应用数学和力学, 第 23 卷 第 2 期(2002 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2002) 02_0135_04

薄壁压力管道的突然破裂*

魏德敏[1], 杨桂通[2]

(1. 华南理工大学 土木系, 广州 510640; 2 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(我刊编委杨桂通来稿)

摘要: 用数学的突变理论研究薄壁圆形管道在内部爆炸力作用下的脆性破裂问题• 在弹性能量准则基础上, 建立了管道壳体破裂的尖点突变模型, 给出了相应的破裂临界条件•

关 键 词: 压力管道; 脆性断裂; 尖点突变; 分叉点集
中图分类号: O343; O346.1 文献标识码: A

引 言

薄壁管道在内部爆炸荷载作用下发生膨胀, 大变形直至破裂, 实质上是高压气体与固体碰撞引起的物理现象• 在实际工程和生活中, 人们经常遇到譬如煤气管道的破裂, 锅炉和压力容器的爆炸等事故就属于这一类问题• 这些问题的研究有极为重要的理论意义和实用价值, 在军事上也有特殊的应用背景• 因此, 多年来许多专家学者对此保持着极大的兴趣, 并取得了相当多的重要成果[1, 2]•

Guney 推导出的估算破碎片初始速度的经验公式和 Mott 给出的计算碎片几何尺寸的方法至今仍然被采用• Taylor 通过高速摄影机观察到的实验现象, 假定径向裂纹在壳壁的拉押应力区域内产生并向其内表面扩展, 建立了一个描述壳体应力状态和壳壁运动的简单数学模型, 得到了与实验结果吻合较好的破裂半径• Hoggatt 等根据对回收碎片的分析, 在壳体是沿着最大剪应力平面破裂的, 且破裂由外向内发展, 直至其内表面的压力等于切向拉应力时壳体完全破裂的假设基础上提出了新的数学模型, 也得到了与其实验结果相吻合的壳体破裂半径• 伊万诺夫从能量平衡的角度导出了一个破裂准则, 计算出壳体破裂的极限外半径和极限内半径, 较合理地解释了实验中出现的一些现象•

本文采用能量理论和数学的突变理论, 研究了受内部爆炸荷载作用薄壁圆管的变形过程, 建立了其能量平衡状态所满足的尖点突变模型, 从而得到了圆管发生突然破裂的临界条件•

1 基 本 公 式

基于能量理论的断裂准则认为: 裂纹产生和扩展时会释放一定的弹性应变能, 只有管壁内

* 收稿日期: 2001_01_03; 修订日期: 2001_09_11
作者简介: 魏德敏(1955—) , 女, 四川资中人, 教授, 博士, 博士生导师; 主要研究方向为工程结构的动力响应和动力稳定性;
杨桂通(1931—) , 男, 河北新河人, 教授, 博士, 博士生导师; 主要研究方向为弹塑性动力学和生物力学.

的应变与应变率之间的关系满足某一特定的条件时, 管道才会发生破裂或破坏•

考虑管道壳体中一单位长度的圆环• 假定圆环的膨胀系数是一个常数, 壳的厚度与内半径之比不大于 0.12, 管壁的切向应力沿厚度方向均匀分布• 壳体的弹性应变能可以用切向应力与半径的关系式来表示• 用拉伸弹性应变能来描述圆环上裂纹的扩展时, 如果变形达到某一临界值, 裂纹开始产生• 一旦裂纹产生, 在垂直于裂纹方向的两边会出现卸载, 释放一定的弹性应变能•

卸载波的传播速度为弹性波波速 C_0, 在 Δt 时间内卸载波传播的距离为

$$\mathrm{d}L = C_0 \cdot \Delta t, \tag{1}$$

而圆环半径向外膨胀的值是

$$\mathrm{d}R = V \cdot \Delta t, \tag{2}$$

其中, V 是圆环的径向膨胀速度•

裂纹产生时壳体单位体积内的弹性应变能为

$$Q = \frac{\sigma^2(1-\nu^2)}{2E}, \tag{3}$$

式中, σ 表示切向应力, ν 为泊松比, E 是弹性模量• 根据能量平衡, 得到

$$\int_v Q\,\mathrm{d}v = \lambda s, \tag{4}$$

这里, λ 为单位面积圆环所释放的能量•

若应变率是比较大的, $\dot{\varepsilon} = 10^2 \sim 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$, 需要考虑粘性效应, 则应力和应变率的关系为

$$\sigma = \sigma_0 + \dot{\varepsilon}\eta, \tag{5}$$

其中, σ_0 为静力屈服极限, η 是动粘性系数•

将有关的关系式代入方程(4), 积分后可以得到

$$\mu^2\dot{\varepsilon}^2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) + 2\dot{\varepsilon}(2\varepsilon\mu - \alpha) + 2\ln(\varepsilon + 1) = 0, \tag{6}$$

式中, $\mu = \eta/\sigma_0$ 和 $\alpha = 4E\lambda/3C_0\sigma_0^2$ 均为材料常数, $\varepsilon = (R - R_0)/R$ 是径向应变•

2　突 变 断 裂

由于径向应变 ε 的数值是远小于 1 的, 则(6) 式可以近似地表示为:

$$\mu^2\dot{\varepsilon}^2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon) + 2\dot{\varepsilon}(2\varepsilon\mu - \alpha) + 2\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3\right) = 0 \cdot \tag{7}$$

