

文章编号: 1000-0887(2002) 01-0031-16

含液体非弹性多孔介质中波传播过程的失稳与逸散性*

李锡夔, 张俊波, 张洪武

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(唐立民推荐)

摘要: 在基于 Biot 理论的饱和_非饱和多孔介质的动力_渗流模型中计及流固惯性耦合效应, 对单轴应变的一维情况讨论了饱和和非饱和多孔介质中波传播过程的驻值失稳和逸散性, 分析了流固粘性耦合, 流固惯性耦合, 流固混合体的压缩性, 孔隙水饱和度, 及固体骨架在高应变速率下材料粘弹塑性本构行为等因素的影响. 该工作将对克服饱和与非饱和多孔介质在强动荷载下波传播过程的数值求解困难提供理论上的依据和启示.

关键词: 多孔介质; 波传播; 粘弹塑性; 材料稳定; 逸散性; 动力渗流耦合

中图分类号: O347. 4; O347. 7; O344. 7; TU43 **文献标识码:** A

引言

动力问题的瞬态现象和处理方式与荷载激励的谱特征紧密相关. 在分析受相对较低频率控制的地震响应和机械振动响应等动力问题时, 人们可以忽略结构中的波传播过程; 但当物体受到如冲击和爆炸等一类高频模态占主导地位的脉动荷载作用时, 波在物体中的传播过程则是必须要研究的. 工程中很大一类材料属于应变软化材料. 鉴于冲击和爆炸等荷载的强动性质, 在应力波传播过程中, 物体某处的受力状态将首先达到材料极限承载能力, 并伴随由应变软化引起的以在局部狭窄区域急剧发生非弹性应变为特征的应变局部化现象和承载能力的急剧下降.

如果简单地应用经典(局部)连续体率无关应变软化模型模拟应变局部化现象, 控制物体运动的动力问题的场方程在应变软化域将丧失其双曲型而呈椭圆型, 其初值问题成为不适应. Hill^[1]的研究表明, 经典的率无关连续体的应变软化将导致加速度波动力分析中的驻间断面, 在局部化区波将成为驻波而不再能传播, 呈驻波失稳. 在椭圆型域的波的相速与群速均为虚数, 当行波从仍保持控制方程双曲型的介质其余部分进行到与椭圆型域的界面时将不能继续传播. 另一方面, 率无关经典连续固体中波的相速度与波数无关而为非逸散, 连续体丧失了把任意荷载下波的形状转变为表征局部化区域的定常波的能力. 应变局部化区与周围区域

* 收稿日期: 2000_07_27; 修订日期: 2001_10_09

基金项目: 国家自然科学基金项目(19832010)资助

作者简介: 李锡夔(1940—), 男, 上海市人, 博士, 教授, 博导, 中国力学学会理事, 中国力学学会固体力学专业委员会副主任, “Int J Numerical Method Eng”编委.

之间的波传播条件不复存在,两个域之间的相互作用不再可能。当应变软化本构行为引入到经典弹塑性连续体的有限元数值分析中时,初值边值问题的不稳定性将导致数值分析结果病态地依赖于有限元网格的划分和密度,并且当有限元网格加密时,应变软化部位的能量逸散将被错误地估计为零^[2];当局部化区之外的波传播到间断线或间断面时,在计算中将发生虚假的波反射。其结果将收敛到不正确的没有物理意义的有限元解^[3,4]。显然,无论在理论上还是在数值上,驻波失稳和逸散性的研究对非弹性介质中波传播过程是十分重要的。

应该指出,由于含液体多孔介质中孔隙流体相对固体骨架流动时的粘性耦合,多孔介质对于脉动荷载的响应将具逸散性。Rudniki 和 Rice^[5], Rice^[6], Loret 和 Prevost^[7], Pietruszczak^[8] 等对于典型的饱和多孔介质中波传播过程的驻波失稳条件进行了研究,但未涉及由于介质中固体骨架和孔隙流体的相互作用对波传播过程的逸散性的影响,也没有考虑多孔介质中含液体的非饱和性影响。Sluys 等^[3,4]对固体中波传播的驻波失稳和逸散性进行了研究。他们都未考虑介质中流固两相的惯性耦合因素对波传播过程的影响。Gajo^[9]从实验研究角度概括了固体骨架和孔隙流体的动力相互耦合作用的三个方面:惯性、粘性和力学的耦合。Runesson^[10]讨论了不排水条件下孔隙流体压缩性对弹塑性饱和多孔介质中应变局部化的影响。但无论从理论还是数值方面,对含液体多孔介质在强动荷载作用下的应变局部化行为和波传播过程的研究还十分不够。

工程问题中的饱和或非饱和土壤材料是典型的含液体多孔介质,它可归属于压力相关应变软化非线性材料。介质的力学行为由固体骨架和孔隙流体的相互作用控制。基于 Terzaghi 的有效应力概念和 Biot^[11~13]的弹性多孔介质的动力固结理论, Biot 首先详细地讨论了介质中的应力波传播。Zienkiewicz 和 Shiomi^[14], 李锡夔和 Zienkiewicz^[15~16], Lewis, Schrefler 等^[17~19]已分别建立了饱和或非饱和含液体多孔介质的非线性水力力学动力耦合分析的广义 Biot 模型及相应的数值方法。本文的工作基于上述模型,并进一步包含了介质中流固相的惯性耦合,以考虑对强动荷载的响应。具体考虑了模拟介质压力相关弹塑性本构行为的非关联 Drucker-Prager 准则,对单轴应变一维情况讨论了介质中波传播过程的驻波失稳和逸散性,分析了流固粘性耦合,流固惯性耦合,流固混合体的压缩性,孔隙饱和度,及固体骨架在高应变速率下材料粘弹塑性本构行为等因素的影响。本文的工作将对克服介质在强动荷载下波传播过程的数值求解困难提供理论上的依据和启示。

1 含液体多孔介质的数学模型与控制方程

考虑含孔隙水的饱和多孔介质和含孔隙水和孔隙气的非饱和多孔介质。为简化问题的讨论,采用被动空气近似假定,即孔隙气压恒为常数。应该指出,在强动荷载作用下这个假定对于定理估价饱和度对波传播过程的影响会引入一定程度的误差。在以后利用数值方法的波传播分析中,如我们在利用有限元方法的非饱和多孔介质动力分析中已做的^[15,16,20],将摒弃此假定。考虑固体骨架和孔隙流体之间的惯性耦合,固体骨架和孔隙流体的率型运动平衡方程中写为

$$\sigma_{ij,j} - (\alpha - n) S_w p_{,i} + n^2 S_w^2 k_{wj}^{-1} (\dot{U}_j - \dot{u}_j) - (\rho^s + \rho_a) \ddot{u}_i + \rho_a \ddot{U}_i = 0, \quad (1)$$

$$- n S_w p_{,i} - n^2 S_w^2 k_{wj}^{-1} (\dot{U}_j - \dot{u}_j) - (\rho^w + \rho_a) \ddot{U}_i + \rho_a \ddot{u}_i = 0, \quad (2)$$

式中 $\rho^s = (1 - n)\rho_s$, $\rho^w = n S_w \rho_w$, n 是孔隙度, ρ_s 和 ρ_w 分别是多孔介质固相和孔隙水的密度, S_w 是孔隙水饱和度, k_{wj} 是孔隙水渗透系数并可一般地表示为

$$(k_w)_{ij} = (k_a)_{ij} \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w(T, p_w)}, \quad (3)$$

