

文章编号: 1000-0887(2002) 03-0299-10

# 无粘性土的应力矢量本构模型( I ) ——理论\*

史宏彦<sup>1</sup>, 谢定义<sup>2</sup>

(1. 汕头大学 土木系, 广东 汕头 515063; 2. 西安理工大学 岩土工程研究所, 西安 710048)

(陈正汉推荐)

**摘要:** 在充分考虑应力的矢量特性基础上, 通过将应力矢量的作用效应分解为球应力作用效应与应力比矢量(偏应力矢量与球应力之比)作用效应的叠加, 建立了一个全新的、适用于无粘性土在平面应变和三维条件下的非线性本构模型。该模型可以同时考虑应力的数量和方向变化对变形的影响, 既适用于单调静荷作用, 也适用于往返动荷作用。

**关键词:** 无粘性土; 主应力轴旋转; 中主应力; 应力矢量; 本构模型; 理论  
**中图分类号:** TU43; O347. 7 **文献标识码:** A

## 引 言

建立适用于一般应力条件的土的本构关系是岩土工程中的一个核心问题。近几十年来, 虽然提出的模型已有数十种之多, 但能够合理考虑应力的方向变化(即主应力轴旋转)和适用于静、动荷载作用的模型尚不多见。究其原因, 是这些模型只考虑了应力矢量的数量性质而忽略了其方向性质。许多试验结果表明<sup>[1,2]</sup>, 应力的方向变化对土的变化性质具有重要的影响, 是一个不容忽视的因数。

本文正是基于以上分析, 首先在平面应变条件下, 将应力矢量的作用效应分解为球应力作用效应与应力比矢量(偏应力矢量与球应力之比)作用效应的叠加, 建立了一个适用于无粘性土在平面应变条件下的非线性本构模型。其次, 以此平面应变条件下的非线性本构模型和多机构模型<sup>[3,4,5]</sup>为基础, 进而建立了三维应力条件下的本构关系。本文所提模型不仅能够同时考虑应力的数量和方向变化对变形的作用效应, 参数少且易于确定, 而且也能够很好地描述无粘性土的多种主要变形特性。

## 1 平面应变条件下的应力矢量本构模型

### 1.1 应力矢量作用效应的分解

为简单起见, 首先暂不考虑中主应力  $\sigma_2$  的影响。

设土中某点的应力为  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}\}$ , 大主应力  $\sigma_1$  与竖轴  $Z$  之间的夹角为  $\alpha$ , 则有

$$\sigma_{1,3} = \sigma_m \pm \sigma_m \sqrt{(S_{zx}/\sigma_m)^2 + (\tau_{xz}/\sigma_m)^2}, \quad (1a)$$

\* 收稿日期: 2000.08.30; 修订日期: 2001.08.20

作者简介: 史宏彦(1962—), 男, 陕西汉中人, 副教授, 博士, 主要从事岩土工程方面的数学与科研工作。

$$\tan 2\alpha = \tau_{xz}/S_{zx} = (\tau_{xz}/\sigma_m)/(S_{zx}/\sigma_m), \quad S_{zx} = (\sigma_z - \sigma_x)/2, \quad (1b)$$

式中,  $\sigma_m$  为不考虑中主应力  $\sigma_2$  影响时的平均有效应力(球应力), 由上式确定·

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = (\alpha_x + \alpha_z)/2 \cdot \quad (1c)$$

从式(1)可知:

①  $\{\sigma\}$  的作用效应等于  $\sigma_m, S_{zx}/\sigma_m$  和  $\tau_{xz}/\sigma_m$  的作用效应·

② 由于  $\sigma_m$  是一个球应力, 具有各向同性性质, 不会引起主应力轴的旋转, 因此, 引起主应力轴旋转的只能是  $S_{zx}/\sigma_m$  和  $\tau_{xz}/\sigma_m$ ·

$$\text{令 } X = S_{zx}/\sigma_m = (\sigma_z - \alpha_x)/(\sigma_z + \alpha_x), \quad Y = \tau_{xz}/\sigma_m = 2\tau_{xz}/(\sigma_z + \alpha_x) \cdot \quad (2)$$

建立一个  $OXY$  坐标系(图 1)· 设  $\{\sigma\}$  在该坐标系中位于点  $A$ , 称原点  $O$  和点  $A$  构成的矢量  $\eta_s$  为应力比矢量, 则有

$$\eta_s = Xi + Yj = |\eta_s| r, \quad S = \sigma_m \eta_s, \quad (3)$$

式中,  $i, j$  和矢径  $r = \cos 2\alpha i + \sin 2\alpha j$  分别为  $X$  轴、 $Y$  轴及  $\eta_s$  的单位矢量,  $S$  为偏应力矢量· 显然, 应力比矢量  $\eta_s$  等于偏应力矢量  $S$  与平均有效应力  $\sigma_m$  之比,  $S_{zx}/\sigma_m$  和  $\tau_{xz}/\sigma_m$  的作用效应完全可以由应力比矢量  $\eta_s$  等效代换,  $\sigma_m$  和  $\eta_s$  的作用效应等效于  $\{\sigma\}$  的作用效应·

③  $\eta_s$  的模  $|\eta_s|$  可以用如下定义的强度发挥角  $\phi_{m0}$

$$|\eta_s| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sin \phi_{m0} = (\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \quad (4)$$

