

文章编号: 1000-0887(2002) 03\_0239\_10

# 基于膜板比拟理论的一个新的 四边形薄板单元\*

黄若煜, 郑长良, 钟万勰, 姚伟岸

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 平面弹性与板弯曲的相似理论为构造薄板单元提供了一条有效的新途径。由于避开了  $c^1$  连续性的困难, 使得薄板单元的构造变得简单。更为深入地讨论了该相似性理论的应用, 并构造了一个新的四节点十六自由度薄板单元。数值结果表明, 该单元能通过分片试验, 具有良好的收敛性和精度。

关键词: 板弯曲; 膜板比拟; 收敛性; 有限元

中图分类号: O302 文献标识码: A

## 引 言

由于  $c^1$  连续性的要求, 构造协调的 Kirchhoff 板弯曲单元是十分困难的。为克服这一困难出现了多种方法, 这些方法放松了  $c^1$  连续性的要求但仍保证单元的收敛性。它们基本上可归为两类: 其一是以弱连续代替逐点连续, 代表单元有应力杂交元、拟协调元和精化元等; 另一类是应用 Mindlin-Reissner 板理论再以某种方式强加 Kirchhoff 条件, 代表单元为 DKT 和 DKQ 系列。这两类方法在许多著作中都有详细的论述<sup>[1],[2]</sup>。近来, 人们注意到应用平面弹性与板弯曲之间的静力-几何比拟(本文简称为膜板比拟)理论可以自然地避开  $c^1$  连续性困难, 为构造板弯曲单元开辟了崭新的途径<sup>[3]</sup>。

膜板比拟理论最早由 Southwell<sup>[4]</sup> 提出, 后来也有一些相关的应用<sup>[5]</sup>, 这些论述无不强调了比拟的意义在于一方的方法可以借用于另一方。将膜板比拟理论应用于有限元的构造, 可把性态较好的平面弹性有限单元借助膜的相互转换变换成相应的板单元, 这无论在有限元理论及其实际应用上都是一项令人感兴趣而又有价值的探索和尝试。

钟万勰等<sup>[3]</sup>成功地解决了平面单元与板弯曲单元的转化问题。他们成功地将平面弹性的 CST 元转化为板弯曲中著名的 Morley 单元(Morley 单元等价于杂交元 HSM6 和离散 Kirchhoff 单元 DKT6<sup>[2],[6]</sup>)。文献[3]中给出了该三角单元转换中将以应力函数为节点自由度的板单元变换为以位移(挠度和转角)为自由度的板单元的一个线性方法, 但该线性变换不适用于高阶平

\* 收稿日期: 2000\_12\_12; 修订日期: 2001\_08\_26

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19732020)

作者简介: 黄若煜(1972—), 男, 博士; 钟万勰(1934—), 男, 教授, 中科院院士;  
郑长良(1963—), 男, 博士。

面单元的转换。本文从比拟理论出发,给出了一个适用于高阶平面单元的应力函数一位移转换的一般方法,并成功地将一个平面八节点单元转换成一个四边形四节点薄板单元。

## 1 膜板比拟理论

膜板比拟理论可用下表作一简明表述,更详细的描述请参考文献[3]。表中左右两侧的一一对应显示了平面弹性和板弯曲两个体系的同构关系。

表 1 膜板比拟关系

平面弹性	板弯曲
Airy 应力函数 $\phi$	横向挠度 $w$
面内位移 $u, v$ 向量	弯矩函数 $\phi_x, \phi_y$ 向量
应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$	弯矩 $M_x, M_y, 2M_{xy}$
应变_位移关系 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$	弯矩_弯矩函数关系 $M_y = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, M_x = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, 2M_{xy} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}$
应力函数_应力关系 $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$	挠度_曲率关系 $k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$
应力_应变关系 $\sigma = D\varepsilon$ $\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{Bmatrix}^T$ $\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T$ $D = E \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$	弯矩_曲率关系 $k = Cm$ $k = \begin{Bmatrix} k_y & k_x & k_{xy} \end{Bmatrix}^T$ $m = \begin{Bmatrix} M_y & M_x & 2M_{xy} \end{Bmatrix}^T$ $C = \frac{1}{D} \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{2} \end{bmatrix}$
$u, v$ 的平衡方程	$\phi_x, \phi_y$ 的协调方程
$\phi$ 的协调方程	$w$ 的平衡方程
最小总势能原理	最小总余能原理