$(k_a)_{ij}$ 是介质固有渗透系数, k_{rw} 是依赖于 S_w 的相对渗透系数, μ_w 是孔隙水粘性系数, 它是温度和孔隙水压力 p_w 的函数. σ'_{ij} 是广义有效应力, U_i, u_i 分别是孔隙水和固体骨架的绝对位移, α 是 Biot 参数, 对于各向同性弹性介质退化为 Biot 弹性常数

$$\alpha = 1 - \frac{K_t}{K_s}, \quad (4)$$

K_s 和 K_t 分别是固相颗粒和固体骨架的体积模量. ρ_a 表示引入惯性耦合的附加质量, 它通常可表为

$$\rho_a = (\tau - \alpha) n S_w \rho_w, \quad (5)$$

式中迂曲度 τ 是依赖于孔隙度的描写孔隙空间几何的参数. 当固相和液相存在相对加速度时, $\rho_a(\ddot{u}_i - \ddot{U}_i)$ 表示两相之间的耦合惯性力. 利用被动空气假定($p_a \equiv 0$), 孔隙水质量守恒方程可表示为

$$p_w = -Q[\alpha S_w \ddot{u}_{k,k} + n S_w (\ddot{U}_k - \ddot{u}_{k,k})], \quad (6)$$

式中

$$\frac{1}{Q} = C_s + \frac{n S_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n) S_w}{K_s} \left[S_w + \frac{C_g \rho_w}{n} \right], \quad (7)$$

$$C_s = n \frac{\partial S_w}{\partial p_w} = -n \frac{\partial S_w}{\partial p_c}. \quad (8)$$

p_c 是依赖于饱和度的吸力. 把式(6)代入式(1)和式(2)可得到以 U_i, u_i 作为基本未知量的率型含液体多孔介质数学模型的控制方程

$$\sigma'_{ij} + (\alpha - n) S_w Q [\alpha S_w \ddot{u}_{k,k} + n S_w (\ddot{U}_k - \ddot{u}_{k,k})]_{,i} + n^2 S_w^2 k_{wij}^{-1} (\dot{U}_j - \dot{u}_j) - (\rho^v + \rho_a) \ddot{u}_i + \rho_a \ddot{U}_i = 0, \quad (9)$$

$$n S_w Q [\alpha S_w \ddot{u}_{k,k} + n S_w (\ddot{U}_k - \ddot{u}_{k,k})]_{,i} - n^2 S_w^2 k_{wij}^{-1} (\dot{U}_j - \dot{u}_j) - (\rho^v + \rho_a) \ddot{U}_i + \rho_a \ddot{u}_i = 0. \quad (10)$$

2 固体骨架的非线性本构方程

在本工作中考虑固体骨架的材料非线性为率相关和率无关两类. 为了描述土壤一类多孔介质材料的弹塑性行为, 具体采用 Drucker-Prager 屈服准则. 它也是构成饱和土的剑桥模型和非饱和土的 Alonso-Gens 模型^[21] 等较复杂且应用广泛的多重屈服面模型的基本组成部分.

Drucker-Prager 准则可表示为在球量 σ_m 偏量 q 平面中的直线^[20]:

$$F = q + A \phi \sigma_m + B = 0, \quad (11)$$

式中

$$q = \left[\frac{1}{2} \sigma''^T \mathbf{P} \sigma'' \right]^{1/2}; \quad \sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma''_x + \sigma''_y + \sigma''_z). \quad (12)$$

它可看作为忽略了第三应力不变量影响的 Mohr-Coulomb 屈服准则的近似, 如考虑在 Π 平面上 Drucker-Prager 屈服面作为外圆与描写 Mohr-Coulomb 准则的六边形相接, 则式(11)中材料参数可表示为

$$A \phi = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin)}; \quad B = \frac{-6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin)}, \quad (13)$$

式中 c, ϕ 分别是粘性系数和内摩擦角, 假定分段线性应变硬(软)化

$$c = c(\mathcal{E}^p) = c_0 + h_p^c \mathcal{E}^p, \quad (14)$$

式中 h_p^c 是粘性硬化-软化参数, 应力应变一致性本构速率方程可一般地写为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep} \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{R} - \frac{1}{H} \mathbf{R} \frac{\partial Q_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}''} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}''} \right)^T \mathbf{R} \right] \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (15)$$

式中

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}''} = \frac{1}{2q} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}'' + \frac{A_\phi}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_h; \quad \frac{\partial Q_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}''} = \frac{1}{2q} \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}'' + \frac{A_\phi}{\sqrt{3}} \mathbf{1}_h; \quad (16)$$

$$A_\phi = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}; \quad \mathbf{H} = h + \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}''} \right)^T \mathbf{R} \frac{\partial Q_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}''}, \quad (17)$$

式中 Q_p, ϕ 分别为根据所谓偏量关联规则定义的塑性势函数与塑性势角. 根据对于各向同性应变硬化-软化压力相关材料的等价塑性应变 \mathcal{E} 定义^[22, 23]

$$h = - \frac{\partial F}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{X}} = \frac{6h_p^c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \left(1 + \frac{A_\phi (\sigma_m - 3KA_\phi \mathcal{X})}{\sqrt{3} |\sigma_m|} \right) \cong \frac{6h_p^c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \left(1 + \text{sign}(\sigma_m) \frac{A_\phi}{\sqrt{3}} \right), \quad (18)$$

式中 \mathcal{X} 是增量步塑性乘子, $K = E/3(1 - 2\nu)$ 是弹性体积模量, E, ν 是弹性模量和泊松比, 以及

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{I} + \mathcal{X} \mathbf{D}_e \frac{\partial^2 F}{\partial \boldsymbol{\sigma}''^2} \right)^{-1} \mathbf{D}_e \cong \mathbf{D}_e, \quad (19)$$

\mathbf{I} 是单位矩阵, \mathbf{D}_e 是弹性模量矩阵. 对于平面应变情况, $\boldsymbol{\sigma}''^T = [\alpha_x'' \quad \alpha_y'' \quad \alpha_z'' \quad \tau_{xy}]$, 偏应力势矩阵和球应力势向量分别为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1}_h = [1, 1, 1, 0]^T. \quad (20)$$

取所关心的应力分量, 即 $\boldsymbol{\sigma}''^T = [\alpha_x'' \quad \alpha_y'' \quad \tau_{xy}]$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]$, 弹塑性模量矩阵可写成

$$\mathbf{D}_\phi = \mathbf{D}_e - \frac{\left(\frac{3}{q} \right)^2 G^2 \mathbf{S}'' \mathbf{S}''^T + 3A_\phi A_\phi K^2 \mathbf{1}_{h3} \mathbf{1}_{h3}^T + \frac{3\sqrt{3}}{q} GK (A_\phi \mathbf{S}''^T \mathbf{1}_{h3} + A_\phi \mathbf{1}_{h3} \mathbf{S}''^T)}{h + 3G + 3KA_\phi A_\phi}, \quad (21)$$

式中 $G = E/2(1 + \nu)$ 是剪切弹性模量, \mathbf{S}'' 是广义有效应力向量的偏量部分,

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{S}''^T = [\dot{S}_x'' \quad \dot{S}_y'' \quad \tau_{xy}]; \quad \mathbf{1}_{h3} = [1 \quad 1 \quad 0]^T; \quad q = \sqrt{3(S_x''^2 + S_y''^2 + S_x'' S_y'' + \tau_{xy}^2)}^{1/2}, \quad (23)$$

式中Lame参数 $\lambda = E\nu/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$, 对于单轴应变情况($\varepsilon_x \neq 0, \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = 0$), 利用式(21) 并注意到 $\dot{S}_y'' = -\dot{S}_x''/2$, 因而有 $q = 3|\dot{S}_x''|/2$, 应力应变本构速率方程

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_x^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (24)$$

式中

$$D_x^{\text{ep}} = \lambda + 2G - \frac{4G^2 + 3A_{\phi} A_{\phi} K^2 + 2\sqrt{3}GK \text{sign}(S_x'') (A_{\phi} + A_{\phi})}{h + 3G + 3KA_{\phi} A_{\phi}} =$$

$$\frac{(\lambda + 2G)h + G(3\lambda + 2G + 4KA_{\phi} A_{\phi} - 2\sqrt{3}K \text{sign}(S_x'') (A_{\phi} + A_{\phi}))}{h + 3G + 3KA_{\phi} A_{\phi}}, \quad (25)$$