如果我们忽略三阶和三阶以上的高阶小量, 并引入下列变量:

$$Z = \varepsilon + \frac{1}{2}(\mu^2\dot{\varepsilon}^2 - 1),$$

$$a = \frac{3}{4}(\mu^2\dot{\varepsilon}^2 - 1)^2 + 3(\mu\dot{\varepsilon} + 1)^2,$$

$$b = \frac{1}{4}(\mu^2\dot{\varepsilon}^2 - 1)^3 - \frac{3}{2}(\mu\dot{\varepsilon} + 1)^2(\mu^2\dot{\varepsilon}^2 - 1) - 3\alpha\dot{\varepsilon}$$

方程(7) 能够表示成以下形式

$$Z^3 + aZ + b = 0, \tag{8}$$

而方程(8) 恰好是一个以 Z 为状态变量, 以 a 和 b 为控制变量的尖点突变流形, 如图 1 所示•

图 1 中阴影区域所在平面为突变流形的控制平面• 当控制参数 a 和 b 处于阴影区域之外任意一点时, Z 对应于突变流形上的一点, 即结构的能量平衡状态是唯一的, 且为稳定平衡状态• 当控制变量处于阴影区内部的任意一点时, 则 Z 对应于突变流形上的三点, 但实际上结

构只能处在一种稳定平衡状态, 即 Z 只能位于突变流形的上叶或者下叶• 而当控制变量处于阴影区域的边界上, 也就是说满足尖点突变的分叉点集方程:

$$4a^3 + 27b^2 = 0 \tag{9}$$

时, 控制变量的微小扰动会引起状态变量 Z, 即径向应变分量 ε 的突然变化, 从而导致壳体发生突然的破裂• 因此, 方程(9) 也被称为壳体发生破裂的临界条件•

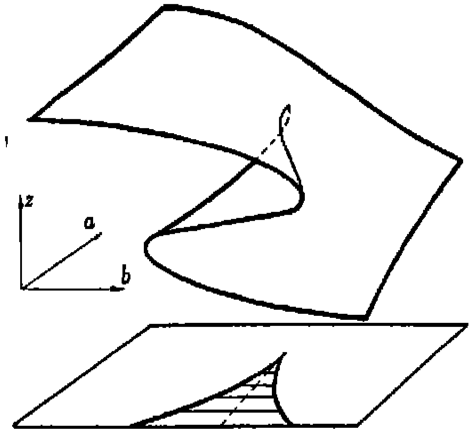

图 1 壳体破裂的突变模型及其分叉点集

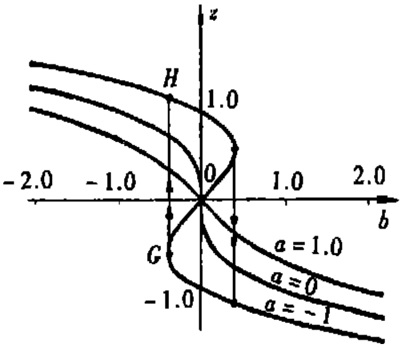

图 2 突变流形剖面图

图 2 分别给出 $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ 时的突变流形剖面图• 由图可以看出, 当 $a > 0$ 时, 状态变量随控制变量 b 的变化较为平缓• 而 $a = 0$ 时, 控制变量的变化率在 $b = 0$ 附近急剧增大• 这两种情况下, 应变始终是连续变化的, 管道不会发生突然的破裂• 只有当 $a < 0$, 即 $\mu_e >> 3$ 时, 控制变量 b 的连续变化才会引起状态变量 Z 的突跳• 譬如控制变量处于突变流形下叶的 G 点时, 状态变量 Z 将会突然跳到位于突变流形上叶的 H 点, 从而导致应变分量的突然增加, 管壳就会发生突然破裂, 而后破裂急剧发展, 结构很快达到完全破坏•

3 结 语

突变理论是近年来发展起来的颇有影响的数学理论, 在非线性力学方面解决了一些问题[3,4]• 本文将其用于压力管道的突然破裂行为分析, 为结构断裂破坏这一复杂问题的研究提供了一种新的思路• 从某种意义上讲, 压力管道的脆性破裂比其它形式的断裂要危险得多, 因此应当予以高度的重视和更加深层次的研究• 应当看到, 本文给出的破裂突变模型是在弹性能量准则基础上提出的, 并没有考虑结构塑性变形的发展过程• 如何将现有的研究成果推广到壳体结构的非弹性破裂动态过程的描述, 将是具有重要理论意义和广阔应用前景的研究课题•

[参 考 文 献]

[1] 马晓青. 冲击动力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1992, 284—293.

[2] Hoggatt C R, Recht R F. Fracture behavior of tubular bombs[J]. J Appl Phys, 1968, **39**(4): 1856—1862.

[3] WEI De_min, FAN Xue_jun. A catastrophe analysis on the stability of the crack growth in three_point bending specimens[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1996, **9**(2): 179—183.

[4] WEI De_min, ZHANG Shan_yuan, YANG Gui_tong. Resonance buckling of elastic circular plates[A].

In: Proc 3rd Inter Conf Nonlinear Mechanics[C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 387—390.

Carastrophe Fracture of Thin_Wall Pressure Tubes

WEI De_min[1], YANG Gui_tong[2]

(1. Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P R China;

2. Applied Mechanical Institute, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P R China)

Abstract: Catastrophe theory was used to investigate the fracture behavior of thin_wall cylindrical tubes subjected to internal explosive pressure. Based on the energy theory and catastrophe theory, a cusp catastrophe model for the fracture was established, and a critical condition associated with the model is given.

Key words: pressure tube; brittle fracture; cusp catastrophe; bifurcation set