## 2 基于膜板比拟理论的板单元

### 2.1 单元的构造

应用膜板比拟来构造板单元的关键是引入两个弯矩函数  $\phi_x, \phi_y$ , 由于只要求  $\phi_x, \phi_y$  有  $c^0$  连续性, 从而  $c^1$  连续性困难不复存在。从表 1 中可以看出, 要从一个体系进入另一个体系只需作变元的对应变换及如下的弹性常数变换即可。

$$D^{-1} \leftrightarrow E \quad -\nu \leftrightarrow \nu$$

从而可以肯定按这样的对应变换原则直接就能将平面位移单元转变为板弯曲单元, 但是这样得到的是基于最小总余能原理而以弯矩函数  $\phi_x, \phi_y$  为节点自由度的板单元, 我们称之为初级板单元。很显然这种初级板单元是难以直接应用的, 必须将它转化为以位移为自由度的最终板单元。所以, 将平面单元转化为板单元的过程自然分为两步: 原始平面单元经由体系变换的对应原则变为初级板单元, 初级板单元经过应力函数一位移转换变为最终板单元。显然

第一步是十分简单的, 而且不会破坏原始平面单元的收敛性和精度。第二步则相对复杂。

下面我们详细讨论第二步的具体过程。经过第一步的体系转换, 得到以弯矩函数  $\phi_x, \phi_y$  为节点自由度的初级板单元, 它的单元节点向量是

$$u = \left\{ \dots \phi_{xi} \quad \phi_{yi} \quad \dots \right\}^T \quad (i = 1, \dots, n),$$

$n$  为初级板单元的单元节点总数。在初级板单元上有弯矩函数的插值形式如下

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = Nu \quad (1)$$

$N$  表示弯矩函数的插值矩阵。相应地有内力场

$$m = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = Bu \quad (2)$$

单元的余能是

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_e} m^T C m dx dy = \frac{1}{2} u^T \left[ \iint_{\Omega_e} B^T C B dx dy \right] u = \frac{1}{2} u^T F u, \quad (3)$$

$F$  就是初级板单元的单元刚度阵。显然存在  $u$  的对偶向量

$$\varphi = Fu, \quad (4)$$

$\varphi$  称为角卷向量<sup>[3]</sup>。作 Legendre 变换得到单元的势能为

$$U_e = \sigma^{-1} \varphi^T F^{-1} \varphi, \quad (5)$$

这里  $F^{-1}$  是  $F$  的广义逆。注意到  $\varphi$  一定是几何向量, 但其含义不很明确, 不便直接使用。为此我们假设存在某个含义明确的位移向量  $d$  且有如下关系

$$\varphi = \Phi d, \quad (6)$$

则立即得到对应于向量  $d$  的单元刚度阵

$$R = \Phi^T F^{-1} \Phi \quad (7)$$

这就是最终板单元的单元刚度阵。

## 2.2 $d$ 和 $\Phi$ 的确定

由于  $d$  和  $\Phi$  都是未知的, 因此  $d$  和  $\Phi$  的确定是构造最终板单元的关键。文献[3] 根据 CST 元与 CCT 元的对比确定  $d$  的各分量应是节点挠度  $w$  和边线平均转角并从而确定了  $\Phi$ 。但不能将从常应变单元这种简单情形得出的结论直接应用于更为一般的情形。本文从膜板比拟理论出发推导出  $d$  和  $\Phi$  的一般形式, 以确保转换的正确性。

膜板比拟表明平面弹性的应力和节点力向量分别对应于板弯曲的曲率和角卷向量。平面单元处理平衡方程的直观方式是将单元所占据的弹性片边缘的应力以某种方式堆积 (Lump) 到节点上并以节点力平衡代替弹性片边缘上的逐点应力平衡; 相应地, 对于板弯曲的情形就应是“将板单元边缘的曲率以某种方式堆积到节点上并以节点的角卷量协调代替板边缘上的逐点曲率协调”。这就说明: 只要在单元边缘上进行曲率堆积的运算就可生成角卷向量, 而曲率是有明确含义的几何量, 由此可以确定  $d$  和  $\Phi$ 。如果曲率堆积的方式与原始平面单元应力堆积的方式一致, 那么这种转换将不会破坏原始单元的收敛性和精度。

现首先以平面四节点单元为例来详加讨论。如图 1 所示,  $\bar{ij}$  是单元的一条边, 外法向为  $n$ , 长度为  $L_{ij}$ , 中点为  $k$ , 有原点在  $k$  的局部坐标系  $\{n, s\}$ , 切向坐标  $s$  指向  $j$ 。

