

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1221-09

# 固体弹性三维问题统一解<sup>\*</sup>

许 强<sup>1</sup>, 孙焕纯<sup>2</sup>

(1 同济大学 建筑工程系, 上海 200092; 2 大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(本刊编委孙焕纯来稿)

**摘要:** 依据三维弹性力学问题的 Kelvin 解, 用三维虚边界元法来建立积分方程, 从而使三维实体和各类板、壳等问题的求解思想得到统一。对各类三维问题采用统一的思想建立数学模型, 更有利于程序模块化, 增强了程序的通用性。另外, 建立积分方程时直接引用 Kelvin 解, 而未引入任何其它假设, 使该方法的解更偏于实际, 且使应用范围拓宽。再者, 与边界元直接法相比, 该方法的优点在于无需处理奇异积分, 且系数阵是对称的。最后给出部分算例, 以证明方法的有效性和计算精度。

**关键词:** 虚边界元; 最小二乘法; 弹性力学问题统一解

**中图分类号:** O343. 2; TB33      **文献标识码:** A

## 引 言

对弹性三维实体和各类板、壳问题的分析计算, 常用的数值分析方法有: 有限差分法、有限元法、加权残数法、边界元直接法等。但由于三维问题的复杂性, 就上述各方法若直接从三维弹性力学微分方程出发统一求解各类三维问题, 则存在着解方程的困难; 故而必须对具体问题引进相应的假设, 以达到方程的简化求解; 从而派生出诸多近似求解方法。边界元直接法也是依据各类问题近似方程的基本解来建立积分方程的。由于求解方法不统一, 这给工程应用带来了不便, 如经典壳体方程的求解问题几乎没有通用的有限元方法, 一种类型的单元对某一问题有效, 而对另一问题不仅误差大而且常常是无效的; ……。综上所述, 对各类三维问题的解法存在着如何获得较统一的、更精确的算法。

众所周知, 边界元法在某些方面优于有限元法, 如数值准备简单、工作量小, 尤其是对三维问题, 省时、方便; 离散化误差仅来源于边界, 域内点的物理量严格满足微分方程, 所以计算精度高; 适宜于处理无限域、断裂、应力集中等问题。但边界元直接法也存在着缺点, 如系数阵是不对称的满阵, 求解耗时, 尤其是解三维问题; 奇异积分的处理和计算麻烦、耗时, 特别在求解边界附近物理量时, 由于存在拟奇异性而降低计算精度, 即存在“边界层效应”等。另外, 有些三维问题的基本解很难得知(如变厚度的板、壳等); 有些问题即使有基本解, 形式也很复杂, 不便于计算, 例如圆柱壳的基本解就是以级数形式表达的贝塞尔(Bessel)函数, 计算较为复杂。而笔者在文献[1]中给出的三维虚边界元法能够克服边界元直接法的上述缺点。

\* 收稿日期: 2000.07.27; 修订日期: 2001.07.03

作者简介: 许强(1951—), 男, 安徽安庆人, 副教授, 博士, 研究方向为工程数理问题的数值算法, 已发表论文 20 余篇。

本文依据三维弹性力学问题的 Kelvin 解,用三维虚边界元法<sup>[1,2]</sup>来建立积分方程,从而使三维实体和各类板、壳等问题的求解思想得到统一。对各类三维问题采用统一的思想建立数学模型,更有利于程序模块化,增强了程序的通用性。另外,建立积分方程时直接引用 Kelvin 解,而未引入任何其它假设,使本文方法的解更偏于实际,且使用应用范围拓宽。

本文方法应属于边界元间接法范畴,但不同于其它间接法(如域外奇点法、无奇点边界元法等)。本文方法在虚边界上采用未知待求的虚体力函数,保证了解的稳定性;直接引用三维弹性力学问题的 Kelvin 解,这不但使各类三维问题的解法得到统一,提高了计算精度,而且避免了各类板、壳方程基本解的复杂性和无基本解的困难。

