^3 \sim \alpha u, \tag{42}$$

式中 α 为线化参数・ 于是得以下线化方程

$$u'' + \beta^2 u = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \tag{43}$$

式中

$$\beta^2 = 1 + \alpha. \tag{44}$$

把方程(41)写成如下形式

$$u''+\beta^2u+\varepsilon u^3-\alpha u=0,$$
$$u(0)=A,\quad u'(0)=0. \tag{45}$$

设 $u=u_0+u_1$, 式中 u_0 是线化方程(43) 的解, 于是可得

$$\left.\begin{aligned}&u_1''+\beta^2u_1+\varepsilon(u_0+u_1)^3-\alpha(u_0+u_1)=0,\\&u_1(0)=0,\quad u_1'(0)=0.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

上述方程可近似地表示成

$$\left.\begin{aligned}&u''_1+\beta^2u_1+\varepsilon u_0^3-\alpha u_0=0,\\&u_1(0)=0,\quad u_1'(0)=0.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

注意到 $u_0=A\cos\beta t$, 方程(47) 可重写成

$$u_1''+\beta^2u_1+\left(\frac{3}{4}\varepsilon A^2-\alpha\right)A\cos\beta t+\frac{1}{4}\varepsilon A^3\cos3\beta t=0. \tag{48}$$

为了消除长期项, 令 $\cos\beta t$ 的系数等于零, 于是可得

$$\alpha=\frac{3}{4}\varepsilon A^2. \tag{49}$$

方程(48) 的解为

$$u_1=-\frac{A^3}{32\beta^2}(\cos\beta t-\cos3\beta t). \tag{50}$$

于是我们得到了方程的近似解

$$u=u_0+u_1=A\cos\beta t-\frac{\varepsilon A^3}{32\beta^2}(\cos\beta t-\cos3\beta t), \tag{51}$$

其中的角频率可表示为

$$\beta=\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}, \tag{52}$$

这和改进的 Lindstedt_Poincare 方法[6,7]得到的结果完一致.

显然当 ε 很小时, 即 $0<\varepsilon\ll1$. 角频率可近似表示为

$$\beta=1+\frac{3}{8}\varepsilon A^2. \tag{53}$$

在这种情况下, 我们得到的结果和用 Lindstedt_Poincare 方法[9,10]得到的结果完一致, 但是本文得到的结果并不受小参数的限制. 本文得到的近似周期可表示为

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{1+3\varepsilon A^2/4}}. \tag{54}$$

为了便于比较, 我们写出其精确周期[8]

$$T_{ex}=\frac{4}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k\sin^2x}}, \tag{55}$$

其中 $$k=\frac{\varepsilon A^2}{2(1+\varepsilon A^2)}.$$

很显然式(54) 对于所有的 ε 都一致有效, 即使当 $\varepsilon\to\infty$ 时

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{T_{ex}}{T}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2}}{2\pi}\frac{4}{\sqrt{1+\varepsilon A^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k\sin^2x}}\right\}=$$
$$\frac{2\sqrt{3/4}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-0.5\sin^2x}}=0.9294. \tag{56}$$

可见其最大相对误差小于 7%•

为什么得到的解对于所有的 ε 都一致有效呢?根据式(3) 的假定, 当

$$\left|\frac{\varepsilon A^2}{32\beta^2}\right| < 1 \tag{57}$$

或

$$\beta^2 > \frac{1}{32}\varepsilon A^2 \tag{58}$$

时, 得到的近似解将一致有效• 由式(52), 上述不等式可重写成

$$1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2 > \frac{1}{32}\varepsilon A^2, \tag{59}$$

显然当 $\varepsilon A^2 \to \infty$ 时, 上述不等式也成立, 所以我们得到的近似解对于所有的 ε 都一致有效•

为了进一步说明方法的有效性, 下面再来求数学摆的近似解•

$$u'' + \omega^2 \sin u = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0• \tag{60}$$

应用 Taylor 级数, 方程(60) 可写成

$$u'' + \omega^2 u + \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1} = 0, \tag{61}$$

方程(61) 可进一步写成如下形式

$$u'' + \beta^2 u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^2}{(2n+1)!} u^{2n+1} - \alpha u = 0, \tag{62}$$

式中

$$\beta^2 - \alpha = \omega^2, \tag{63}$$

其中 α 为线化参数•

设 $u = u_0 + u_1$, 式中 u_0 是线化方程的解, 于是可得

$$u_1'' + \beta^2 u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^2}{(2n+1)!} (u_0 + u_1)^{2n+1} - \alpha(u_0 + u_1) = 0, \tag{64}$$

其初始条件为 $u_1(0) = 0$ 及 $u_1'(0) = 0$•

上述非线性方程可近似地表示成

$$u_1'' + \beta^2 u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^2}{(2n+1)!} u_0^{2n+1} - \alpha u_0 = 0, \tag{65}$$

把 $u_0 = A\cos\beta t$ 代入方程(65) 得

$$u_1'' + \beta^2 u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^2}{(2n+1)!} A^{2n+1} \cos^{2n+1}\beta t - \alpha A\cos\beta t = 0• \tag{66}$$

在上式中应用三角恒等式:

$$\cos^{2n+1}\theta = \frac{1}{2^{2n}}\left[\cos(2n+1)\theta + (2n+1)\cos(2n-1)\theta + \cdots + \frac{(2+1)!}{n!(n+1)!}\cos\theta\right]$$