对于平面单元, 在局部坐标系  $\{n, s\}$  中的单元边缘应力是切向应力  $\tau_{ns}$  和法向应力  $\sigma_n$ , 熟

知的堆积方式是

$$\begin{cases} T_i = \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \tau_{ns} N_i ds, & P_i = \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \sigma_n N_i ds, \\ T_j = \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \tau_{ns} N_j ds, & P_j = \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \sigma_n N_j ds. \end{cases} \quad (8)$$

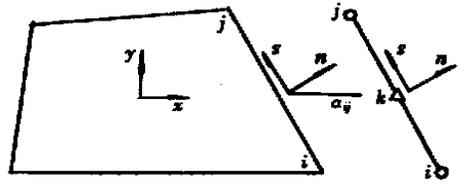


图1 单元及其边缘上的局部坐标

$$N_i = \frac{1 - s/(L_{\bar{y}}/2)}{2}, N_j = \frac{1 + s/(L_{\bar{y}}/2)}{2} \quad (9)$$

$T_i$ 、 $T_j$  和  $P_i$ 、 $P_j$  分别是  $\bar{ij}$  边所贡献的节点  $i$ 、 $j$  的切向力和法向力。对板单元的两个边缘曲率

$$k_{ns} = -\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s}, \quad k_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \quad (10)$$

应用同样的方式向节点  $i$  堆积得

$$\int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} k_{ns} N_i ds = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2} - \frac{1}{L_{\bar{ij}}} \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \frac{\partial w}{\partial n} ds = -\theta_k \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2} + \theta_{s\bar{j}}, \quad (11)$$

$$\int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} k_s N_i ds = -\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2} + \frac{1}{L_{\bar{ij}}} \Big|_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} = -\theta_n \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2} + \frac{w_j - w_i}{L_{\bar{ij}}}. \quad (12)$$

当沿一个单元的四条边都按此方式堆积完毕后,  $-\theta_k \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2}$  和  $-\theta_n \Big|_{s=-L_{\bar{y}}/2}$  这样的项将相互抵消, 因此可以不加考虑, 从而对应于(8) 写出  $\bar{ij}$  边的曲率堆积结果如下

$$\begin{cases} \varphi_{si} = \theta_{s\bar{j}}, & \varphi_{ni} = (w_j - w_i)/L_{\bar{ij}}, \\ \varphi_{sj} = -\theta_{s\bar{ij}}, & \varphi_{nj} = -(w_j - w_i)/L_{\bar{ij}}, \end{cases} \quad (13)$$

$\varphi_{si}$ 、 $\varphi_{sj}$  和  $\varphi_{ni}$  和  $\varphi_{nj}$  分别是  $\bar{ij}$  边所贡献的节点  $i$ 、 $j$  的切向角卷和法向角卷。  $\theta_{s\bar{j}}$  是  $\bar{ij}$  边的切向平均转角。与文[3] 的以节点位移  $w_i$ 、 $w_j$  和边线平均转角  $\theta_s$  表示角卷向量的表达式完全一致。

其次, 讨论平面八节点二次直边单元。单元几何描述仍如图1 所示, 唯一的不同在于  $k$  也是节点。于是  $\bar{ij}$  边上的形函数是

$$\begin{aligned} N_j &= \left\{ s \sqrt{\left(\frac{L_{\bar{ij}}}{2}\right)^2} \right\} \left\{ s \sqrt{\left(\frac{L_{\bar{ij}}}{2}\right)^2} + 1 \right\} / 2, & N_k &= 1 - \left\{ s \sqrt{\left(\frac{L_{\bar{ij}}}{2}\right)^2} \right\}^2, \\ N_i &= \left\{ s \sqrt{\left(\frac{L_{\bar{ij}}}{2}\right)^2} \right\} \left\{ s \sqrt{\left(\frac{L_{\bar{ij}}}{2}\right)^2} - 1 \right\} / 2. \end{aligned} \quad (14)$$

将边缘曲率  $k_{ns}$  和  $k_s$  如下堆积到  $i$ 、 $k$ 、 $j$  三个节点上

$$\int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} k_{ns} N_i ds, \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} k_s N_i ds, \dots \quad (15)$$