## 1 弹性三维问题建模思想的统一性

笔者在文[1,2]中已给出了三维虚边界元法思想。虚边界元法的思想是把所求区域  $\Omega$  视为无限域的一部分,通过满足域内条件所求的虚边界  $S'$  上的“虚荷载” $q(\xi)$  再求出实边界  $S$  及其域  $\Omega$  内的未知物理量( $S' \supset S$ ),是一种“借虚求实”的方法。由弹性力学理论可知,任一给定的弹性力学问题的解是唯一存在,且具有连续性;而 Kelvin 解在无限域内满足泛定方程;又由文[1]中的式(11)~(14)可知, $\sigma_j(x)$ 、 $\varepsilon_j(x)$ 、 $u_i(x)$ 、 $p_i(x)$  在  $\Omega'$  内满足连续性条件( $\Omega' \supset \Omega$ )。于是,可以通过满足原问题的边界条件来求虚边界上的虚体力  $q(\xi)$ 。本方法在虚边界上均采用数值积分,以虚边界上结点虚体力作为未知待求量;实边界条件的满足,可根据边界的不同特点采用数值积分法、超额配点法或数值积分与超额配点相结合的方法。

对三维实体和各类板、壳等问题,本文均依据三维弹性力学问题的 Kelvin 解,应用三维虚边界元法思想和通过最小二乘法的手段分别建立求解各类问题关于虚体力函数  $q(\xi)$  的方差泛函:

### 1) 虚边界元最小二乘积分法<sup>[1]</sup>

$$J_{R_1}[q(\xi)] = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{S'_j} \alpha_{uj} [u_i(x) - u_i(x)]^2 dS + \sum_{j=1}^{N_2} \int_{S'_j} \alpha_{pj} [p_i(x) - p_i(x)]^2 dS \quad (1)$$

此方法在虚边界上采用数值积分,实边界条件的满足也是采用数值积分法。该方法的思想可见文[1]。用此方法可以计算三维实体、厚板、厚壳等问题。在文[1,3]中给出了相关的算例。

### 2) 虚边界元最小二乘配点法<sup>[2]</sup>

$$J_{R_2}[q(\xi)] = \sum_{j=1}^k \alpha_{uj} [u_i(x_j) - u_i(x_j)]^2 + \sum_{j=k+1}^m \alpha_{pj} [p_i(x_j) - p_i(x_j)]^2 \quad (2)$$

此方法在虚边界上采用数值积分,在实边界上有限个点处满足原问题给出的已知边界条件。该方法的思想可见文[2]。文[2]中给出了椭圆孔柱壳算例。

### 3) 板弯曲问题虚边界元最小二乘法<sup>[4]</sup>

$$J_{R_3}[q(\xi)] = \int_{S'} \alpha \sum_{i=1}^3 [(p_i^1(x') + p_i^2(x')) - p_i(x)]^2 dS + \sum_{j=1}^{m_1+m_2} \alpha_1 [w(x_j) - w(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_2 [\theta_i(x_j) - \theta_i(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_1+m_2} \alpha_3 [M_i(x_j) - M_i(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_3} \alpha_4 [V_i(x_j) - V_i(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_3} \alpha_5 [Q_i(x_j) - Q_i(x_j)]^2 \quad (3)$$

此方法在虚边界上采用数值积分。另根据中厚板和薄板的厚度尺寸远小于周边尺寸的特点,

可将板的实边界分为主要和次要两种,主要边界是指平行于板中面的上、下边界,次要边界是指垂直于板中面的四周侧边界。在主要边界上要求逐点积分满足,故可采用数值积分法;在次要边界上,由于板的厚度尺寸比四周侧边尺寸小得多,故可根据不同的边界条件采用不同的有限配点,以满足配点处的边界条件,如位移、转角、弯矩、水平剪力、横力等。该方法的思想可见文[4]。文[4]中给出了相关的算例