表示, 而应力比矢量  $\eta_s$  的变化量

$$d\eta_s = d|\eta_s| r + |\eta_s| dr = d\eta_{ss} + d\eta_{sr} \quad (5a)$$

是由两个相互垂直的分矢量  $d\eta_{ss}$  和  $d\eta_{sr}$  构成的· 其中,  $d\eta_{ss}$  是  $d\eta_s$  在矢径  $r$  上的投影, 而  $d\eta_{sr}$  是  $d\eta_s$  在矢径  $r$  法线上的投影, 且

$$d\eta_{ss} = d|\eta_s| r = (\cos \phi_{m0} d\phi_{m0}) r = (\cos 2\alpha dX + \sin 2\alpha dY) r, \quad (5b)$$

$$d\eta_{sr} = (-2\sin \phi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha) i + (2\sin \phi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha) j, \quad (5c)$$

分量  $d\eta_{ss}$  和  $d\eta_{sr}$  分别反映了应力比矢量  $\eta_s$  的数量和方向变化, 它们的作用效应完全等效于  $d\eta_s$  的作用效应, 产生的应变增量就是  $\eta_s$  的数量和方向变化(即  $d\eta_s$ ) 产生的应变增量·

### 1.2 本构关系的建立

如果用  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xz}\}$  表示土中某点的应变,  $S_p$  表示土的性质,  $S_h$  表示应力历史, 则当不考虑荷载的速率效应时, 有

$$\{\varepsilon\} = F(S_p, S_h, \{\sigma\}) \quad (6a)$$

如前所述,  $\{\sigma\}$  的作用效应等效于  $\sigma_m$  和  $\eta_s$  的作用效应, 故上式可改写为

$$\{\varepsilon\} = F(S_p, S_h, \sigma_m, \eta_s) \quad (6b)$$

对上式两边微分, 并将式(5a)代入, 有

$$\{d\varepsilon\} = \frac{\partial F}{\partial S_p} dS_p + \frac{\partial F}{\partial S_h} dS_h + \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial \eta_s} d\eta_{ss} + \frac{\partial F}{\partial \eta_s} d\eta_{sr} \cdot \quad (7a)$$

在一个微小的加载过程中, 将土性  $S_p$  的变化隐含在土性参数的变化中,  $S_h$  的影响用随后引入的先期平均有效应力记忆面和先期应力记忆面反映· 这样, 上式可以简化为

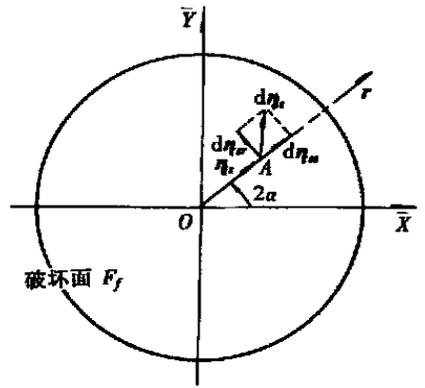


图 1  $\eta_s$  的定义及其  $d\eta_s$  的分解

$$\{d\varepsilon\} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} d\sigma_m + \frac{\partial F}{\partial \eta_k} d\eta_{ss} + \frac{\partial F}{\partial \eta_k} d\eta_{sr}, \quad (7b)$$

上式右边三项分别反映了平均有效应力  $\sigma_m$  的变化、应力比矢量  $\eta_k$  的数值变化和方向变化(即主应力轴旋转)所产生的应变增量。如果依次用  $\{d\varepsilon^c\}$ 、 $\{d\varepsilon^s\}$  和  $\{d\varepsilon^r\}$  表示, 则有

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^c\} + \{d\varepsilon^s\} + \{d\varepsilon^r\}. \quad (8)$$

上式表明, 应力状态的变化所产生的应变增量, 等于平均有效应力  $\sigma_m$  的变化、应力比矢量  $\eta_k$  的数量变化和主应力轴旋转各自产生的应变增量之和。显然, 前两项和后一项分别反映了应力矢量的数量变化和方向变化对变形的作用效应。这样, 只要通过适当的方法确定出这三个部分应变增量与应力状态及其增量之间的关系, 则总应变增量  $\{d\varepsilon\}$  也就确定了。这种本构关系能够同时考虑应力矢量的数量和方向对变形的作用效应, 称之为应力矢量本构模型。

### 1.3 平面应变条件下中主应力 $\sigma_2$ 的确定及其破坏准则

#### 1.3.1 中主应力 $\sigma_2$ 的确定

通过整理分析无粘性土在不同密度、应力状态和应力路径下的试验结果, 笔者发现, 在平面应变条件下, 中主应力  $\sigma_2$  与大主应力  $\sigma_1$  和小主应力  $\sigma_3$  具有如下简单关系<sup>[6]</sup>:

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}, \quad (9a)$$

并且, 上式受土性、密度状态和应力路径的影响较小。将式(1a)代入, 则该式可改写为

$$\sigma_2 = \sqrt{\alpha_x \alpha_z - \tau_{xz}}, \quad (9b)$$

由于  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  (或  $\alpha_x$ 、 $\alpha_z$  和  $\tau_{xz}$ ) 一般是已知的, 因此, 利用式(9)可以简便地计算出  $\sigma_2$ 。这在土体的强度和变形分析中考虑中主应力的影响提供了一个简捷方法。