经过积分运算并略去堆积后互相抵消的那些项, 我们可得到角卷表达式为

$$\begin{cases} \varphi_{si} = \theta_{s\bar{j}} - 4\theta_{s\bar{ij}}, & \varphi_{ni} = (-w_j - 3w_i + 4w_{ij})/L_{\bar{ij}}, \\ \varphi_{sk} = 8\theta_{s\bar{j}}, & \varphi_{nk} = (4w_j + 4w_i - 8w_{\bar{ij}})/L_{\bar{ij}}, \\ \varphi_{sj} = -\theta_{s\bar{ij}} - 4\theta_{s\bar{ij}}, & \varphi_{nj} = (-3w_j - w_i + 4w_{\bar{ij}})/L_{\bar{ij}}. \end{cases} \quad (16)$$

$$\theta_{s\bar{j}} = \frac{1}{L_{\bar{ij}}} \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} \theta_s ds, \quad w_{\bar{ij}} = \frac{1}{L_{\bar{ij}}} \int_{-L_{\bar{y}}/2}^{L_{\bar{y}}/2} w ds. \quad (17)$$

这里出现了两个高阶自由度  $\theta_s$  和  $w$ 。注意到当网格无限细分使得每一个单元收敛到常曲率状态时,  $\theta_s$  和  $w$  沿单元边缘分别按线性和二次规律分布, 它们可表达为

$$\begin{cases} \theta_s = \theta_s + \frac{\partial \overline{\theta_s}}{\partial s}, \\ w = w_i \frac{1-s}{2} \sqrt{\left(\frac{L_{ij}}{2}\right)} + w_j \frac{1+s}{2} \sqrt{\left(\frac{L_{ij}}{2}\right)} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{L_{ij}^2}{4} \left( s \sqrt{\left(\frac{L_{ij}}{2}\right)} - 1 \right)^2, \end{cases} \quad (18)$$

这里  $\overline{\partial \theta_s / \partial s}$  和  $\overline{\partial^2 w / \partial s^2}$  是相应的边线平均值。将(18)代入(16)得到另一个角卷表达式

$$\begin{cases} \varphi_{si} = \theta_s - \frac{L_{ij}}{3} \frac{\partial \overline{\theta_s}}{\partial s}, \\ \varphi_{sk} = \frac{2L_{ij}}{3} \frac{\partial \overline{\theta_s}}{\partial s}, \\ \varphi_{sj} = -\theta_s - \frac{L_{ij}}{3} \frac{\partial \overline{\theta_s}}{\partial s}, \\ \varphi_{ni} = \frac{w_j - w_i}{L_{ij}} - \frac{L_{ij}}{3} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial s^2}, \\ \varphi_{nk} = \frac{2L_{ij}}{3} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial s^2}, \\ \varphi_{nj} = -\frac{w_j - w_i}{L_{ij}} - \frac{L_{ij}}{3} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial s^2}. \end{cases} \quad (19)$$

显然, 如果将高阶项去掉则(19)退化为(13)。尽管(19)也能保证收敛, 考虑到它附加了一个假设, 精度会受影响; 另一方面是引入边界条件时,  $\theta_s$  和  $w$  这种被积项不含导数的积分形式的自由度不会造成什么困难, 而  $\overline{\partial \theta_s / \partial s}$  和  $\overline{\partial^2 w / \partial s^2}$  则比较麻烦, 所以我们选择(16)。

现在可以确认这里  $d$  中的元素是各个节点量  $w_i$  和边线量  $\theta_{sj}$ 、 $\theta_{sij}$ 、 $w_{ij}$ 。 (16) 式给出的是单元边线的局部坐标系  $\{n, s\}$  中的角卷表达式, 只要按通常的向量坐标转换将它们转换到单元局部坐标系中, 将每条边对各节点角卷量的贡献加合, 组装成单元局部坐标系中的角卷向量  $\Phi$  的表达式, 就可得到  $d$  和  $\Phi$ 。为使这一过程更为清晰, 我们写出  $\overline{ij}$  边的组装算法

$$\begin{aligned} \varphi_{xi} &= \varphi_{xi} + (\theta_{sij} - 4\theta_{sij}) \cos \alpha_{ij} + ((-w_j - 3w_i + 4w_{ij}) / L_{ij}) \sin \alpha_{ij}, \\ \varphi_{yi} &= \varphi_{yi} + (\theta_{sij} - 4\theta_{sij}) \sin \alpha_{ij} + ((-w_j - 3w_i + 4w_{ij}) / L_{ij}) \cos \alpha_{ij}, \\ \varphi_{xk} &= \varphi_{xk} + (8\theta_{sij}) \cos \alpha_{ij} + ((4w_j + 4w_i - 8w_{ij}) / L_{ij}) \sin \alpha_{ij}, \\ \varphi_{yk} &= \varphi_{yk} + (8\theta_{sij}) \sin \alpha_{ij} + ((4w_j + 4w_i - 8w_{ij}) / L_{ij}) \cos \alpha_{ij}, \\ \varphi_{xj} &= \varphi_{xj} + (-\theta_{sj} - 4\theta_{sij}) \cos \alpha_{ij} + ((-3w_j - w_i + 4w_{ij}) / L_{ij}) \sin \alpha_{ij}, \\ \varphi_{yj} &= \varphi_{yj} + (-\theta_{sj} - 4\theta_{sij}) \sin \alpha_{ij} + ((-3w_j - w_i + 4w_{ij}) / L_{ij}) \cos \alpha_{ij}. \end{aligned} \quad (20)$$