对于纯剪情况 ($\tau_{xy} \neq 0, \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$), 注意到 $q = \sqrt{3} |\tau_{xy}|$, 应力应变本构速率方程

$$\tau_{xy} = D_{xy}^{\text{ep}} \gamma_{xy}; \quad D_{xy}^{\text{ep}} = \frac{G(h + 3KA_{\phi} A_{\phi})}{h + 3KA_{\phi} A_{\phi} + 3G}. \quad (26)$$

3 波传播过程中的失稳和逸散性

3.1 率无关弹性介质中考虑渗透粘性的波传播过程分析

设一维问题的轴向以 x 表示. 考虑 x 轴向纵向波(压缩波) ($u_x = u \neq 0, u_y = u_z = 0, \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$), 则式(9) 和式(10) 退化为

$$[D_x^{\text{ep}} + (\alpha - n)^2 S_w^2 Q] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha - n) n S_w^2 Q \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} +$$

$$n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} - (\rho + \rho_a) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0, \quad (27)$$

$$n(\alpha - n) S_w^2 Q \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + n^2 S_w^2 Q \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial t} +$$

$$n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\rho^v + \rho_a) \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0. \quad (28)$$

为进行波传播的逸散特征分析, 我们考虑含液体一维多孔连续介质中行进的一个简谐波. 固体骨架和孔隙水的速度场可表示为

$$u(x, t) = u \exp(i(kx - \omega t)); \quad \tau(x, t) = \bar{\tau} \exp(i(kx - \omega t)), \quad (29)$$

式中 ω 是简谐波的角频率, k 是波数. 把式(29) 代入(27) ~ (28), 由简谐波的非平凡解条件得到如下特征方程

$$\begin{vmatrix} (D_x^{\text{ep}} + (\alpha - n)^2 S_w^2 Q)(ik)^2 + (\rho + \rho_a) \omega^2 + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i & (\alpha - n) n S_w^2 Q (ik)^2 - \rho_a \omega^2 - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i \\ (\alpha - n) n S_w^2 Q (ik)^2 - \rho_a \omega^2 - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i & n^2 S_w^2 Q (ik)^2 + (\rho^v + \rho_a) \omega^2 + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

由此可得到如下非显式地表示 ω 和 k 之间逸散关系的 k 的四次方程式

$$ak^4 + b(\omega)k^2 + c(\omega) = 0, \quad (31)$$

式中系数

$$a = D_x^{\text{ep}} n^2 S_w^2 Q; \quad b = b(\omega) = - (b_1 \omega^2 + b_2 \omega i); \quad c = c(\omega) = c_1 \omega^4 + c_2 \omega^3 i,$$

$$b_1 = D_x^{\text{ep}} (\rho^v + \rho_a) + S_w^2 Q [\alpha^2 \rho_a + n^2 \rho^v + (\alpha - n)^2 \rho^v];$$

$$b_2 = (D_x^{\text{ep}} + \alpha^2 S_w^2 Q) n^2 S_w^2 k_w^{-1},$$

$$c_1 = \rho \rho^v + (\rho + \rho^v) \rho_a; \quad c_2 = (\rho + \rho^v) n^2 S_w^2 k_w^{-1}. \quad (32)$$

显然, 如果我们考虑 ω 和 k 均为实数, 则式(31) 不可能存在解. 为满足方程(31) k 必须为复数, 这意味着简谐波将按指数规律衰减. 考虑到在式(27) ~ (28) 中引入了渗透粘性(Darcy 粘性), k 必须为复数是十分自然的要求. 注意到可表示

$$b^2 - 4ac = (d_r + d_v i) \omega^2 = r \exp(i\varphi) \omega^2, \quad (33)$$

式中

$$r = \sqrt{d_r^2 + d_v^2}; \quad \varphi = \arctan(d_v/d_r), \tag{34}$$

$$d_r = (b_1^2 - 4ac_1)\omega^2 - b_2^2; \quad d_v = (2b_1b_2 - 4ac_2)\omega \tag{35}$$

由于 $d_v > 0$, 即 $\sin \varphi > 0$ 总能保证满足。求解方程(31) 得到

$$k_j^2 = - (b + (-1)^j \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a) = R_j \exp(i\theta_j) \quad (j = 1, 2), \tag{36}$$

式中

$$R_j = \sqrt{e_{vj}^2 + e_{rj}^2}; \quad \theta_j = \arctan(e_{vj}/e_{rj}), \tag{37}$$

$$e_{rj} = (b_1\omega^2 - (-1)^j \omega \sqrt{r} \cos(\varphi/2)) / (2a) = \omega(b_1\omega - (-1)^j \sqrt{(r + d_r)/2}) / (2a), \tag{38}$$

$$e_{vj} = \omega(b_2 - (-1)^j \sqrt{r} \sin(\varphi/2)) / (2a) = \omega(b_2 - (-1)^j \sqrt{(r - d_r)/2}) / (2a). \tag{39}$$

由方程(36) 可得

$$k_j = \sqrt{R_j} \exp(i\theta_j/2). \tag{40}$$

需要注意, 根据式(38) ~ (39) 中参数的分析, $-\sqrt{R_j} \exp(i\theta_j/2)$ 不能是方程(36) 的解而被排除。令 k_j 的复数表示为 $k_j = k_{rj} + i\beta_j$, 由式(36) 和式(37) 可得

$$k_{rj} = \sqrt{R_j} \cos(\theta_j/2) = \sqrt{(R_j + e_{rj})/2}; \quad \beta_j = \sqrt{R_j} \sin(\theta_j/2) = \sqrt{(R_j - e_{rj})/2}. \tag{41}$$

根据物理意义, 式(41) 所示波数 k_{rj} 和引起波衰减的阻尼 β_j 必须为正。把 $k_j = k_{rj} + i\beta_j$ 代入到 k_j^2 的复数表示 $k_j^2 = e_{rj} + e_{vj}i$, 可知 $e_{vj} = 2k_{rj}\beta_j \geq 0$ 必须恒被满足, 这也是方程(31) 存在解的必要条件。现讨论式(41) 所表示的解存在的条件如下:

1) 对于 $j = 1$ 。当 $D_x^{ep} > 0$, 恒有 $b_1 > 0$ 和 $b_2 > 0$, $e_{v1} \geq 0$ 和 $e_{r1} \geq 0$ 恒成立, 即 $\sin\theta_1 \geq 0$ 和 $\cos\theta_1 \geq 0$, 因而 $0 \leq \theta_1/2 \leq \pi/4$, 式(41) 解成立。但当 $D_x^{ep} < 0$, 根据式(39) 满足 $e_{v1} \geq 0$ 的必要条件是 $b_2 < 0$ 且 $b_2 + \sqrt{(r + d_r)/2} < 0$ 。注意到对于弹塑性介质一般地有 $|Q| > |D_x^{ep}|$, 因此对饱和介质可一般地假定 $b_1 > 0$ 和 $b_2 > 0$ 均无条件成立, 从而恒有 $e_{v1} \leq 0$, 因而式(41) 解将不存在。即使假定 $b_2 < 0$ 成立, 由于此时恒有 $b_2 - \sqrt{(r - d_r)/2} < 0$, 故 $b_2 + \sqrt{(r - d_r)/2} < 0$ 要求

$(b_2 + \sqrt{(r - d_r)/2})(b_2 - \sqrt{(r - d_r)/2}) = b_2^2 - (r - d_r)/2 = (b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 - r)/2 > 0$ 必须满足。因恒有 $b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 > 0$, 因此恒有 $b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 + r > 0$, 即等价于必须满足

$$(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 - r)(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 + r) = (b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2)^2 - r^2 > 0.$$

而根据式(32) 和式(34) 可计算得

$$(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2)^2 - r^2 = 16D_x^{ep}\omega^2 n^6 S_w^6 Q k_w^{-2} [D_x^{ep}\rho_2 + \alpha S_w^2 Q ((\alpha - n)\rho_2 - n\rho_1)]^2 < 0,$$