4) 薄壳问题虚边界元最小二乘法

$$\begin{aligned}
 J_{R_4}[q(\xi)] = & \int_{S'} \alpha \sum_{i=1}^3 [(p_{\alpha_i}^1(x') + p_{\alpha_i}^2(x')) - p_{\alpha_i}(x)]^2 dS + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_1 \sum_{i=1}^3 [u_{\alpha_i}(x_j) - u_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \\
 & \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_2 \sum_{i \in I_1} [u_{\alpha_i}(x_j) - u_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_3 [\phi_{\alpha_i}(x_j) - \phi_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \\
 & \sum_{j=1}^{m_1+m_3} \alpha_4 [N_{\alpha_i}(x_j) - N_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_1+m_3} \alpha_5 [M_{\alpha_i}(x_j) - M_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \\
 & \sum_{j=1}^{m_3} \alpha_6 [V_{\alpha_i}(x_j) - V_{\alpha_i}(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{m_3} \alpha_7 [Q_{\alpha_i}(x_j) - Q_{\alpha_i}(x_j)]^2. \quad (4)
 \end{aligned}$$

此方法在虚边界上采用数值积分。在平行于壳中曲面的上、下实边界,要求逐点积分满足,故采用数值积分法;在垂直于壳中曲面的四周侧边界面上,可根据问题的不同约束状况,取有限个配点满足给定的条件,如位移、转角、弯矩、膜力、垂直剪力或水平剪力等。该方法的思想相似于文[4],本文中给出了扁壳算例

5) 不同介质问题虚边界元最小二乘法<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned}
 J_{R_5}[q^{(1)}, q^{(2)}] = & \int_{S^{u_1}} \alpha [u_i^{(1)}(x) - u_i^{(1)}(x)]^2 dS + \int_{S^1} \beta [p_i^{(1)}(x) - p_i^{(1)}(x)]^2 dS + \\
 & \int_{S^{u_2}} \alpha [u_i^{(2)}(x) - u_i^{(2)}(x)]^2 dS + \int_{S^2} \beta [p_i^{(2)}(x) - p_i^{(2)}(x)]^2 dS + \\
 & \sum_{j=1}^{Pm} \alpha [u_i^{(1)}(x_j) - u_i^{(2)}(x_j)]^2 + \sum_{j=1}^{Pm} \beta [p_i^{(1)}(x_j) + p_i^{(2)}(x_j)]^2. \quad (5)
 \end{aligned}$$

此方法也是在虚边界上采用数值积分。可以用于求解不同介质的组合结构问题。该方法的思想可见文[5]。文[5]中给出了相关的算例

上述各类问题方差泛函的建立,均以虚边界上的虚体力  $q(\xi)$  作为未知函数;实边界条件的满足,则根据边界的不同特点采用不同的处理方式。由于各泛函式均以虚体力作为未知待求量,使得各方程的离散化数学模式得到统一,便于程序的模块实现,增强了程序的通用性。在建立方程时,对物体的几何形状无任何限制,故可求解不同形状的等厚度和变厚度板壳问题,拓宽了应用范围。另外,给出了不同介质组合体问题的分析方法,其计算精度是常规有限元法和边界元直接法难以做到的(见文[5])。

## 2 方差泛函的性质

分别对各泛函式(1)~(5)取变分,即  $\delta J_{R_i}[q(\xi)] = 0$ , 则可得各问题相应的变分方程<sup>[1,2,4,5]</sup>。由此可见,若各物理量在原问题的边界上取其给定的边界值,则存在与之对应的虚体力函数  $q^*(\xi)$ 。这就是说,在虚边界上的函数试探空间中肯定存在与之对应的虚体力函数  $q^*(\xi)$ , 使方差泛函取零极小值,即  $J_{R_i}[q^*(\xi)] = 0$ 。这是因为,方差泛函  $J_{R_i}[q(\xi)]$  中被