这里  $\alpha_{ij}$  是  $\overline{ij}$  边的局部坐标系  $\{n, s\}$  与单元局部坐标系  $(x, y)$  之间的相对转角。符号: = 表示赋值。语句右端包含的自由度就是  $d$  的元素, 而对应的系数将决定  $\Phi$ 。

### 2.3 基于膜板转换的一个四节点 16 自由度的薄板单元

现在我们利用膜板转化方法将平面八节点直边亚参元转化为一个四边形十六自由度薄板单元。

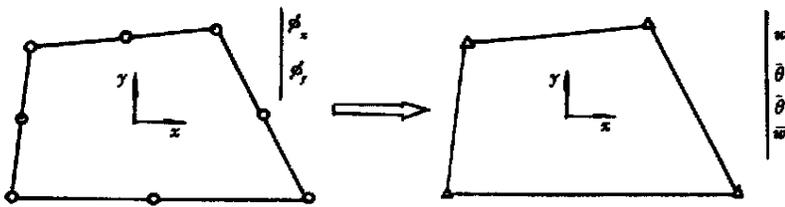


图2 单元转化示意图

由前所述, 将平面单元转化为板单元分为如下两步: 先是体系转换得出初级板单元; 后是应力函数一位移转换得到最终板单元。尽管从原则上说体系转换导出初级板单元是没有困难

的,但最终板单元的刚度阵(7)式需要初级板单元的刚度阵  $F$  的广义逆,而由于初级板单元的刚度阵不是满秩的,对应于三个零弯矩状态,它有 3 维的零子空间。为求得  $F$  的广义逆,我们希望把零子空间分离出来,从而使  $F$  表示为如下形式矩阵的合同变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{13 \times 13} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

子矩阵  $F$  是对称正定的,计算它的逆阵不会有什么困难。出于这个考虑,不能直接利用原始平面单元(属于 Serendipity 族)的刚度阵,需要重新列式。

设单元的局部物理坐标系为  $(x, y)$ , 参考坐标系为  $(\xi, \eta)$ 。它们之间的关系是

$$x = \sum_{I=1}^4 \frac{(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)}{4} x_I, \quad y = \sum_{I=1}^4 \frac{(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)}{4} y_I, \quad (22)$$

$$\xi = \begin{cases} -1, 1, 1, -1 \end{cases}, \quad \eta = \begin{cases} -1, -1, 1, 1 \end{cases}.$$

指标集  $\{I \mid I = 1, 2, 3, 4\}$  代表 4 个角节点。

为得到(21)的形式,我们采取了混合坐标列式的技巧,写出两个弯矩阵函数的插值函数

$$\phi_x = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & \xi & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta & \xi\eta^2 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{a}_x = \begin{Bmatrix} a_{x1}, \dots, a_{x8} \end{Bmatrix}^T, \quad (23)$$

$$\phi_y = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & \xi & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta & \xi\eta^2 \end{Bmatrix} \mathbf{a}_y, \quad \mathbf{a}_y = \begin{Bmatrix} a_{y1}, \dots, a_{y8} \end{Bmatrix}^T, \quad (24)$$

$\mathbf{a}_x$  和  $\mathbf{a}_y$  是广义参数向量。因为线性函数  $x, y$  包含  $\xi, \eta$  的线性组合,所以混合坐标列式是合理的。将四个角节点和四个边线中点的坐标依次代入(23)、(24)得到

$$\mathbf{u} = T\mathbf{a} \quad \text{或} \quad \mathbf{a} = T^{-1}\mathbf{u}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_x^T & \mathbf{a}_y^T \end{Bmatrix}^T, \quad (25)$$