#### 1.3.2 不考虑中主应力影响时的破坏准则

设土的有效内摩擦角为  $\phi$ 。由于发生破坏时  $\phi_{m0} = \phi$ , 因此, 从式(4)有

$$X^2 + Y^2 = R_f^2 = (\sin \phi)^2. \quad (10a)$$

#### 1.3.3 考虑中主应力影响时的破坏准则

根据空间滑动面(SMP)理论<sup>[7]</sup>, 当作用在SMP上的应力比  $\eta_k$  等于破坏应力比  $\eta_{kf}$  时土发生破坏。即

$$\eta_k = \eta_{kf} = \sqrt{(I_1 I_2 - 9I_3)/(9I_3)} = \sqrt{8} \tan \phi/3,$$

式中,  $I_1$ 、 $I_2$  和  $I_3$  为应力张量的三个不变量。将式(2)和(9a)代入, 整理后有

$$X^2 + Y^2 = R_f^2 = (\sin \phi_{ps})^2 \quad (10b)$$

式中,  $\phi_{ps}$  称为平面应变条件下考虑中主应力时土的有效内摩擦角, 由下式确定

$$\sin \phi_{ps} = \sqrt{3} \sqrt{2 + 3\eta_{kf}^2 - 2\sqrt{1 + \eta_{kf}^2}} \sqrt{3\sqrt{1 + \eta_{kf}^2} - 1} \quad (11a)$$

或者

$$\sec \phi_{ps} = \sqrt{0.25 + 2\sec^2 \phi} - 0.5. \quad (11b)$$

利用最小二乘法, 上式还可简化为

$$\phi_{ps} \approx 9\phi/8 = 1.125\phi \quad (11c)$$

式(11b)与(11c)的差别是微小的。显然, 在  $OXY$  坐标系中, 式(10a)和(10b)表示的破坏面都是一个简单的圆, 但考虑中主应力影响时破坏面的半径比不考虑时的半径大, 并且, 考虑中主应力影响时的内摩擦角要比不考虑时约大12%(见式(11c))。笔者已从数学上严格证明, 对于无粘性土, 平面应变条件下考虑中主应力时的破坏条件(即式(10b))就是三维应力条件下等

效内摩擦角  $\phi = \arcsin[(\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 + \sigma_3)]$  达到极大值的条件<sup>[6]</sup>。式(10b)和(11)的正确性已得到了大量试验结果的验证<sup>[6]</sup>。

#### 1.4 三种应力\_剪胀关系

松岗元(Matsuoka)<sup>[7]</sup>、Rowe<sup>[8]</sup>和笔者<sup>[6]</sup>分别基于强度发挥面理论、最小能比原理和能量守恒原理,推出了三种应力\_剪胀关系(分别称为松岗元、Rowe 和能量平衡应力\_剪胀关系)。它们可以统一表示为

$$d\varepsilon_x = 0.5(R_v \pm \cos 2\omega)d\varepsilon_1, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon_{xz}/\sin 2\omega = \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon)^2 + d\varepsilon_{xz}^2}, \quad (12a)$$

式中

$$\text{对于松岗元应力_剪胀关系: } R_v = \sin \phi_{m0} - 2(\eta_k - \mu) \cos \phi_{m0}/\lambda, \quad (12b)$$

$$\text{对于 Rowe 应力_剪胀关系: } R_v = \frac{\tan^2(45^\circ + 0.5\phi_1) - \tan^2(45^\circ + 0.5\phi_{m0})}{\tan^2(45^\circ + 0.5\phi_1) + \tan^2(45^\circ + 0.5\phi_{m0})}, \quad (12c)$$

$$\text{对于能量平衡应力_剪胀关系: } R_v = \sin \phi - \sin \phi_{m0} \cos 2\beta, \quad (12d)$$

式中,  $\beta = \omega - \alpha$  表示大主应变增量  $d\varepsilon_1$  与大主应力  $\sigma_1$  之间的夹角;  $\omega$  表示大主应变增量  $d\varepsilon_1$  与竖轴  $Z$  之间的夹角;  $\eta_k = \tan \phi_{m0}$ ;  $\phi_1$  为相态转换角;  $\lambda$  和  $\mu$  是两个材料参数。应当注意的是,除在主应力条件下外,  $\beta$  一般不等于零。

#### 1.5 平均有效应力 $\sigma_m$ 的变化 $d\sigma_m$ 产生的应变增量 $\{d\varepsilon^c\}$

在各向均等和非均等压力作用下均会产生  $\{d\varepsilon^c\}$ 。但在前一种情况下,  $d\sigma_m$  仅产生正应变,而在后一种情况下,除产生正应变外还产生剪应变。由于在这两种情况下  $d\sigma_m$  会产生不同的应变,因此,应分别计算。