并合并同类项, 为了消除长期项, 令 $\cos\beta t$ 的系数等于零:

$$\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n}(2n+1)!\,n!(n+1)!} A^{2n+1} - \alpha A = 0 \tag{67}$$

或

$$\alpha = \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+1)!} A^{2n}, \tag{68}$$

于是角频率可表示为

$$\beta = \sqrt{\omega^2 + \alpha} = \omega\sqrt{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}A^{2n}} \tag{69}$$

应用变分迭代方法[11], 我们可以非常方便地求得线性方程(66)的解

$$u_1(t) = \frac{1}{\beta}\int_0^t \sin\beta(\tau - t)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\omega^2}{(2n+1)!}A^{2n+1}\cos^{2n+1}\beta\tau - \alpha A\cos\beta\tau\right\}d\tau =$$

$$\frac{1}{\beta}\int_0^t \sin\beta(\tau - t)\left\{\omega^2\sin(A\cos\beta\tau) - A(1+\alpha)\cos\beta\tau\right\}d\tau, \tag{70}$$

我们写出其中的前二项

$$u_1(t) \approx -\frac{(16 - A^2)A^3}{3\,027\beta^2}(\cos 3\beta t - \cos\beta t) + \frac{A^5}{46\,080\beta^2}(\cos 5\beta t - \cos\beta t) + \cdots \tag{71}$$

于是得方程的解

$$u = u_0 + u_1 = A\cos\beta t + \frac{\omega^2}{\beta}\int_0^t \sin\beta(\tau - t)\left\{\sin(A\cos\beta\tau) - A(1+\alpha)\cos\beta\tau\right\}d\tau \approx$$

$$A\cos\beta t - \frac{(16 - A^2)A^3}{3\,027\beta^2}(\cos 3\beta t - \cos\beta t) + \frac{A^5}{46\,080\beta^2}(\cos 5\beta t - \cos\beta t), \tag{72}$$

式中的角频率 β 由式(69) 确定• 数学摆的近似周期可表示为

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}A^{2n}}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{192}A^4 - \cdots}} \tag{73}$$

上式也具有很高的精度• 当 A 很小时可得

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{1}{16}A^2\right), \tag{74}$$

因此在这种情况下, 我们得到的结果和 Mickens[12] 和 Hagedorn[13] 的相应结果完全一致• 但是我们得到的结果对于大的 A 也一致有效• 即使当 $A = \pi/2$ 时, 我们得到的近似解为 $T = 1.17T_0$, 而精确解为 $T_{ex} = 1.16T_0$, 式中 $T_0 = 2\pi/\omega$•

4 结 论

本文中给出了一种新的非线性分析方法(线化校正方法)• 从给出的二个例子来看, Duffing 方程的近似周期的最大相对误差小于 7%, 而对于数学摆即使当初始转角为 $\pi/2$ 时, 近似周期的最大相对误差小于也小于 0.9%• 因此我们有理由相信该理论是比较有效和方便的•

[参 考 文 献]

[1] 刘高联. 奇异摄动理论发展的新方向: 人工参数法和反摄动法[A]. 见: 程昌钧, 戴世强, 刘宇陆 主编. 现代数学和力学(MMM) Ⅷ[C]. 上海: 上海大学出版社, 1997, 47—53.

[2] HE Ji_huan. Homotopy perturbation technique[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, **178**(3/4): 257—262.

[3] HE Ji_huan. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems[J]. International J Nonlinear Mechanics, 2000, **35**(1): 37—43.

[4] HE Ji_huan. Some new approach to Duffing equation with strongly & high order nonlinearity (Ⅱ) parameterized perturbation technique[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 1999, **4**(1): 81—82.
[5] HE Ji_huan. Modified straightforward expansion[J]. Meccanica, 1999, **34**(4): 287—289.
[6] HE Ji_huan. A new perturbation technique which is also valid for large parameters[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, **229**(5): 1257—1263.
[7] HE Ji_huan. A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques[J]. Int J Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 2000, **1**(1): 51—70.
[8] Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques[M]. London: John Wiley & Sons, 1981.
[9] HE Ji_huan. Modified Lindsted_Poincare Methods for some strongly nonlinear oscillations, part Ⅰ: Expansion of a constant[J]. Int J Nonlinear Mechanics, 2002, **37**(2): 309—314.
[10] HE Ji_huan. Modified Lindsted_Poincare Methods for some strongly nonlinear oscillations, part Ⅱ: a new transformation[J]. Int J Nonlinear Mechanics, 2002, **37**(2): 315—320.
[11] HE Ji_huan. Variational iteration method—a kind of nonlinear analytical technique: some examples [J]. Int J Nonlinear Mechanics, 1999, **34**(4): 699—708.
[12] Mickens R E. An Introduction to Nonlinear Oscillations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
[13] Hagedorn P. Nonlinear Oscillations[M]. Wolfram Stafler, transl. [M]. Oxford: Clarendon Press, 1981. (English version)

Linearization and Correction Method for Nonlinear Problems

HE Ji_huan
(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: A new perturbation_like technique called linearization and correction method is proposed. Contrary to the traditional perturbation techniques, the present theory does not assume that the solution is expressed in the form of a power series of small parameter. To obtain an asymptotic solution of nonlinear system, the technique first searched for a solution for the linearized system, then a correction was added to the linearized solution. So the obtained results are uniformly valid for both weakly and strongly nonlinear equations.

Key words: nonlinearity; asymptotic solution; perturbation technique