$T$  是节点弯矩函数向量  $\mathbf{u}$  和广义参数向量  $\mathbf{a}$  之间的转换矩阵。

由(2)得到如下形式的弯矩向量  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_a^* \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}_{x1 \times 5}^T & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 5} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & 1 & \mathbf{b}_{y1 \times 5}^T \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{b}_{y1 \times 5}^T & 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}_{x1 \times 5}^T \end{bmatrix} \mathbf{a}, \quad (26)$$

经矩阵列变换  $S$  把  $\mathbf{B}_a^*$  变为新的形式

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_a^* S = [\mathbf{0}_{3 \times 3} \quad \mathbf{B}_{3 \times 13}] \quad (27)$$

现在可以写出  $F$  为

$$F = \iint_{\Omega_e} (\mathbf{B}_a S^{-1} T^{-1})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_a S^{-1} T^{-1}) d\Omega_e = (TS)^{-T} \iint_{\Omega_e} (\mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a) d\Omega_e (TS)^{-1}. \quad (28)$$

显然(28)右端的积分式具有(21)的形式。因为需要的是  $F^{-1}$  而非  $F$ , 所以不用求  $TS$  的逆阵,

$$F^{-1} = (TS) \left[ \iint_{\Omega_e} (\mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a) d\Omega_e \right]^{-1} (TS)^T. \quad (29)$$

将(29)代入(7)我们得到了最终板单元的单元刚度阵  $R$

$$R = (\Phi^T TS) \left[ \iint_{\Omega_e} (\mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a) d\Omega_e \right]^{-1} (\Phi^T TS)^T. \quad (30)$$

$R$  所对应的单元位移向量  $d$  为

$$d = \left\{ w_1, w_2, w_3, w_4, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{34}, \theta_{41}, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{34}, \theta_{41}, w_{12}, w_{23}, w_{34}, w_{41} \right\}^T. \quad (31)$$

## 3 数值算例

### 3.1 分片试验

已经知道, 平面八节点直边亚单元是协调元, 而根据上面的讨论, (16) 式的转换方式可保持该平面单元的性质, 于是可以肯定膜板转换得到的板单元一定能通过分片试验. 对图 3 分片试验的计算结果(表 3)表明该单元确实通过分片试验.

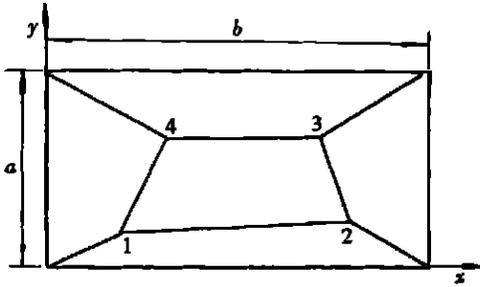


图 3 分片试验(  $a = 0.12; b = 0.24;$   
 $t = 0.001; E = 1.0 \times 10^6; \nu = 0.25$  )

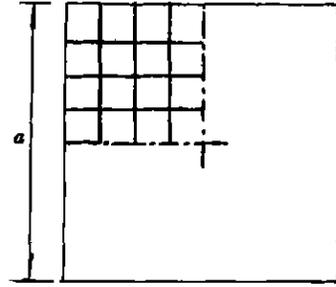


图 4 1/4 方板的网格

表 2 节点坐标

节点	x	y
1	0.04	0.02
2	0.18	0.03
3	0.16	0.08
4	0.08	0.08

表 3 分片试验结果(  $w = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2$  )

节点	挠度 $w$		弯矩 $M_x$	
	数值结果	准确值	数值结果	准确值
1	$1.399\ 988 \times 10^{-6}$	$1.400\ 000 \times 10^{-6}$	$1.111 \times 10^{-7}$	$1.111 \times 10^{-7}$
2	$1.935\ 002 \times 10^{-5}$	$1.935\ 000 \times 10^{-5}$	$1.111 \times 10^{-7}$	
3	$2.240\ 003 \times 10^{-5}$	$2.240\ 000 \times 10^{-5}$	$1.111 \times 10^{-7}$	
4	$9.599\ 993 \times 10^{-6}$	$9.600\ 000 \times 10^{-6}$	$1.111 \times 10^{-7}$	

### 3.2 在不同边界条件不同载荷下的方板

#### 1) 收敛性和精度

考虑图 4 所示的方板, 由于其对称性, 我们仅取 1/4 方板利用  $n \times n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) 六种网格进行分析. 对于集中力作用下的固支和简支板, 其板中心挠度  $w$  分别在图 5 和图 6 中给出. 由离散 Kirchhoff 板元 DKQ8<sup>[6]</sup> 和 DKQ12<sup>[2],[6]</sup> 得到的结果也同时给出以资比较. 从图中可以看到该单元具有良好的精度, 收敛速度快.