因此当 $D_x^{ep} < 0$ 时对于 $j = 1$ 不存在解。

2) 对于 $j = 2$ 。当 $D_x^{ep} > 0$, 考虑与 $e_{v2} \geq 0$ 等价的要求 $(b_1^2 - 4ac_1)\omega^2 + b_2^2 - r \geq 0$ 。由于

$$[(b_1^2 - 4ac_1)\omega^2 + b_2^2 - r][(b_1^2 - 4ac_1)\omega^2 + b_2^2 + r] = 16D_x^{ep}\omega^2 n^6 S_w^6 Q k_w^{-2} [D_x^{ep}\rho_2 + \alpha S_w^2 Q ((\alpha - n)\rho_2 - n\rho_1)]^2 > 0,$$

且注意 $Y = b_1^2 - 4ac_1 = \xi_2 D_x^{ep} + \xi_1 D_x^{ep} + \xi_0$ 是 D_x^{ep} 的二次多项式, 其判别式恒有 $\Delta_Y = \xi_1^2 - 4\xi_2 \xi_0$

< 0 , 且恒有 $\xi_2 > 0$, 因此恒有 $Y > 0$ 。由此得 $e_{r2} \geq 0$ 恒满足, 即恒有解。

当 $D_x^{\text{ep}} < 0$, $e_{r2} \geq 0$ 即要求 $b_2 - \sqrt{(r - d_r)/2} \leq 0$ 或 $(b_1^2 - 4ac_1)\omega^2 + b_2^2 - r \leq 0$ 。注意到此时恒有 $c_1 > 0$ 和 $a < 0$, 因此恒有 $b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 > 0$, 并由

$$(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 - r)(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 + r) = (b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2)^2 - r^2 < 0$$

可判定 $(b_1^2\omega^2 + b_2^2 - 4ac_1\omega^2 - r)/2 < 0$, 即 $b_2 - \sqrt{(r - d_r)/2} < 0$ 恒得到满足, 即恒存在软化情况解。

综合以上讨论, 可得到如下具有实波速解的结论:

1) 当 $D_x^{\text{ep}} > 0$,

$$k_{r1} = k_{r1}(\omega) = \sqrt{(R_1 + e_{r1})/2}; \quad \beta_1 = \beta_1(\omega) = \sqrt{(R_1 - e_{r1})/2}, \quad (42)$$

$$k_{r2} = k_{r2}(\omega) = \sqrt{(R_2 + e_{r2})/2}; \quad \beta_2 = \beta_2(\omega) = \sqrt{(R_2 - e_{r2})/2}. \quad (43)$$

2) 当 $D_x^{\text{ep}} < 0$,

$$k_{r2} = k_{r2}(\omega) = \sqrt{(R_2 + e_{r2})/2}; \quad \beta_2 = \beta_2(\omega) = \sqrt{(R_2 - e_{r2})/2}. \quad (44)$$

注意一维压缩波对 $D_x^{\text{ep}} > 0$ 情况存在两个波速解。而对 $D_x^{\text{ep}} < 0$ 情况, 也存在一个压缩波解 ($j = 2$)。另外, 由于渗透粘性的引入, 单个压缩简谐波的相速度 $W_i^p = \omega/k_{ri}$ 一般地将是 ω 的函数, 因而波是逸散的。

对于高渗透性多孔介质, 可忽略渗透粘性 ($k_w^{-1} \cong 0$), 因而 $b_2 = 0$ 和 $c_2 = 0$, 式(31)可退化为

$$ak^4 - b_1k^2\omega^2 + c_1\omega^4 = 0, \quad (45)$$

式中恒有 $b_1 > 0$ 和 $c_1 > 0$ 。对于 $D_x^{\text{ep}} > 0$ 和 $D_x^{\text{ep}} < 0$ 情况, 分别有 $a > 0$ 和 $a < 0$, 含液体多孔介质中一个弹塑性压缩简谐波在忽略渗透粘性情况下的相速度平方可表示为

$$(W_{l, \text{ep}}^p)^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{2a}{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4ac_1}} \quad (a > 0 \text{ 因而 } b_1 > \sqrt{b_1^2 - 4ac_1}), \quad (46)$$

$$(W_{l, \text{ep}}^p)^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{2a}{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4ac_1}} \quad (a < 0 \text{ 因而 } b_1 < \sqrt{b_1^2 - 4ac_1}). \quad (47)$$

进一步假定不排水条件, 即渗透粘性不起作用, 同时 $u \gg u_s$, 则含液体多孔介质退化为单相介质, 式(27)与式(28)相加, 则得到

$$(D_x^{\text{ep}} + \alpha S_w^2 Q) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (48)$$

式中 $\rho = \rho^s + \rho^w$ 。把式(29)代入式(48), 由特征方程得到含液体多孔介质中一个弹塑性压缩简谐波在不排水条件下的相速度

$$W_{l, \text{ep}}^p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{D_x^{\text{ep}} + \alpha^2 S_w^2 Q}{\rho}}, \quad (49)$$

而弹性压缩简谐波在不排水条件下的相速度

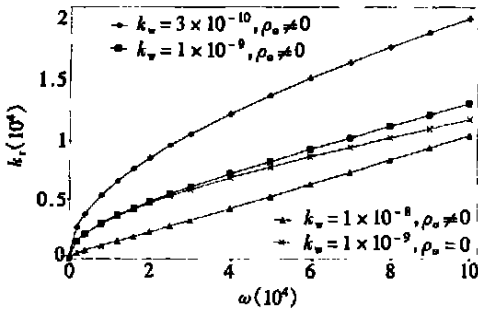
$$W_{l, e}^p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2G + \alpha^2 S_w^2 Q}{\rho}}. \quad (50)$$

可以注意到, 当忽略渗透粘性以及进一步考虑不排水条件因而介质可模型化为单相混合介质时, 虽然对于应变软化情况仍存在实波速解, 但单个压缩简谐波的相速度将不再是 ω 的函数, 因而波是非逸散的。很显然, 对导致材料失稳的应变局部化现象起到保持波动问题适应因而有解的正则化机制是多孔介质的颗粒和液体的压缩性。对于塑塑性介质 $|Q| >$

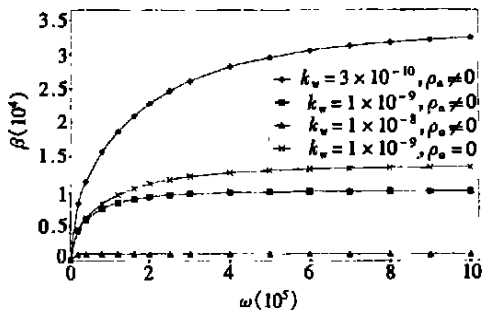
$|D_x^{ep}|$, 因此即使对于应变软化情况(特别对于完全饱和及高饱和高情况) $D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q > 0$ 也通常成立, 多孔介质的固体颗粒和液体的压缩模量 Q 在多孔介质固体骨架应变软化($D_x^{ep} < 0$) 后继续起到了承受压缩荷载的作用。下面一维横向(剪切)波的分析的结果也表明了这一点, 在那里由于压缩模量 Q 对承受剪切荷载不起作用, 因而在剪切应变软化情况($D_{xy}^{ep} < 0$) 下不论是否考虑渗透粘性, 波动方程将丧失其双曲型, 波速将成为虚数。由于行波的不同简谐分量具有不同的相速度, 波的逸散性意味着介质中行波的形状能够被改变。在由应变软化引起的应变局部化分析中, 这一性质使得在局部化区域中的行波有能力变换其形状。

在脉动荷载作用下介质中的波传播的物理速度并不取决于单个简谐波的相速度, 而是由简谐波的某个叠加的波速度, 即群速度 W^g 确定, 定义为

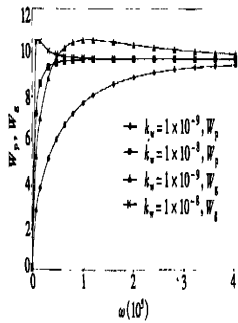
$$W^g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \tag{51}$$