积项均为平方项, 显然有  $J_{R_i}[q(\xi)] \geq 0$ ; 只有当各物理量在原问题的边界上取其给定边界值时, 才能有  $J_{R_i}[q^*(\xi)] = 0$ . 从各问题的变分方程可知, 由于虚体力变分  $\delta q_k(\xi)$  的任意性, 必有各方差对应取零值, 这正与方差泛函取零值的条件是相同的, 这说明  $\delta J_{R_i}[q(\xi)] = 0$  所求的  $q(\xi)$  是弹性力学问题解的充分条件; 反之, 如果存在使原问题的所有边界条件都得到满足的  $q(\xi)$ , 由变分方程可知,  $\delta J_{R_i}$  必等于零, 即  $\delta J_{R_i}[q(\xi)] = 0$  为  $q(\xi)$  是弹性力学问题解的必要条件. 虚边界元法是先求方差泛函极小值解  $q(\xi)$ , 然后代入文[1]式(11)~(14)得到原问题的解; 所以, 方差泛函极小值的解等价于原问题的解. 综上所述, 方差泛函具有如下性质:

- 1) 方差泛函有极小值, 且极小值为零;
- 2) 方差泛函取极小值的解等价于原问题的解;
- 3)  $\delta J_{R_i}[q(\xi)] = 0$  是求弹性力学问题间接解  $q(\xi)$  的必要和充分条件.

### 3 变分方程离散化处理

各问题的变分方程只能采用数值方法求解, 也就是说只能将无穷维的问题化为有限维的问题求近似解  $q(\xi)$ . 又由于各变分方程的解均为虚体力函数, 故对各变分方程的离散化处理是相同的, 这也充分地体现了三维虚边界元解法的统一性.

设  $Q$  为虚边界上虚体力函数的试探空间, 则有  $q(\xi) \in Q$ ; 又设  $Q_N$  是  $Q$  的子空间, 取试函数  $q(\xi) \in Q_N \subset Q$ . 对  $q(\xi)$  的构造, 可采用有限元方法在虚边界上化分单元, 以各单元的结点虚体力作为待求量; 在单元内, 以高斯数值积分法来代替原来的连续积分.

设  $n$  为整个虚边界上的结点数, 则有  $N = 3n$ . 任一结点  $q(\xi)$  的分量形式为

$$q_i(\xi) = [q_{1,i}(\xi), q_{2,i}(\xi), q_{3,i}(\xi)]^T \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

对任一单元, 有

$$q^{(e)}(\xi) = N^{(e)} \left\{ q_{k,i}^{(e)} \right\} \quad (k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, JN \text{ (} JN \text{ 为单元结点数)}), \quad (6)$$

其中,  $q_{k,i}^{(e)}$  是第  $e$  个单元第  $i$  个结点沿第  $k$  个方向的虚体力;  $N^{(e)}$  是单元形函数矩阵, 随所选用的单元类型来定;  $q^{(e)}(\xi)$  是单元内任意点处的虚体力向量. 在单元上, 以  $q^{(e)}(\xi)$  作为原问题间接解  $q^{(e)}(\xi)$  的近似解. 现将方差泛函  $J_{R_i}[q(\xi)]$  的零极小值问题化为子空间  $Q_N$  中方差泛函  $J_{R_i}[q(\xi)]$  的极小值问题

$$\delta J_{R_i}[q(\xi)] = 0 \quad (7)$$

称为最小二乘变分方程, 由这个方程可得

$$\frac{\delta J_{R_i}[q(\xi)]}{\partial q_s} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, 3n), \quad (8)$$

这就得到求解虚边界上各结点处虚体力值的控制方程. 现将式(8)写成矩阵形式, 即

$$GA = B, \quad (9)$$

其中  $G = [g_{st}]_{N \times N}$  为系数阵, 且在  $g_{st} = g_{ts}$ ;  $A$  为待求的虚边界上各结点虚体力向量 ( $N \times 1$ );  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}^T$  为右端项. 关于各问题的  $g_{st}$ 、 $b_s$  显示表达可见文[1, 2, 4, 5].