对于分布力作用下的中心挠度  $w$  和弯矩  $M_x$  在表 4 中给出, 我们可以看到该单元具有良好的精度.

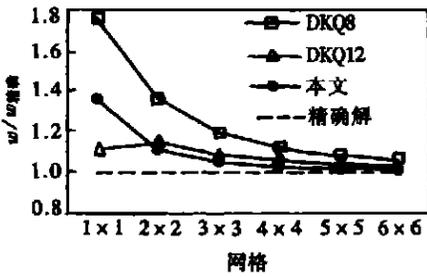


图5 受集中力固支方板的中心挠度

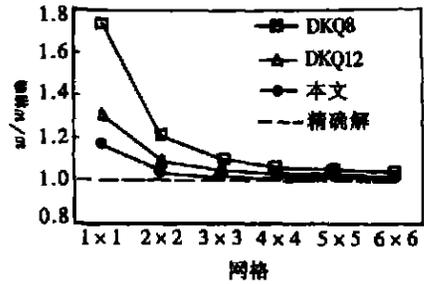


图6 受集中力简支方板的中心挠度

表4 方板受分布力的解

网格	固支边界		简支边界	
	$w (\times 10^{-3} qa^4/D)$	$M_x (\times 10^{-2} qa^2)$	$w (\times 10^{-3} qa^4/D)$	$M_x (\times 10^{-2} qa^2)$
1×1	1.006	2.24	3.375	4.38
2×2	1.266	2.22	4.042	4.70
3×3	1.265	2.25	4.060	4.78
4×4	1.265	2.27	4.061	4.77
5×5	1.265	2.28	4.060	4.77
6×6	1.265	2.28	4.060	4.78
精确解	1.265	2.29	4.062	4.79

2) 歪斜网格方板

为考察单元抗歪斜网格的能力,文献[7]、[8]计算了1/4方板划分为如下几个网格的情形(图7)•我们用本文的单元也作了计算,在表5和表6中给出中心挠度 $w$ 和弯矩 $M_x$ 的计算结果与文献[7]、[8]的结果做比较•对比表明:本文的单元是足够强壮的•

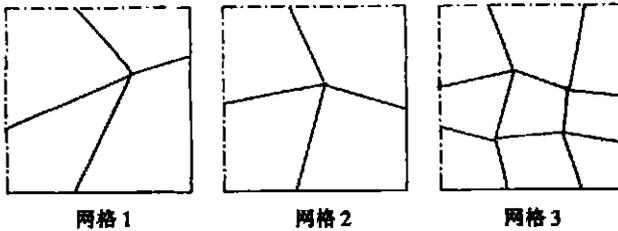


图7 歪斜网格

表5 歪斜网格的计算结果: 中心挠度和弯矩(简支边界)

网 格 单 元	网格1		网格2		网格3	
	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$
本文	4.070	4.81	4.087	4.86	4.060	4.79
[7]	4.277	5.04	3.982	4.84	4.112	4.70
[8]	4.055	4.69	4.09	4.70	4.056	4.74
精确解	$w = 4.062 \times 10^{-3} qa^4/D, M_x = 4.79 \times 10^{-2} qa^2$					

表 6 歪斜网格的计算结果: 中心挠度和弯矩(固支边界)

单元 \ 网格	网格 1		网格 2		网格 3	
	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$	$w$	$M_x$
本文	1.288	2.31	1.292	2.36	1.267	2.29
[7]	1.426	2.35	1.450	2.32	1.374	2.34
[8]	1.239	2.13	1.261	2.16	1.25	2.22
精确解		$w = 1.265 \times 10^{-3} qa^4/D, M_x = 2.29 \times 10^{-2} qa^2$				

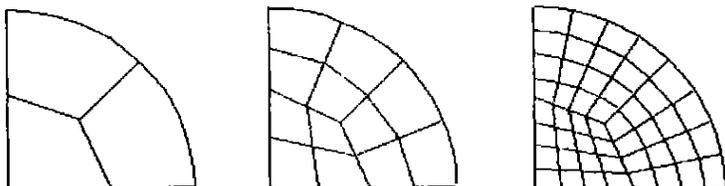


图 8 圆板的网格划分

3.3 在不同边界条件下受不同载荷的圆板

应用本文的新单元我们分析了一个圆形薄板。考虑到其对称性, 仅取其 1/4, 网格如图 8 所示。在固支边界和均布荷载条件下, 板中心点的挠度  $w$  的计算结果在图 9 中给出, 由单元 DKQ8<sup>[6]</sup> 和 DKQ12<sup>[2], [6]</sup> 得到的结果也同时给出以供比较。固支和简支板在分布和集中载荷作用下的中心挠度  $w$  和弯矩  $M_r = M_\theta$  列于表 7 中。