##### 1.5.1 各向均等压力作用下 $d\sigma_m$ 产生的应变增量 $\{d\varepsilon^{ic}\}$

在该种条件下,  $\{d\varepsilon^{ic}\} = \{d\varepsilon_x^{ic}, d\varepsilon_z^{ic}, d\varepsilon_{xz}^{ic}\}$  可以通过室内各向均等加卸载排水试验确定。由于在一般情况下,体变  $\varepsilon_v^c$  与  $\lg(\sigma_m/P_a)$  ( $P_a$  为大气压力) 成直线关系,故

$$d\varepsilon_x^{ic} = G_x^c d\alpha_x + G_x^c d\alpha_z, \quad (13a)$$

$$d\varepsilon_z^{ic} = G_z^c d\alpha_x + G_z^c d\alpha_z, \quad (13b)$$

$$d\varepsilon_{xz}^{ic} = 0, \quad (13c)$$

式中

$$G_x^c = G_z^c = 0.434C_{cs}/[4\sigma_m(1+e_0)], \quad (13d)$$

式中,当  $d\sigma_m > 0$  时,  $C_{cs} = C_c$ ; 当  $d\sigma_m < 0$  时,  $C_{cs} = C_s \cdot C_c$ 、 $C_s$  和  $e_0$  分别为压缩指数、回弹指数和起始孔隙比。

##### 1.5.2 非均等压力作用下 $d\sigma_m$ 产生的应变增量 $\{d\varepsilon^{ac}\}$

由于  $\{d\varepsilon^{ac}\} = \{d\varepsilon_x^{ac}, d\varepsilon_z^{ac}, d\varepsilon_{xz}^{ac}\}$  是由各向同性的  $d\sigma_m$  产生的,因此,可以假定大主应变增量  $d\varepsilon^{ac}$  的方向与大主应力  $\sigma_1$  的作用方向相同。利用文献<sup>[9]</sup>及式(12),笔者推出了如下公式<sup>[6]</sup>

$$d\varepsilon_x^{ac} = G_x^{ac} d\alpha_x + G_x^{ac} d\alpha_z, \quad (14a)$$

$$d\varepsilon_z^{ac} = G_z^{ac} d\alpha_x + G_z^{ac} d\alpha_z, \quad (14b)$$

$$d\varepsilon_{xz}^{ac} = R_x^{ac} d\alpha_x + R_x^{ac} d\alpha_z, \quad (14c)$$

式中

$$G_{xz}^{ac} = 0.5 \Theta k_c R_f \sin \phi_{m0} / [\sigma_m (R_f - \sin \phi_{m0})], \quad k_c = 0.434C_c / (1+e_0), \quad (14d)$$

$$R_x^{ac} = G_{xz}^{ac} \sin 2\alpha, \quad G_{z,x}^{ac} = 0.5 G_{xz}^{ac} (R_v \pm \cos 2\alpha), \quad (14e)$$

式中,  $R_f$  为破坏面的半径, 见式(15a),  $\Theta$  是如下定义的参数

$$\Theta = \begin{cases} 1 & (\sigma_m = \sigma_{m(\max)} \text{ 和 } d\sigma_m > 0), \\ 0 & (\sigma_m \neq \sigma_{m(\max)} \text{ 或 } d\sigma_m \leq 0), \end{cases} \quad (14f)$$

式中,  $\sigma_{m(\max)}$  为材料在其加载历史上曾经受到过的最大平均有效应力。式(14f)的应力条件在有效应力空间中构成一个球形曲面, 该面反映了平均有效应力的变化历史对变形的影响, 称之为先期平均有效应力记忆面。

### 1.5.3 $d\sigma_m$ 产生的总应变增量 $\{d\varepsilon^c\}$

从式(14)可以看出, 由于在各向均等压力下  $\sin \phi_{n0} = 0$ ,  $\{d\varepsilon^{ca}\} = 0$ , 因为,  $\{d\varepsilon^{ca}\}$  中并不包括  $\{d\varepsilon^{ic}\}$ 。这样, 在一般应力条件下,  $\{d\varepsilon^c\}$  应是  $\{d\varepsilon^{ic}\}$  与  $\{d\varepsilon^{ca}\}$  之和。

## 1.6 应力比矢量 $\eta_k$ 的数量变化 $d\eta_{ks}$ 产生的应变增量 $\{d\varepsilon^s\}$

### 1.6.1 破坏面 $F_f$

从式(10a)和(10b)可以看出, 不论是否考虑中主应力  $\sigma_2$  的影响, 在  $OXY$  坐标系中, 破坏面的方程均可统一表示为

$$F_f = \sqrt{X^2 + Y^2} - R_f = |\eta_k| - R_f = 0, \quad (15a)$$

式中, 当不考虑  $\sigma_2$  的影响时,  $R_f = \sin \phi$ ; 当考虑  $\sigma_2$  的影响时,  $R_f = \sin \phi_{ps}$ 。

### 1.6.2 先期应力记忆面 $F_m$

该面是一个状态边界面, 它反映了应力比矢量的数量  $|\eta_k|$  变化历史对变形的影响, 其方程可表示为

$$F_m = \sqrt{X^2 + Y^2} - R_m = |\eta_k| - R_m = 0, \quad (15b)$$

式中,  $R_m$  为材料在其加载历史上曾经受到过的最大应力比  $|\eta_k|$ , 称为先期应力比, 它是一个单调增加的内变量且  $R_m \leq R_f$ 。