### 4 数值算例

下面给出两个算例, 例 1 的板弯曲问题是采用式(3)计算的; 例 2 的扁壳问题是采用式(4)

计算的。

例1 求解在各种支承条件下承受均布载荷  $q$  的方板的中心点挠度和弯矩。方板尺寸为  $20 \times 20 \times 2 \text{ cm}^3$ ,  $q = 10 \text{ kN}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ 。方板的支承状况见图1。图2给出按1/4对称性的计算模型。板的中心点挠度和弯矩的计算结果见表1。图3给出了各种支承状况下, 板的变形图。表2给出了各种支承状况下, 对称面处弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  的值。表3给出了四边简支不同厚度板中点的挠度、弯矩与文[6] 的比较( 本文解的板中面网格划分见图2 或图3 所示)。

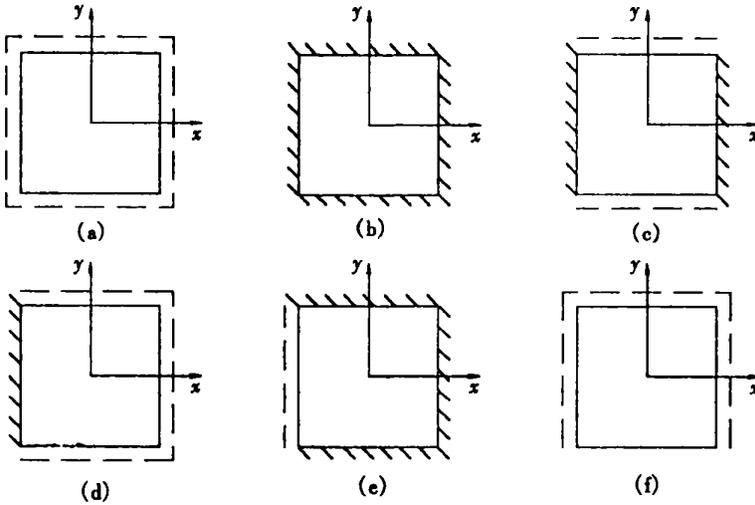
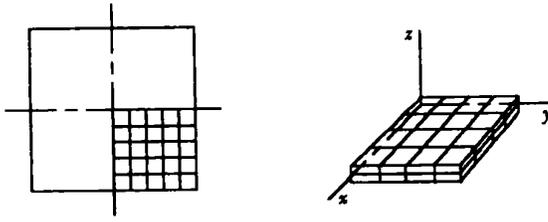


图1 各种支撑方板

表1 方板在均布荷载作用下的中心点挠度和弯矩 ( $h/a = 0.1$ )

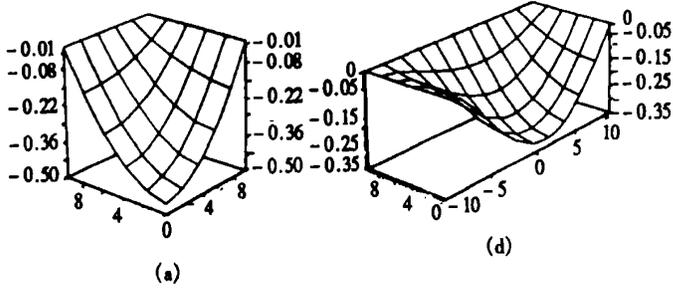
边界条件	解法	$w (qa^4/D)$	$M_x (qa^2)$	$M_y (qa^2)$
四边简支 图1(a)	本文解	0.00425	0.0480	0.0480
	薄板解	0.00406	0.0479	0.0479
四边固支 图1(b)	本文解	0.001263	0.0214	0.0214
	薄板解	0.001265	0.0229	0.0229
对边简支二边固支 图1(c)	本文解	0.00194	0.0316	0.0235
	薄板解	0.00192	0.0332	0.0244
三边简支一边固支 图1(d)	本文解	0.0029	0.038	0.033
	薄板解	0.0028	0.039	0.034
三边固支一边简支 图1(e)	本文解	0.00160	0.0225	0.02633
	薄板解	0.00157	0.0236	0.02774
三边简支一边自由 图1(f)	本文解	0.00816	0.0800	0.039
	薄板解	0.00794	0.0799	0.039