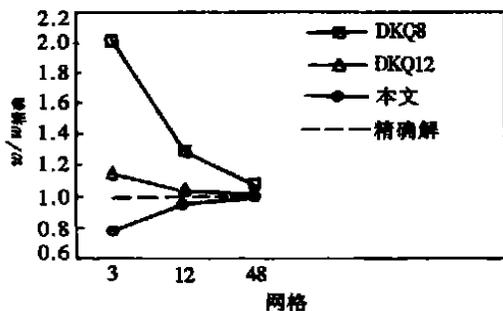


图 9 固支方板受分布力的收敛性结果

从这些结果看, 我们可以得到和方板分析中同样的结论。

表 7 圆板的计算结果

网格	固支边界			简支边界		
	分布力		集中力	分布力		集中力
	$w(\times \alpha)$	$M_r(\times \beta)$	$w(\times \gamma)$	$w(\times \alpha)$	$M_r(\times \beta)$	$w(\times \gamma)$
3	1.214	6.723	2.052	4.152	1.518	4.210
12	1.478	7.800	1.997	5.429	1.834	4.589
48	1.544	8.045	1.992	5.957	1.962	4.822
精确解	1.562	8.125	1.989	6.370	2.062	5.050

$\alpha = 10^{-2} qr^4/D, \beta = 10^{-2} qr^2, \gamma = 10^{-2} Pr^2/D$

4 结 论

数值试验的结果表明, 本文的单元能通过分片试验, 收敛过程稳定可靠, 具有令人满意的精度。可以说该单元确实继承了其原始平面单元的性质, 这就达到了膜板单元转化的目的。同时, 单元的实现证实了膜板转化这一新途径的正确性和广阔前景, 在理论和实践上都有许多

发展潜力•

[参 考 文 献]

- [1] Zienkiewicz O C. The Finite Element Method [M]. Third Ed. London: McGraw\_Hill Book Co, 1977.
- [2] Batoz J L, Dhatt G. Modélisation des Structures par Éléments Finis, Vol. 2, Poutres et Plaques [M]. Paris: Hermès, 1992.
- [3] 钟万勰, 姚伟岸. 板弯曲与平面弹性有限元的同一性[J]. 计算力学学报, 1998, 15(1): 1—13.
- [4] Southwell R V. On the analogues relating flexure and extension of flat plate[J]. Quarterly J Mech Appl Math, 1950, 3(3): 257—270.
- [5] Fraeijs de Veubeke B, Zienkiewicz O C. Strain energy bounds of finite element analysis by slab analogy[J]. J Strain Analysis, 1967, 2(4): 265—271.
- [6] Batoz J L, Hammadi F, Zheng C, et al. On the linear analysis of plates and shells using a new sixteen DOF flat shell element[A]. In: B H V Topping Ed. Advances in Finite Element Procedures and Techniques [C]. Edinburgh: Civil Comp Press, 1998, 31—41.
- [7] 卜小明, 龙驭球. 一种薄板弯曲问题的四边形位移单元[J]. 力学学报, 1991, 23(1): 53—60.
- [8] 吕和祥, 徐苏宁, 唐立民. 一个有效的任意四边形薄板弯曲单元[J]. 计算结构力学及其应用, 1989, 6(1): 147—158.

## A New Quadrilateral Thin Plate Element Based on the Membrane Plate Similarity Theory

HUANG Ruo\_yu, ZHENG Chang\_liang, ZHONG Wan\_xie, YAO Wei\_an  
(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P R China)

**Abstract:** A new effective path has been proposed to formulate thin plate element by using the similarity theory between plane elasticity and plate bending. Because of avoiding the difficulty of  $c^1$  continuity, the construction of thin plate elements becomes easier. The similarity theory and its applications were discussed more deeply, and a new four nodes, sixteen D. O. F (degree of freedom) thin plate element was presented on the base of the similarity theory. Numerical results for typical problems show that this new element can pass the patch test and has a very good convergence and a high precision.

**Key words:** plate bending; membrane plate similarity; convergence; finite element