### 1.6.3 加卸载准则<sup>[10]</sup>

在  $\Delta t$  加载过程中, 加载指数  $L$  定义为

$$L = d\eta_k \cdot n \quad (16a)$$

$$n = n_x i + n_y j = (1 - R/R) P_c + (R/R) \eta_k, \quad (16b)$$

式中, 符号“ $\cdot$ ”表示两个矢量的点积。上式中各物理量的意义见图 2。利用式(16), 加、卸载定义如下

$$L > 0 \quad (\text{加载}), \quad (16c)$$

$$L < 0 \quad (\text{卸载}). \quad (16d)$$

在  $OXY$  坐标系中, 我们将  $L$  改变符号的应力点称为应力反向点。

### 1.6.4 投影中心<sup>[10]</sup>

投影中心是  $OXY$  坐标系中的一个可动点, 其位置用矢量  $P_c$  表示, 它具有以下特性:

① 起始位置在  $OXY$  坐标系的原点;

② 在  $\Delta t$  加载过程中, 如果不出现以下两种情况之一, 则保持在当前位置不动。

情况一: 加载指数  $L$  从正号变为负号;

情况二: 在加载增量作用下, 先期应力记忆面向外膨胀, 即  $R_m$  增加。

如果出现第一种情况, 则  $P_c$  瞬时从当前位置跳跃到应力反向点处; 如果出现第二种情况,

则  $P_c$  瞬时从当前位置移动到  $OXY$  坐标系的原点  $O$  处。投影中心只可能在以下三个地方:

位置一: 如果先期应力记忆面向外膨胀 (即  $R_m$  发生变化), 则投影中心位于  $OXY$  坐标系的原点;

位置二: 如果  $L$  是正号且先期应力记忆面的半径  $R_m$  保持不变, 则投影中心位于前次加载结束时的位置;

位置三: 如果  $L$  是负号, 则投影中心仍位于本次加载开始时的位置。

应当注意的是, 由于计算  $L$  用的是有效应力, 而在不排水条件下有效应力事先是不知道的, 因此, 在  $\Delta t$  加载过程中, 投影中心的确切位置只能在前述三个可能位置的基础上采用试算法确定。

### 1.6.5 主应变增量的方向

设  $\{d\mathcal{E}\} = \{d\mathcal{E}_x^s, d\mathcal{E}_z^s, d\mathcal{V}_{xz}^s\}$ , 大主应变增量  $d\mathcal{E}_1$  与竖轴  $Z$  之间的夹角为  $\omega_s$ , 则相应于  $d\mathcal{E}_1$  作用方向的单位矢量  $n_s$  为

$$n_s = \cos 2\omega_s i + \sin 2\omega_s j \quad (17)$$

根据  $|\eta_s|$  的变化特性, 可以假定  $n_s$  如下<sup>[6]</sup>:

$$\text{如果 } d\phi_{m0} > 0, n_s = r = \cos 2\alpha i + \sin 2\alpha j, \quad (18a)$$

$$\text{如果 } d\phi_{m0} < 0, n_s = -r = -\cos 2\alpha i - \sin 2\alpha j. \quad (18b)$$

比较式(17)和(18)有

$$\cos 2\omega_s = \Omega \cos 2\alpha, \quad \sin 2\omega_s = \Omega_s \sin 2\alpha \quad (19a)$$

式中

$$\Omega = \begin{cases} +1 & (d\phi_{m0} > 0), \\ -1 & (d\phi_{m0} < 0). \end{cases} \quad (19b)$$

### 1.6.6 $\{d\mathcal{E}\}$ 的计算公式

如前所述,  $\{d\mathcal{E}\}$  是由  $d\eta_s$  产生的, 而  $|d\eta_s| = |\cos \phi_{m0} d\phi_{m0}|$  (见式(5b)), 故可设

$$d\mathcal{E}_q = |d\eta_s| / G_s = |\cos \phi_{m0} d\phi_{m0}| / G_s = \Omega \cos \phi_{m0} d\phi_{m0} / G_s, \quad (20)$$

式中,  $G_s$  为应力比矢量  $\eta_s$  数量变化时对应的剪切模量。利用式(12)、(19)和(20), 有

$$d\mathcal{E}_x^s = G_x^s R_0^s (R_x^s d\alpha_x + R_z^s d\alpha_z + R_{xz}^s d\tau_{xz}), \quad (21a)$$

$$d\mathcal{E}_z^s = G_z^s R_0^s (R_x^s d\alpha_x + R_z^s d\alpha_z + R_{xz}^s d\tau_{xz}), \quad (21b)$$

$$d\mathcal{V}_{xz}^s = G_{xz}^s R_0^s (R_x^s d\alpha_x + R_z^s d\alpha_z + R_{xz}^s d\tau_{xz}), \quad (21c)$$

式中

$$R_0^s = (2 \tan \phi_{m0} J_1)^{-1}, \quad R_x^s = 2 - J_3 \alpha_z, \quad R_z^s = 2 - J_3 \alpha_x, \quad R_{xz}^s = 2J_3 \tau_{xz}, \quad (21d)$$

$$J_1 = \alpha_x + \alpha_z, \quad J_2 = \alpha_x \alpha_z - \tau_{xz}^2, \quad J_3 = J / J_2, \quad (21e)$$

$$G_{z,x}^s = 0.5 \Omega \cos \phi_{m0} (R_v \pm \Omega \cos 2\alpha) / G_s, \quad G_{xz}^s = \cos \phi_{m0} \sin 2\alpha / G_s. \quad (21f)$$

剪切模量  $G_s$  可按下述方法确定:

如图 2 示, 设  $t$  时刻的应力状态位于  $B$  点,  $\Delta t$  加载过程中的投影中心位于  $A$  点, 先期应力记忆面的半径为  $R_m$ 。  $\overrightarrow{AB}$  与先期应力记忆面交于  $C$  点。利用边界面亚塑性理论<sup>[10]</sup>,  $G_s$  可用如下公式计算

$$G_s = G_0 \left[ 1 - \frac{R_m}{R_f} \left( \frac{R}{R} \right)^m \right]^2. \quad (21g)$$

$$m = 2R_m / R, \quad G_0 = G_0 / \sigma_m. \quad (21h)$$

$$G_0 = k p_a (\sigma_m / P_a)^n \quad (21i)$$

式中,  $|\eta| = |\overrightarrow{OB}|$ ,  $R = |\overrightarrow{AB}|$ ,  $R = |\overrightarrow{AC}|$ ,  $G_0$ 和  $G_0$  分别为起始归一化剪切模量和起始剪切模量,  $k$  和  $n$  为土性参数,  $R_f$  为破坏面的半径. 但应注意:

若不考虑  $\sigma_2$  的影响, 则

$$R_f = \sin \phi, \sigma_m = (\sigma_x + \sigma_z) / 2 = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2 \quad (21j)$$

若考虑  $\sigma_2$  的影响, 则

$$R_f = \sin \phi_{ps}, \sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (21k)$$

式中,  $\sigma_2 = \sigma_y$  由式(9) 确定.

### 1.7 应力比矢量 $\eta_k$ 的方向变化 $d\eta_{kr}$ 变化的应变增量 $\{d\mathcal{E}\}$

#### 1.7.1 主应变增量的方向

设  $\{d\mathcal{E}\} = \{d\mathcal{E}_x, d\mathcal{E}_y, d\mathcal{E}_{xz}\}$ , 大主应变增量  $d\mathcal{E}_1$  与竖轴  $Z$  之间的夹角为  $\omega$ , 则相应于  $d\mathcal{E}_1$  作用方向的单位矢量  $n_r$  为

$$n_r = \cos 2\omega i + \sin 2\omega j \quad (22a)$$

基于对许多试验资料的分析整理, 笔者发现,  $n_r$  可用如下简单方法确定

如图 3• 设  $t$  和  $t + \Delta t$  时刻的应力状态分别位于  $A$  和  $B$  点,  $\overrightarrow{AC}$  ( $\overrightarrow{AC} = d\eta_{kr}$ ,  $\overrightarrow{AB} = d\eta_k$ ) 与破坏面  $F_f$  交于  $D$  点. 连接  $O$  和  $D$ , 则  $\overrightarrow{OD}$  的方向就是  $n_r$  的方向. 从该图不难看出

$$\sin 2\omega = (\sin \phi_{m0} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \sqrt{R_f^2 - \sin^2 \phi_{m0}}) / R_f \quad (22b)$$

$$\cos 2\omega = (\sin \phi_{m0} \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sqrt{R_f^2 - \sin^2 \phi_{m0}}) / R_f \quad (22c)$$

$$\tan 2\beta = \sqrt{(R_f / |\eta_k|)^2 - 1} = \sqrt{(R_f / \sin \phi_{m0})^2 - 1} \quad (22d)$$

式中,  $\beta = \omega - \alpha$  为  $d\mathcal{E}_1$  与  $\sigma_1$  之间的夹角. 显然, 在一般情况下, 因  $R_f \neq |\eta_k|$ , 故  $\beta \neq 0$ . 即  $d\mathcal{E}_1$  和  $\sigma_1$  的方向不会相同. 显然,  $\beta$  反映了主应力与主应变增量方向之间的非共轴性.

#### 1.7.2 $\{d\mathcal{E}\}$ 的计算公式

从式(5c)可知,  $d\eta_{kr}$  在  $X$  和  $Y$  轴上的投影分量分别为  $(-2\sin \phi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha)$  和  $(2\sin \phi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha)$ . 由于  $X$  轴和  $Y$  轴分别与  $(d\mathcal{E}_x - d\mathcal{E}_y)$  和  $d\mathcal{E}_{xz}$  相对应, 因此, 可以首先假定

$$d\mathcal{E}_{xz} = 2\sin \phi_{m0} \cos 2\alpha d\alpha / G_r \quad (23a)$$

$$d\mathcal{E}_x - d\mathcal{E}_y = -2\sin \phi_{m0} \sin 2\alpha d\alpha / G_r \quad (23b)$$

式中,  $G_r$  为主应力轴旋转时的剪切模量, 它具有以下特性: ① 无量纲; ② 当应力状态趋于破坏面(即  $\sin \phi_{m0} / R_f \rightarrow 1$ ,  $d\mathcal{E}_{xz} \rightarrow \infty$ ) 时, 应当有  $G_r \rightarrow 0$ . 因此,  $G_r$  可取为

$$G_r = G_0 (1 - \sin \phi_{m0} / R_f) \quad (24a)$$

式中,  $G_0$  为起始归一化剪切模量, 见式(21h).