(a) 实边界

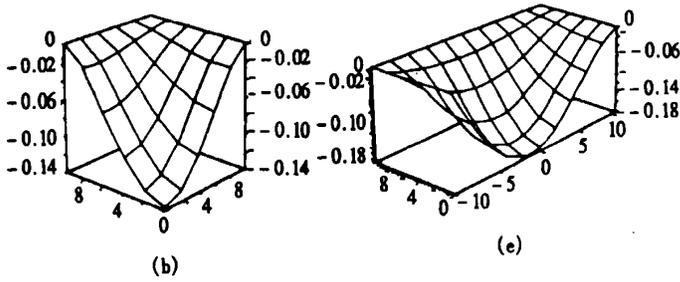
(b) 虚边界

图2 方板的1/4网格



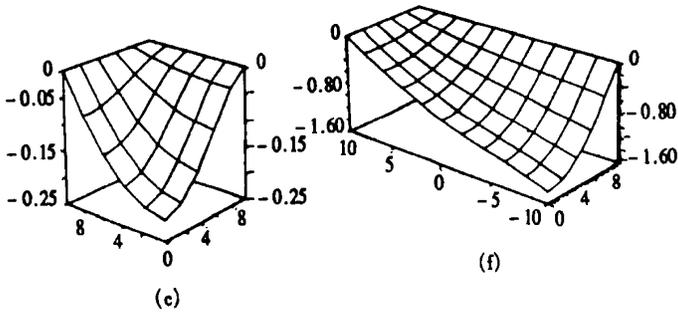
(a)

(d)



(b)

(e)



(c)

(f)

图3 方板的变形图

表2 各种支承状况下, 对称面处弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  的值(kg·cm/cm)

	图 1(a)	图 1(b)	图 1(c)	图 1(d)	图 1(e)	图 1(f)
(A) $M_x(x = 0)$						
$y = 0$	0 192 142 16D+ 05	0 856 877 58D+ 04	0 126 396 33D+ 05	0 153 434 33D+ 05	0 899 934 66D+ 04	0 320 182 61D+ 05
$y = 2$	0 184 299 42D+ 05	0 794 551 51D+ 04	0 121 814 46D+ 05	0 147 477 90D+ 05	0 827 421 05D+ 04	0 278 342 74D+ 05
$y = 4$	0 160 833 28D+ 05	0 607 597 26D+ 04	0 107 710 26D+ 05	0 129 421 61D+ 05	0 612 785 92D+ 04	0 226 550 11D+ 05
$y = 6$	0 122 001 47D+ 05	0 302 084 16D+ 04	0 834 909 39D+ 04	0 990 608 60D+ 04	0 268 441 20D+ 04	0 163 486 93D+ 05
$y = 8$	0 684 295 84D+ 04	0 105 489 80D+ 04	0 482 748 05D+ 04	0 561 188 31D+ 04	0 184 241 15D+ 04	0 882 973 67D+ 04
$y = 10$	0 143 382 39D+ 03	0 590 767 21D+ 04	0 149 982 15D+ 03	0 482 126 12D+ 02	0 716 178 68D+ 04	0 500 871 71D+ 02
(B) $M_y(y = 0)$						
$x = 0$	0 192 142 16D+ 05	0 856 877 83D+ 04	0 939 172 49D+ 04	0 133 945 77D+ 05	0 105 334 69D+ 05	0 157 700 15D+ 05
$x = 2$	0 184 299 43D+ 05	0 794 551 98D+ 04	0 856 973 37D+ 04	0 138 990 85D+ 05	0 916 947 58D+ 04	0 151 498 11D+ 05
$x = 4$	0 160 833 29D+ 05	0 607 597 48D+ 04	0 618 150 38D+ 04	0 127 646 96D+ 05	0 670 511 02D+ 04	0 132 655 93D+ 05
$x = 6$	0 122 001 47D+ 05	0 302 083 92D+ 04	0 239 540 38D+ 04	0 100 261 83D+ 05	0 319 256 96D+ 04	0 101 135 11D+ 05
$x = 8$	0 684 295 63D+ 04	0 105 489 96D+ 04	0 252 582 74D+ 04	0 576 119 19D+ 04	0 122 945 55D+ 04	0 570 293 50D+ 04
$x = 10$	0 143 381 89D+ 03	0 590 765 49D+ 04	0 825 901 26D+ 04	0 584 181 98D+ 02	0 632 592 06D+ 04	0 287 441 82D+ 02