(a) $k_{r\omega}$ 曲线



(b) β_ω 曲线



(c) $W_{p\omega}$ 曲线, $W_{g\omega}$ 曲线 ($\rho_a \neq 0$)

图 1 第二类纵向波的波速, 逸散性和波幅衰减

($D_x^{ep} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2, S_w = 1$)

为进一步讨论在率无关弹塑性多孔介质中纵向波传播过程的特征和各主要因素的影响, 考虑如下数值例题。令 $n = 0.32, \rho_s = 2000 \text{ N s/m}^4, \rho_w = 1000 \text{ N s/m}^4, K_s = 10^7 \text{ N/m}^2, K_w = 10^8 \text{ N/m}^2, \alpha = 1$ 。当考虑惯性耦合时, 如孔隙度不是太小, 迂曲度可按 $\tau = 1/\sqrt{n}$ 计算^[9]。图 1 ~ 2 给出了在硬化情况($D_x^{ep} > 0$) 下在不同渗透系数下按式(42) 计算($j = 1$) 的纵向波传播的数值结果。图 1 给出了假定 $D_x^{ep} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 和饱和条件下的逸散关系 $k_{r\omega}, \beta_\omega$ 曲线, 以及 $W_{l, ep\omega}$ 曲线和群速度 $W_{l, ep\omega}^g$ 曲线。图中显示, 较低渗透性提供了较大的 Darcy 阻尼, 因而较明显地使行波呈逸散性, 并且使波幅较快地衰减。高频谐波在空间域按一取决于渗透性

的收敛值指数衰减。渗透粘性数值对波速(相速和群速)影响在较低波频阶段较为明显,当波频增加趋于无穷大时波速也将趋于一定值。图中也包括了 ρ_a 与渗透粘性耦合而对波传播的影响。图 1a), b) 表明,它对波幅衰减的影响远大于它对波的逸散性的影响。图 2 则给出了在一定渗透性下,不同 D_x^{ep} 值和不同饱和度值对逸散性,波幅衰减系数和相波速的影响,可以看到,随着塑性变形的发展,即 D_x^{ep} 的降低,将使波幅衰减系数增加和使波速值降低;孔隙流体的非饱和将使波幅衰减系数减小和使波速提高; ρ_a 将使波幅衰减系数和波速值同时降低。

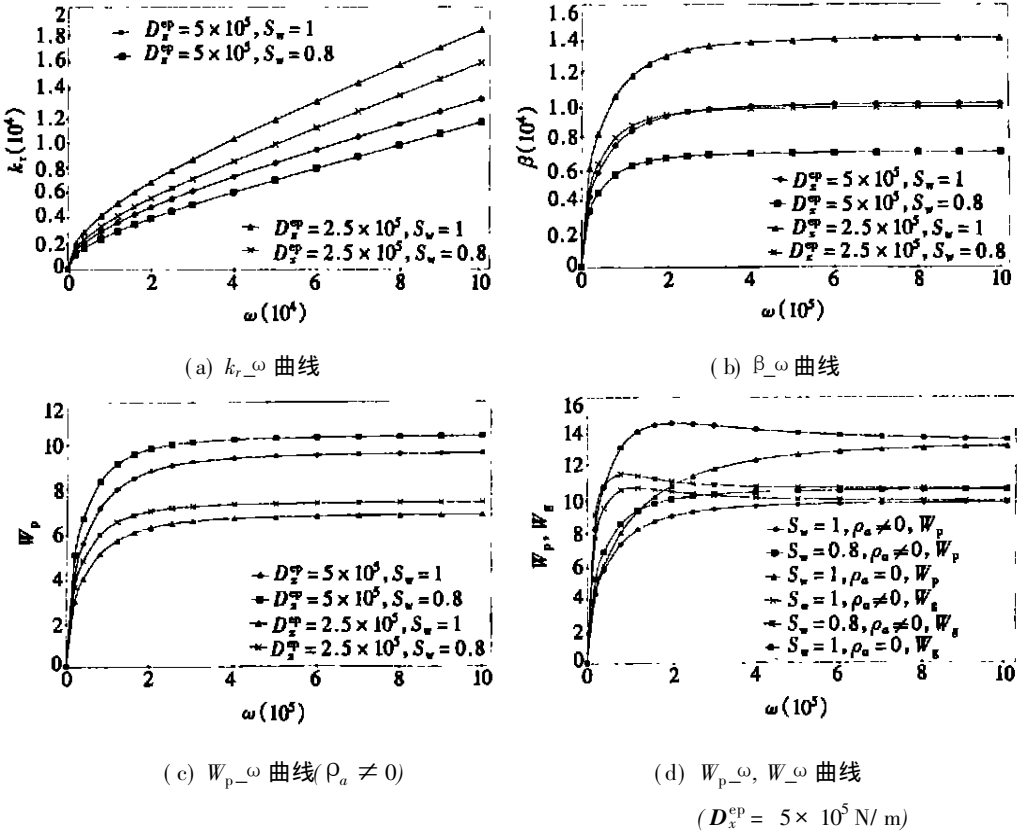


图 2 弹性模量,惯性耦合,非饱和度对第二类纵向波的影响 ($k_w = 1 \times 10^{-9} \text{ m}^4/\text{Ns}$)

图 3 和图 4 分别给出了在硬化情况 ($D_x^{ep} > 0$) 和软化情况 ($D_x^{ep} < 0$) 下按式(43) 和式(44) ($j = 2$) 计算的一维纵向波在介质中传播的数值结果。仅考虑含饱和液体。在硬化情况下,假定采用与图 1 中采用的相同力学、水力参数,因此可以比较所得到的弹性多孔介质中两类纵波的数值结果的差异。图 3 给出了相应 $j = 2$ 的 k_r - ω 曲线, β - ω 曲线,以及 $W_{l, ep, 2}^i$ - ω 曲线和 $W_{l, ep, 1}^i$ - ω 曲线。值得注意的是,在硬化情况下两个纵向波速 $W_{l, ep, 2}^i > W_{l, ep, 1}^i$ 。 $W_{l, ep, 2}^i$ ($j = 2$) 和 $W_{l, ep, 1}^i$ ($j = 1$) 分别称为第一类和第二类纵向波速。与第二类纵向波速相关联的波称为纵向慢波或 Biot 波。两类纵波反映的是固体骨架和孔隙流体两相在波动中具有相同的运动方向或相反。Biot 波体现了固体骨架和孔隙流体两相在波动中的相反运动,因此存在较大的阻尼和导致较慢的波速和呈现明显的逸散性。同时在应变软化条件下, Biot 波不再存在。相反,第一类纵波 ($j = 2$) 体现的是流固相的同向运动,具有较快的波速并具有软化解。可以看到,与第二类纵波的逸散性不同,对于不同的渗透系数,第一类纵波的逸散性均很小而可略去不计,并且对于不同渗透系数均给定了如图 3a) 所示几乎完全重合的 k_r - ω 曲线。Darcy 阻尼的

作用仅体现在使波幅衰减和降低波速。图中也给出了惯性耦合的 ρ_a 的影响。图 4 给出了软化情况 ($D_x^{ep} = -5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$) 下第一类纵向波的 $k_r\text{-}\omega$ 曲线, $\beta\text{-}\omega$ 曲线, 以及 W_p^i, W_g^i, W_t^i 曲线和 W_p^e, W_g^e, W_t^e 曲线。可以看到, 多孔介质的固体颗粒和液体的压缩模量 Q 在此时起到了正则化机制的作用, 使第一类纵波在应变软化条件下继续保持有实波速解, 所得到的结果与图 3 所示硬化情况下结果接近, 只是在软化条件下波速略降低和波幅衰减快一些。