另一方面, 我们可以严格证明<sup>[6, 9]</sup>, 式(23) 中的  $2\alpha$  应换为  $2\alpha - (90^\circ - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) - 90^\circ = 2\omega - 90^\circ$ , 并修改为

$$d\mathcal{E}_{xz} = 2\sin \phi_{m0} \sin 2\omega d\alpha / G_r \quad (24b)$$

$$d\mathcal{E}_x - d\mathcal{E}_y = 2\sin \phi_{m0} \cos 2\omega d\alpha / G_r \quad (24c)$$

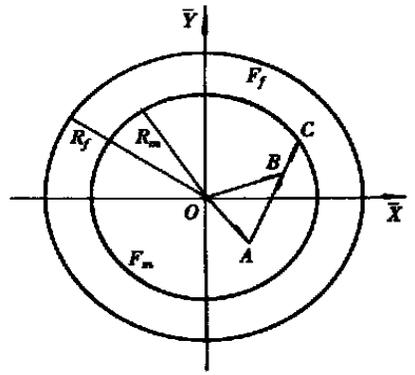


图 2  $G_s$  的确定方法

结合式(12)和(24),有

$$d\xi = G_r R'_0 (R'_x d\alpha_x + R'_z d\alpha_z + R'_{xz} d\tau_{xz}), \quad (25a)$$

$$d\xi = G'_z R'_0 (R'_x d\alpha_x + R'_z d\alpha_z + R'_{xz} d\tau_{xz}), \quad (25b)$$

$$d\gamma_{xz} = G'_{xz} R'_0 (R'_x d\alpha_x + R'_z d\alpha_z + R'_{xz} d\tau_{xz}), \quad (25c)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R'_0 &= [(\alpha_z - \alpha_x)^2 + 4\tau_{xz}^2]^{-1/2}, R'_{x,z} = \pm \tau_{xz}, \\ R'_{xz} &= \alpha_z - \alpha_x, G'_{xz} = 2G_0 \sin 2\omega, \end{aligned} \right\} \quad (25d)$$

$$\left. \begin{aligned} G'_0 &= R_f \sin \phi_{m0} / [G_0 (R_f - \sin \phi_{m0})], \\ G'_{z,x} &= G'_0 (R_v \pm \cos 2\omega), \end{aligned} \right\} \quad (25e)$$

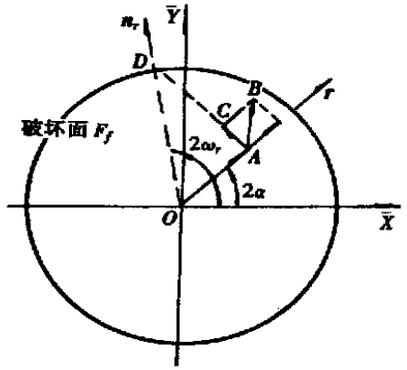


图 3  $n_r$  的确定方法

### 1.8 平面应变条件下的本构模型

将式(13)、(14)、(21)和(25)代入(8),则可得到以下

增量形式的本构模型

$$\{d\varepsilon\} = \{D\} \{d\sigma\}, \quad (26)$$

式中,  $\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_z, d\gamma_{xz}\}^T, \{d\sigma\} = \{d\alpha_x, d\alpha_z, d\tau_{xz}\}^T$ .  $[D]$  是应力-应变矩阵,其元素为

$$D_{11} = G_x^c + G_x^{ac} + G_x^s R_0^s R_x^s + G_x^r R_0^r R_x^r, \quad D_{12} = G_x^c + G_x^{ac} + G_x^s R_0^s R_0^s R_z^s + G_x^r R_0^r R_z^r,$$

$$D_{13} = G_x^s R_0^s R_{xz}^s + G_x^r R_0^r R_{xz}^r, \quad D_{21} = G_z^c + G_z^{ac} + G_z^s R_0^s R_x^s + G_z^r R_0^r R_x^r,$$

$$D_{22} = G_z^c + G_z^{ac} + G_z^s R_0^s R_z^s + G_z^r R_0^r R_z^r, \quad D_{23} = G_z^s R_0^s R_{xz}^s + G_z^r R_0^r R_{xz}^r,$$

$$D_{31} = R_x^{ac} + G_{xz}^s R_0^s R_x^s + G_{xz}^r R_0^r R_x^r, \quad D_{32} = R_x^{ac} + G_{xz}^s R_0^s R_z^s + G_{xz}^r R_0^r R_z^r,$$

$$D_{33} = G_{xz}^s R_0^s R_{xz}^s + G_{xz}^r R_0^r R_{xz}^r.$$

## 2 三维应力条件下的应力矢量本构模型

为了利用前述简单应力条件下的本构关系建立三维条件下的本构关系,首先将一般应力张量

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

分解为三个部分张量(机构)  $[\sigma]_i (i = 1, 2, 3)$ <sup>[5]</sup>

$$[\sigma]_1 = \begin{bmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}, [\sigma]_2 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix}, [\sigma]_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}. \quad (27)$$