表3 四边简支不同厚度方板中点的挠度、弯矩

$h/a$	$w(qa^4/D)$		$M_x(qa^2)$		$M_y(qa^2)$	
	文[6]解	本文解	文[6]解	本文解	文[6]解	本文解
0.005	0.004 437	0 004 063	0 047 89	0.047 89	0.047 89	0.047 89
0.010	0.004 438	0 004 065	0 047 89	0.047 90	0.047 89	0.047 90
0.050	0.004 485	0 004 110	0 047 92	0.047 93	0.047 92	0.047 93
0.100	0.004 631	0 004 250	0 048 04	0.048 04	0.048 04	0.048 04
0.200	0.005 218	0 004 805	0 048 48	0.048 50	0.048 49	0.048 50
0.300	0.006 194	0 005 738	0 049 23	0.049 27	0.049 24	0.049 27

例2 一矩形底可移简支双曲扁壳(见图4所示), 承受法向荷载

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

已知  $k_1 = 1/60$ ,  $k_2 = 1/80$ ;  $a = 3b/4 = 18$ ,  $E = 2.1 \times 10^9$ ,  $\mu = 0$ ,  $t = 0.15$ ,  $q_0 = 0.1$ 。计算结果见表4。利用对称性, 取四分之一计算, 实边界的单元划分见图4(b)。

## 5 结 论

1. 本文将弹性三维问题和各类板、壳问题采用了统一的简单的 Kelvin 基本解和统一的思想方法进行求解, 避免了各类板、壳方程基本解的复杂性和无基本解的困难。

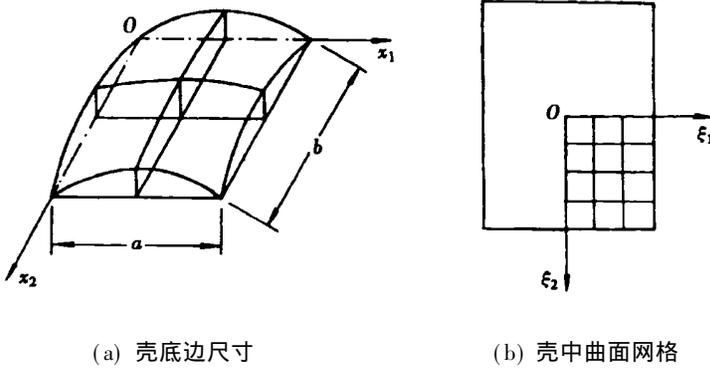


图 4 双曲扁壳

2. 直接引用弹性力学问题的 Kelvin 解, 而不是引用与各类板、壳方程相应的基本解, 从这点看, 本文方法的解更偏于实际解答。

3. 相对其它数值方法, 本文方法的程序通用性更强。又由于本方法对物体的几何形状无任何限制, 故可求解不同形状的等厚度和变厚度的板壳问题。另外, 本文方法还可应用于求解不同介质的组合体问题。

表 4 矩形底扁壳小挠度解(\* 文[7])