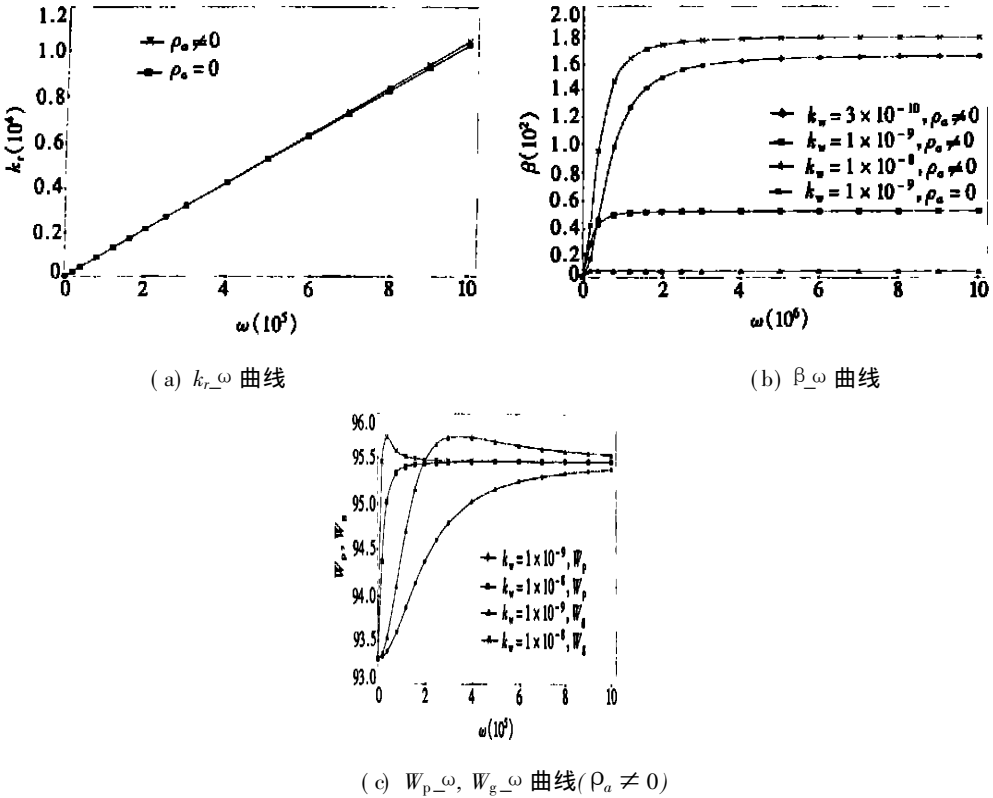


图 3 第一类纵向波在应变硬化下的波速, 逸散性和波幅衰减 ($D_x^{ep} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2, S_w = 1$)

如考虑横波(剪切波) ($u_x = v \neq 0, \dot{u}_y = v \neq 0, u_x = u_y = 0$), 则式(9)和式(10)退化写为

$$D_{xy}^{ep} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} - (\rho + \rho_a) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho_a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (52)$$

$$- n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (\rho^w + \rho_a) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (53)$$

现假定在含液体一维多孔连续介质中行进的一个简谐剪切波,

$$v(x, t) = \bar{v} \exp(i(kx - \omega t)); \quad v(x, t) = \bar{v} \exp(i(kx - \omega t)), \quad (54)$$

式(54)代入(52)~(53), 由简谐波的非平凡解条件得到如下特征方程

$$\begin{vmatrix} D_{xy}^{ep} (ik)^2 + (\rho + \rho_a) \omega^2 + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i & - \rho_a \omega^2 - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i \\ - \rho_a \omega^2 - n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i & (\rho^w + \rho_a) \omega^2 + n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega i \end{vmatrix} = 0. \quad (55)$$

方程的解可归结为

$$k^2 = \omega^2 (e_r + e_v i) = \omega^2 R \exp(i\theta), \quad (56)$$

式中

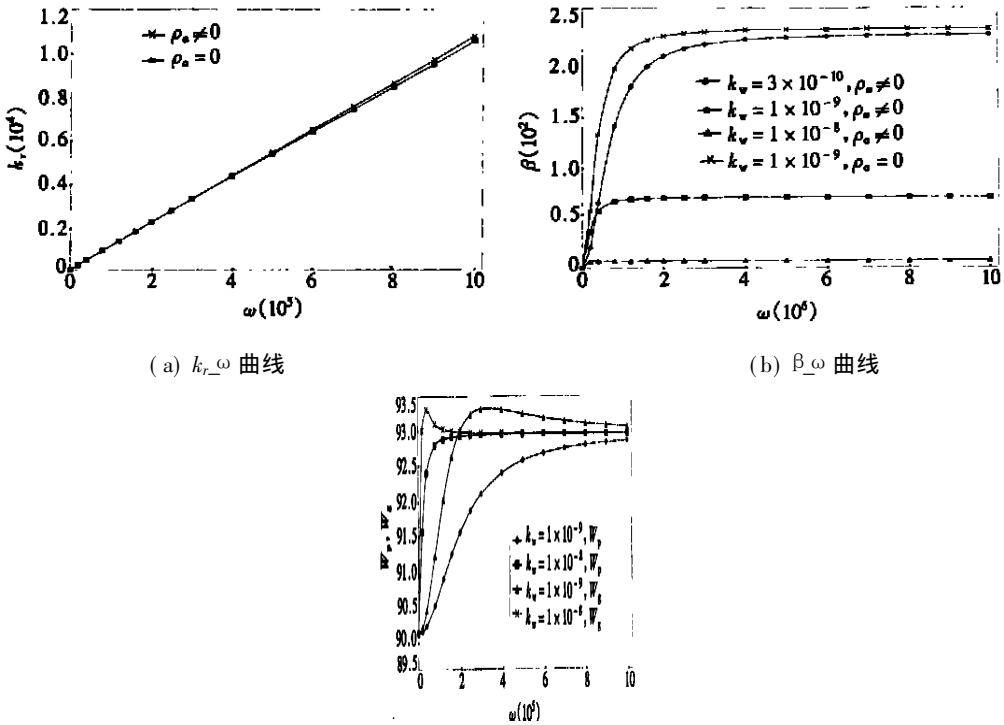
$$e_r = \frac{(\rho^s \rho^v + \rho_a \rho)(\rho^v + \rho_a) \omega^2 + \rho(n^2 S_w^2 k_w^{-1})^2}{D_{xy}^{ep} [(\rho^v + \rho_a)^2 \omega^2 + (n^2 S_w^2 k_w^{-1})^2]}$$

$$e_v = \frac{\rho^v n^2 S_w^2 k_w^{-1} \omega}{D_{xy}^{ep} [(\rho^v + \rho_a)^2 \omega^2 + (n^2 S_w^2 k_w^{-1})^2]}$$
(57)

从而得到

$$\left. \begin{aligned} k &= \omega \sqrt{R} \exp(i\theta/2) = k_r + \beta i; & R &= \sqrt{e_r^2 + e_v^2}; & \theta &= \arctan(e_v/e_r), \\ k_r &= \omega \sqrt{R} \cos(\theta/2) = \omega \sqrt{(R + e_r)/2}; & \beta &= \omega \sqrt{R} \sin(\theta/2) = \omega \sqrt{(R - e_r)/2}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

根据类似于对压缩波解的分析, 我们可得到结论: 一维剪切波传播仅对应硬化情况有实波速解。值得强调的是, 渗透粘性本身对波动过程的效应是使波动过程在一定程度上是逸散的, 它并不能在应变局部化分析中对问题起到正则化机制的作用。这一点与材料的粘弹塑性本构性质所带来的效应不同, 后者不仅使波动过程呈逸散性, 同时能对应变局部化问题起到正则化作用。我们将在下一节作进一步讨论。



(a) k_r - ω 曲线

(b) β - ω 曲线

(c) W_p - ω, W_g - ω 曲线 ($\rho_a \neq 0$)