此外,设应力张量  $[\sigma]$  的增量为  $[d\sigma]$ , 第  $i$  个机构  $[\sigma]_i$  的增量为  $[d\sigma]_i$ , 并且  $[d\sigma]_i$  产生的应变增量为  $\{d\varepsilon\}_i$ , 则根据多机构模型<sup>[3,4,5]</sup> 和 Koit 定理<sup>[11]</sup>,  $[d\sigma]$  作用下产生的总应变增量  $\{d\varepsilon\}$  为

$$\{d\varepsilon\} = \sum_{i=1}^3 \{d\varepsilon\}_i. \quad (28)$$

式中,  $\{d\varepsilon\}_i$  由式(26)计算. 具体讲来,只要将式(26)中的  $(\alpha_x, \alpha_z, \alpha_{xz})$  (即  $[\sigma]_2$ ) 分别替换为  $(\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz})$  (即  $[\sigma]_1$ ) 和  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  (即  $[\sigma]_3$ ), 则  $\{d\varepsilon\}_i$  分别就是  $\{d\varepsilon\}_1$  和  $\{d\varepsilon\}_3$ . 而  $\{d\varepsilon\}_2$  由  $(\alpha_x, \alpha_z, \tau_{xz})$  (即  $[\sigma]_2$ ) 组成的机构产生. 但应注意,式(28)中的  $\sigma_m$  和  $\{d\varepsilon\}_i$  应分别根据式(21k)和(29)确定.

$$d\xi^c = d\varepsilon^c = 0.434C_{cs}d\sigma_m/[6(1+e_0)\sigma_m], \quad d\gamma_{xz}^{ic} = 0 \quad (29)$$

顺便指出,对不排水条件下的孔隙水压力,只要利用前述本构模型中  $d\varepsilon_v = 0$  的条件就可以反算出来。显然,式(28)表示的本构关系同样可以考虑主应力轴的旋转。

### 3 模型参数的确定

在本文所提出的应力矢量本构模型中,所有模型参数均可通过简单的均压加、卸载排水试验和三轴排水等  $\sigma_m$  试验确定<sup>[6]</sup>。前者用于确定  $C_c$  和  $C_s$ , 后者用于确定其它参数。但应注意的是,如果选择松岗元应力\_剪胀关系,则共有七个模型( $C_c$ 、 $C_s$ 、 $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\phi$ 、 $k$  和  $n$ ); 如果选择 Rowe 的应力\_剪胀关系或能量平衡应力\_剪胀关系,则共有六个模型参数( $C_c$ 、 $C_s$ 、 $\phi$ 、 $k$  和  $n$ )。此外,通常可取  $n \approx 0.5$ 。

### 4 结 论

在充分考虑应力的矢量特征基础上,通过将应力矢量的作用效应分解为球应力作用效应和应力比矢量作用效应的叠加,本文建立了一个适用于无粘性土在平面应变和二维条件下的非线性本构模型。该模型不仅能够考虑无粘性土的应力应变非线性、硬化性、剪缩剪胀性、与应力路径的相关性,主应力与主应变增量方向之间的非共轴性以及球偏应力与变形的耦合性等多种主要变形特性,而且也能够自然、合理地考虑主应力轴的旋转和中主应力对土的变形及强度的影响。该本构模型仅有 6~7 个参数,均可通过简单的常规试验确定。限于篇幅,有关本文所提模型的应用情况将另文介绍。

#### [参 考 文 献]

- [1] Arthur J R F. Principal stress rotation: a missing parameter[J]. Journal of Geotechnics, Div ASCE, 1980, **106**(4): 419—433.
- [2] Marte Gutierrez, Kenji Ishihara, Ikuo Towhata. Flow theory for sand under rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 121—132.
- [3] Aubry D. A double memory model with multiple mechanisms for cyclic soil behavior[A]. In: Proc Int Symp Num Methods Geomech, 1982, 3—13.
- [4] Kabilamany K, Ishihara K. Stress dilatancy and hardening laws for rigid granular model of sand[J]. Soils Dynamics and Earthquake Engineering, 1990, **19**(2): 66—77.
- [5] Prevost J H, Keane C M. Multimechanism elastoplastic model for soils[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1990, **116**(9): 1924—1944.
- [6] 史宏彦. 无粘性土的应力矢量本构模型[D]. 博士学位论文. 西安: 西安理工大学, 2000.
- [7] Mtsuoka H. On the significance of the "Spatial Mobilized Plane" [J]. Soils and Foundations, 1976, **16**(1): 91—100.
- [8] Rowe P W. The stress\_dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact [J]. Proc Roy Soc A, 1962, **269**: 500—527.
- [9] Matsuoka H, Sakakibara K. A constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1987, **27**(4): 73—89.
- [10] Li X S. Reduced\_order sand model for ground response analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, **122**(9): 872—881.
- [11] Koiter W T. Stress\_strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic\_plastic materials

with a singular yield surface[J]. Quart Appl Math, 1953, 11(3): 350.

## A Stress Vector Based Constitutive Model for Cohesionless Soil( I )—Theory

SHI Hong\_yan<sup>1</sup>, XIE Ding\_yi<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Shantou University,

Shantou, Guangdong 515063, P R China;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology,

Xi'an 710048, P R China)

**Abstract:** On the basis of the sufficient consideration of vectorial characteristics of stress, a new nonlinear constitutive model for cohesionless soil under plane strain and 3\_D conditions was presented in a way that the action effects of stress vector are decomposed into the action effect of mean effective stress and that of the stress ratio vector (ratio of deviatoric stress vector to mean effective stress). The constitutive model can take account of the influence of both numerical and directional changes of stress vector on deformation of soil simultaneously, and is applicable of both static and dynamic loading.

**Key words:** cohesionless soil; rotation of principal stress axes; intermediate principal stress; stress vector; constitutive model; theory