$w(\eta = 0)$			$M_x(\eta = 0)$			$N_x(\eta = 0)$		
$\xi = 0.0$	- 0.161 693 27D- 02	- 0.001 585*	$\xi = 0.0$	0.290 892 06D- 01	0.028 52*	$\xi = 0.0$	- 0.448 917 04D+ 01	- 4.474 5*
$\xi = 1.5$	- 0.155 647 98D- 02		$\xi = 3.0$	0.239 714 81D- 01	0.024 70*	$\xi = 3.0$	- 0.423 975 03D+ 01	- 3.875 0*
$\xi = 3.0$	- 0.135 435 27D- 02	- 0.001 373*	$\xi = 6.0$	0.189 925 37D- 01	0.020 17*	$\xi = 6.0$	- 0.228 143 28D+ 01	- 2.237 2*
$\xi = 4.5$	- 0.104 611 38D- 02		$M_y(\eta = 0)$			$N_y(\eta = 0)$		
$\xi = 6.0$	- 0.672 700 57D- 03	- 0.000 793*	$\xi = 0.0$	0.159 553 13D- 01	0.016 04*	$\xi = 0.0$	- 0.237 383 43D+ 01	- 2.516 9*
$\xi = 7.5$	- 0.295 080 64D- 03		$\xi = 3.0$	0.134 086 80D- 01	0.013 89*	$\xi = 3.0$	- 0.218 967 69D+ 01	- 2.179 7*
$\xi = 9.0$	0.000 000 00D+ 00	0.000 000*	$\xi = 6.0$	0.700 281 73D- 02	0.008 02*	$\xi = 6.0$	- 0.122 670 34D+ 01	- 1.258 4*

4. 与边界元直接法相比, 本方法的优点: 1) 避免了处理奇异积分的麻烦; 2) 消除了边界元直接法的边界层效应; 3) 形成的系数阵具有对称性, 节省了存储和计算时间。

5. 本文的思想在应用上具有扩展性, 它适合于解其他数学物理问题, 诸如位势或扩散问题、波动或动力问题、断裂问题等, 无论是各向同性还是各向异性, 不同的只是应按各自的基本解来建立方差泛函式。

## [参 考 文 献]

- [1] 许强, 孙焕纯. 厚壳三维分析的虚边界元最小二乘法[J]. 大连理工大学学报, 1996, 36(4): 413—418.
- [2] 许强, 孙焕纯. 虚边界元最小二乘配点法[J]. 计算力学学报, 1997, 14(2): 166—173.
- [3] 孙焕纯, 许强. 数理方程的虚边界元法及其与相关方法的关系[J]. 大连理工大学学报(博导专辑), 1999, 39(2): 183—190.
- [4] 许强, 孙焕纯. 板弯曲问题三维虚边界元分析[J]. 工程力学学报, 2000, 17(3): 23—30.

- [5] 许强, 戴月辉, 等. 虚边界元法解不同介质的组合结构[J]. 铁道学报, 2000, 增刊: 76—78.
- [6] 付宝连, 谭文锋. 求解厚矩形弯曲问题的功的互等定理法[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(4): 367—379.
- [7] Wang Y C, Ye J Q, Wang Z H. Spline boundary element method for shallow thin\_shells[A]. In: DU Qing\_hua Ed. Boundary Elements [C]. Beijing: Pergamon Press, 1986: 375—382.
- [8] Burges G J, Mahajerin E. A comparison of the boundary element and superposition methods[J]. Comput Structures, 1984, 19(2): 697—705.
- [9] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. Boundary Element Techniques Theory and Application in Engineering [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1984: 177—236.

## Unified Way for Dealing With Three\_Dimensional Problems of Solid Elasticity

XU Qiang<sup>1</sup>, SUN Huan\_chun<sup>2</sup>

( 1. Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, P R China ;  
2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian 116023, P R China )

**Abstract:** Unified way for dealing with the problems of three dimensional solid, each type of plates and shells etc. was presented with the virtual boundary element least squares method (VBEM). It proceeded from the differential equations of three dimensional theory of elasticity and employs the Kelvin solution and the least squares method. It is advantageous to the establishment of the models of a software for general application to calculate each type of three dimensional problems of elasticity. Owing to directly employing the Kelvin solution and not citing any hypothesis, the numerical results of the method should be better than any others. The merits of the method are highlighted in comparison with the direct formulation of boundary element method (BEM). It is shown that coefficient matrix is symmetric and the treatment of singular integration is rendered unnecessary in the presented method. The examples prove the efficiency and calculating precision of the method.

**Key words:** virtual boundary element; least squares method; unified way of elasticity