图 4 第一类纵向波在应变软化下的波速, 逸散性和波幅衰减 Q 的正则化作用, ($D_x^{ep} = -5 \times 10^5 \text{ N/m}^2, S_w = 1$)

忽略渗透粘性, 特征方程 (55) 的解退化为

$$W_{s, ep}^p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{(\rho^w + \rho_a)(h + 3KA_\phi A_\psi)G}{(\rho^s \rho^v + \rho_a \rho)(h + 3KA_\phi A_\psi + 3G)}} \quad (59)$$

进一步考虑不排水条件, 令 $v \gg v_s$, 则对于退化为单相介质的含液体多孔介质, 由式 (52)

与式(53)相加得到

$$D_{xy}^{ep} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = 0, \quad (60)$$

含液体多孔介质中一个弹塑性剪切简谐波在不排水条件下的相速度

$$W_{s,ep}^p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{D_{xy}^{ep}}{\rho}}, \quad (61)$$

上式中 D_{xy}^{ep} 由式(26)确定。而弹性剪切简谐波在不排水条件下的相速度

$$W_{s,e}^p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (62)$$

数值试验结果表明, 弹塑性剪切板传播的 $k_r-\omega$ 曲线, $\beta-\omega$ 曲线, 以及 $W_{s,ep}^p-\omega$ 曲线和 $W_{s,e}^p-\omega$ 曲线在形状上十分接近于图3所示第一类纵波的相应曲线。

3.2 率相关弹塑性多孔介质中的波传播过程

现在考虑率相关弹塑性对波传播过程的影响。率相关弹塑性模型在一维压缩波情况下可表示为如下形式

$$\dot{\sigma}_x = D_x^{ep} \dot{\epsilon}_x + \mu \frac{\partial \dot{\epsilon}_x}{\partial t}, \quad (63)$$

这里 μ 是粘性系数, $\dot{\epsilon}_x$ 是在 x 轴向上的塑性应变率。考虑中等有限应变, 可采用应变速率的弹塑性部分和式分解, 即 $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x^e + \dot{\epsilon}_x^p$, 并利用 $\dot{\epsilon}_x^e = \dot{\sigma}_x/E$, 则由式(63)可得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\dot{\sigma}_x + \frac{\mu}{E} \frac{\partial \dot{\sigma}_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_x^{ep} u_x + \mu \dot{u}_x). \quad (64)$$

略去应力速率下标。对于不排水情况, 把一维情况下的式(1)和式(2)相加并利用式(6)得到率型运动平衡方程

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_x}{\partial x} = -\alpha^2 S_w^2 Q \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (65)$$

把式(65)代入式(64), 并利用谐波分析得到

$$E(\alpha^2 S_w^2 Q + D_x^{ep})k^2 - [\mu\omega^2 + \mu\omega(\rho\omega^2 - Ek^2 - \alpha^2 S_w^2 Qk^2)]i = 0. \quad (66)$$

如果我们考虑 k 和 ω 均为实数, 则式(66)不可能有解。只有当 k 为复数, 即 $k = k_r + \beta i$, 方程(66)才能被满足。把 $k = k_r + \beta i$ 代入方程(66), 由实部和虚部等式可得到

$$\rho\omega^2 [E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q) + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q)] = [E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q)^2 + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q)^2] (k_r^2 - \beta^2), \quad (67)$$

$$E\mu\rho\omega^3 (E - D_x^{ep}) = [E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q)^2 + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q)^2] 2k_r \beta. \quad (68)$$

并分别求得 k_r^2 和 β^2 ,

$$k_r^2 = \frac{\rho\omega^2}{2} \frac{B + [B^2 + (E\mu\omega)^2 (E - D_x^{ep})^2]^{1/2}}{E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q)^2 + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q)^2}, \quad (69)$$

$$\beta^2 = \frac{\rho\omega^2}{2} \frac{-B + [B^2 + (E\mu\omega)^2 (E - D_x^{ep})^2]^{1/2}}{E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q)^2 + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q)^2}, \quad (70)$$

式中

$$B = E^2 (D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q) + \mu^2 \omega^2 (E + \alpha^2 S_w^2 Q). \quad (71)$$

对于一维剪切波情况, 把率型运动平衡方程代入率相关本构方程可得到

$$\rho \left[\frac{\partial \dot{v}_x}{\partial t} + \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \dot{v}_x}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{xy}^{ep} + \mu \dot{v}_x). \quad (72)$$

并由单个谐波分析得到

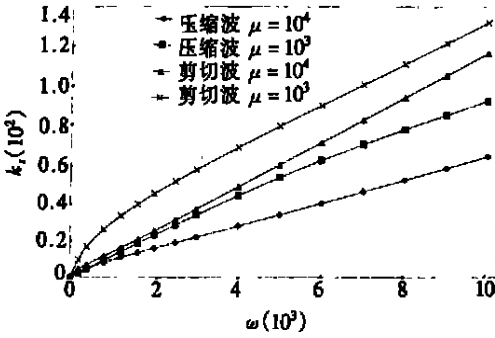
$$GD_{xy}^{\text{ep}}k^2 - \rho G \omega^2 + \mu \omega (\rho \omega^2 - Gk^2)i = 0 \quad (73)$$

考虑 k 为复数, 即 $k = k_r + \beta i$, 分别求出一维剪切波情况 k_r^2 和 β^2

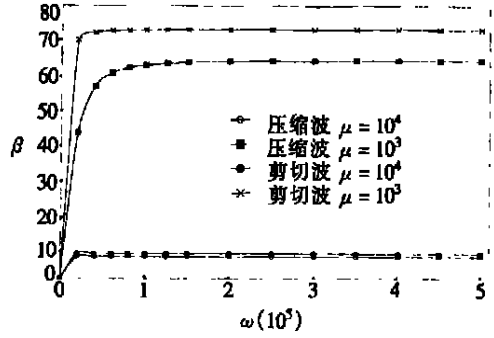
$$k_r^2 = \frac{\rho \omega^2 [(GD_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2) + \sqrt{(GD_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2)^2 + (\mu \omega)^2 (G - D_{xy}^{\text{ep}})^2}]^{1/2}}{2G D_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2}, \quad (74)$$

$$\beta^2 = \frac{\rho \omega^2 - (GD_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2) + \sqrt{(GD_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2)^2 + (\mu \omega)^2 (G - D_{xy}^{\text{ep}})^2}]^{1/2}}{2G D_{xy}^{\text{ep}} + \mu^2 \omega^2}, \quad (75)$$

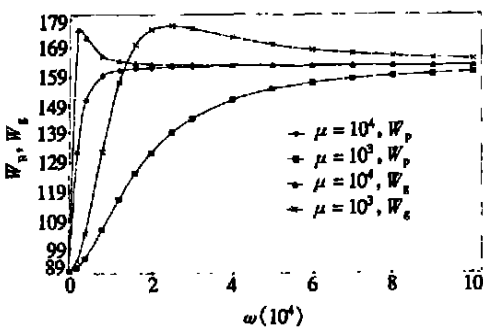
给定材料参数: $E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $G = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. 为考察率相关本构关系对应变软化的正则化作用, 采用 $D_x^{\text{p}} = -5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, $D_{xy}^{\text{p}} = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. 图 5 给出了在应变软化粘弹塑性多孔介质中纵向波和剪切波传播的逸散关系 ω_{k_r} 曲线, β_{ω} 曲线, $W_{vp}^{\text{p}}_{\omega}$ 和 $W_{vg}^{\text{p}}_{\omega}$ 曲线. 显示了率相关弹塑性本构模型对由应变软化引起的材料失稳 (第一和第二失效模式) 都能起到正则化作用. 图 6 还比较了不同粘性值 ($\mu = 10^4 \text{ N s/m}^2$, $\mu = 10^3 \text{ N s/m}^2$) 对波的逸散性, 波幅衰减和波速的影响效应. 只有当粘性系数值在一定范围内时, 率相关弹塑性对行波的逸散性才有较明显的效果.



(a) k_r_{ω} 曲线

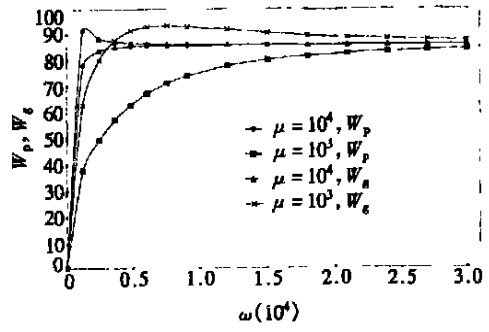


(b) β_{ω} 曲线



(c) 压缩波, $W_{p_{\omega}}$, $W_{g_{\omega}}$ 曲线

($D_x^{\text{p}} = -5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$)



(d) 剪切波, $W_{p_{\omega}}$, $W_{g_{\omega}}$ 曲线,

($D_{xy}^{\text{ep}} = -1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$)

图 5 率相关弹塑性对应变软化下波传播过程的正则化作用

($E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $G = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}$, $S_w = 1$)

4 结 论

本文基于 Biot 理论的饱和_非饱和含液体多孔介质动力_渗流耦合模型, 在模型中计及了

固体与流相之间的力学_渗流耦合,粘性耦合和惯性耦合。讨论了在非弹性含液体多孔介质中由于应变软化导致的波传播过程中的失稳现象。分析了由于流_固之间粘性耦合和固相的材料粘弹塑性本构行为所引起的波传播过程的逸散性。值得强调指出的是:

1) 对由于应变软化引起的材料失稳和应变局部化,多孔介质的颗粒和液体的压缩性和高饱和度性,能对保持第一类纵波传播问题的适定性起正则化作用。孔隙流相与固相运动的粘性耦合效应使波动过程在一定程度上逸散,但它并不能在应变局部化部分析中对问题起到正则化机制的作用。这一粘性与材料的粘弹塑性本构性质带来的效应不同,后者不仅使波动过程呈逸散性,同时能对应变局部化问题起一定的正则化作用。

2) 当材料失稳 ($D_x^{ep} < 0, D_{xy}^{ep} < 0$) 发生时,对于第一类弹塑性纵向波仍有实波速解,而对于第二类弹塑性纵波(Biot波)则不再存在实波速解。在不排水条件下,只有一个纵波,并且即使 $D_x^{ep} < 0$ (但 $D_x^{ep} + \alpha^2 S_w^2 Q > 0$) 仍有实波速解。而对于弹塑性剪切波,不论排水或不排水条件,只要当 $D_{xy}^{ep} < 0$ 发生,就不再存在实波速解。

3) 对于含液体多孔介质在强动荷载下的数值分析中,应该采用粘弹塑性模型拟介质力学本构行为。一方面,由于在强动荷载下的高应变速率,介质从本质上将呈现明显的粘性效应。另一方面,它将对强动荷载下介质的应变软化及其后状态的数值分析起正则化机制的作用。虽然梯度塑性或梯度粘塑性等非局部化本构模型^[3, 24]对应变软化具有更健壮的正则化能力,但将要求额外的编程工作量和更多的计算工作量,此外,对于工程应用,作用非局部化材料参数的内部长度参数不总是容易得到的。可以考虑率相关介质本构模型和非局部化途径的混合或选择性使用。

4) 流固惯性耦合对含液体多孔介质中波传播过程的影响主要体现在使波速降低和当与粘性耦合共同作用时使波幅衰减量减少。而非饱和度的影响则是使波速增加的同时,当与粘性耦合共同作用时使波幅衰减量减少。它们由于和粘性耦合共同作用而对波的逸散性影响很小。

[参 考 文 献]

- [1] Hill R. Acceleration waves in solids[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1962, **10** (1): 1—16.
- [2] Bazant Z P, Belytschko T B. Wave propagation in a strain softening bar: exact solution[J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1985, **111**(3): 381—389.
- [3] Sluys L J, Muhlhaus H B, Borst Rde. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium[J]. Int J Solids Structures, 1992, **30**(9): 1153—1171.
- [4] Sluys L J, Wave propagation, localization and dispersion in softening solids. Dissertation[D]. Delft University of Technology, Delft, 1992.
- [5] Rudnicki K, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975, **23**: 371—394.
- [6] Rice J R. On the stability of dilatant hardening for saturated rock masses[J]. Journal of Geophysical Research, 1975, **80**: 1531—1536.
- [7] Lorei B, Prevost J H. Dynamic strain localization in fluid-saturated porous media[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, **117**(4): 907—922.
- [8] Pietruszczak S. Undrained response of granular soil involving localized deformation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, **121**(12): 1292—1297.

- [9] Gajo A. The effects of inertial coupling in the interpretation of dynamic soil tests[J]. *Geotechnique*, 1996, **46**(2): 245—257.
- [10] Runesson K, Peric D. Effect of pore fluid compressibility on localization in elastic-plastic porous solids under undrained conditions[J]. *Int J Solids Structures*, 1996, **33**(10): 1501—1518.
- [11] Biot M A. Theory of three-dimensional consolidation[J]. *J Applied Physics*, 1941, **12**: 155—164.
- [12] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 168—178.
- [13] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, **28**(2): 179—191.
- [14] Zienkiewicz O C, Shioni T. Dynamic behavior of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution[J]. *Int J Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, **8**(1): 71—96.
- [15] LI Xi_kui, Zienkiewicz O C, XIE Y M. A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution[J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1990, **30**(6): 1195—1212.
- [16] LI Xi_kui, Zienkiewicz O C. Multiphase flow in deforming porous media and finite element solution [J]. *Computers & Structures*, 1992, **45**(2): 211—227.
- [17] Lewis R W, Schrefler B A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media* [M]. England: John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- [18] Lewis R W, Sukirman Y. Finite element modelling for simulating the surface subsidence above a compacting hydrocarbon reservoir[J]. *Int J Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1994, **18**: 619—639.
- [19] Meroi E A, Schrefler B A. Large strain static and dynamic semi-saturated solid behavior[J]. *Int J Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1995, **19**: 81—106.
- [20] LI Xi_kui, Thomas H R, Fan Y Q. Finite element method and constitutive modelling and computation for unsaturated soils[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng*, 1999, **169**(1~ 2): 135—159.
- [21] Alonso E E, Gens A, Josa A. A constitutive model for partially saturated soils[J]. *Geotechnique*, 1990, **40**(3): 405—430.
- [22] Zienkiewicz O C, Taylor R. *The Finite Element Method*, Vol. 2 [M]. England: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [23] Duxbury P G, LI Xi_kui. Development of elasto-plastic material models in a natural co-ordinate system[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng*, 1996, **135**(3~ 4): 283—306.
- [24] LI Xi_kui, Cescotto S. A mixed element method in gradient plasticity for pressure dependent Materials and modelling of strain localization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **144**(3~ 4): 287—305.

Instability and Dispersivity of Wave Propagation in Inelastic Saturated/Unsaturated Porous Media

LI Xi_kui, ZHANG Jun_bo, ZHANG Hong_wu

(State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China)

Abstract: A model based on the Biot theory for simulating coupled hydrodynamic behavior in saturated_unsaturated porous media was utilized with integration of the inertial coupling effect between the solid_fluid phases of the media into the model. Stationary instability and dispersivity of wave propagation in the media in one_dimensional problem were analyzed. The effects of the following factors on stationary instability and dispersivity were discussed. They are the viscous and inertial couplings between the solid and the fluid phases, compressibility of the mixture composed of solid grains and pore fluid, the degree of saturation, visco_plastic (rate dependent inelastic) constitutive behavior of the solid skeleton under high strain rate. The results and conclusion obtained by the present work will provide some bases or clues for overcoming the difficulties in numerical modelling of wave propagation in the media subjected to strong and shock loading.

Key words: porous media; wave propagation; visco_elastoplasticity; material stability; dispersivity; hydro_dynamic coupling