

文章编号: 1000\_0887(2001) 12\_1236\_07

# 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构 与全局复杂性研究( II)<sup>\*</sup>

马军海<sup>1</sup>, 陈予恕<sup>2</sup>

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072; 2 天津大学 力学系, 天津 300072)

(本刊编委陈予恕来稿)

**摘要:** 首先从一类复杂金融系统的数学模型出发, 在前期研究工作的基础上, 主要研究这一模型所反映的我国宏观金融系统运行中可能出现的各种情况: 平衡、稳定周期、分形、Hopf 分岔、参数与 Hopf 分岔之间的关系、直到混沌运动等。通过理论分析和数值模拟计算来研究模型中各参数的变化情况, 然后依此来分析这类金融系统局部产生复杂行为的条件, 以及某一参数的变化对宏观经济政策的调整及对整个金融系统行为的影响情况, 这一研究将有助于加深人们对各种金融政策杠杆作用的理解。

**关键词:** 金融系统; 分岔; 混沌; 拓扑结构; 全局复杂性

**中图分类号:** O175.14; O241.81      **文献标识码:** A

## 引 言

混沌是“确定性系统中的内在随机性”。确定性是因为它是由系统内部而不是外来扰动所产生的, 即系统内在随机性; 而随机性是指系统不规则的难以预测的行为, 混沌理论最吸引人的地方是它提供了一种方法去把复杂事物理解为自身内部某种有结构、有目的的行为, 而不是理解为外来的、偶然的、行为。经济学中的混沌现象自 1985 年被首次发现以来, 对当今西方主流经济学派产生了巨大的冲击, 因为经济系统中出现混沌现象意味着宏观经济运动本身具有内在的不稳定性<sup>[1~4]</sup>。政府虽然可以采取诸如财经政策或金融政策等宏观调控手段来进行干预, 但是干预的有效性是十分有限的<sup>[5~6]</sup>, 不稳定性和复杂性使精确的经济预测受到很大限制, 合理的预期行为也变得复杂起来<sup>[7~8]</sup>。分岔和混沌现象的深入研究是当前国际上非线性复杂连续动力系统的前沿研究课题。在金融、股票和社会经济领域中由于非线性因素的相互作用, 各种经济问题日趋复杂化与由低维向高维的演化过程, 系统的内在结构也呈现出多样性和复杂性<sup>[9~10]</sup>, 这类系统存在着极其复杂的现象与外在特征。因此, 系统深入地开展对这类复杂经济系统内在结构特征的研究, 通过研究系统的周期解的失稳、分岔、倍周期分岔、各分岔点值的位置、复杂系统进入混沌的道路, 从而揭示复杂现象发生的原因, 就变得越来越重要, 并

\* 收稿日期: 2000\_08\_30; 修订日期: 2001\_04\_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990510)

作者简介: 马军海(1965—), 男, 山东莱阳人, 教授, 博士, 已在国内外核心期刊发表论文 30 余篇, 主要研究方向: 复杂非线性动力系统、复杂混沌时序重构及其工程应用。

可在此基础上, 为对复杂连续经济系统的分析、预测与控制提供理论依据和实际操作的方法。

## 1 一类金融系统的数学模型

通过选取适当的坐标系和赋以各状态变量适当的量纲, 就可得到如下仅含 3 个最主要参数的更为简化的模型:

文献[2]给出了混沌金融系统的微分方程组模型见(1)式:

$$\dot{x} = z + (y - a)x, \quad \dot{y} = 1 - by - x^2, \quad \dot{z} = -x - cz, \quad (1)$$

其中  $a(\geq 0)$  为储蓄量,  $b(\geq 0)$  为单位投资成本,  $c(\geq 0)$  为商品需求弹性。下面我们对模型(1)的局部分岔拓扑结构进行研究。

当  $c - b - abc < 0$  时系统(1)有唯一平衡点  $P = (0, 1/b, 0)$ , 当  $c - b - abc \geq 0$  时系统(1)有三个平衡点  $q^\pm = (\pm \sqrt{(c - b - abc)/c}, (1 + ac)/c, \mp (1/c) \sqrt{(c - b - abc)/c})$  和  $P = (0, 1/b, 0)$ ; 关于  $c - b - abc < 0$  时系统(1)有唯一平衡点  $P = (0, 1/b, 0)$  的情况我们已在文献[11]中进行研究, 本文主要研究关于  $c - b - abc \geq 0$  时的情况。

## 2 局部拓扑结构与分岔混沌研究

下面研究当  $c - b - abc \geq 0$  时, 系统在平衡点  $P = (0, 1/b, 0)$ ,  $q^\pm$  的几何结构及其稳定性。

为了解系统(1)在这些临近的性态, 我们考察特征行列式:

$$-\det[Df(u) - \lambda J] = - \begin{vmatrix} -a + y - \lambda & x & 1 \\ -2x & -b - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = (c + \lambda)[(a - y + \lambda)(b + \lambda) + 2x^2] + (b + \lambda), \quad (2)$$

所以在  $P$  点的三个特征值  $\lambda_k = \lambda_k(p)$  分别为:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b, \\ \lambda_2 = [-(c + a - 1/b) - \sqrt{(c + a - 1/b)^2 - 4(ac - c/b + 1)}]/2, \\ \lambda_3 = [-(c + a - 1/b) + \sqrt{(c + a - 1/b)^2 - 4(ac - c/b + 1)}]/2. \end{cases} \quad (3)$$

情况 1 当  $c - b - abc \geq 0$  时,  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  但  $\lambda_3 > 0$ , 从而  $P$  成为鞍点, 结合  $c - b - abc < 0$  时各种情况, 这意味着系统(1)在  $c = b + abc$  时出现分岔; 注意到在  $c = b + abc$  时系统(1)还分岔出另外两个平衡点  $q^\pm$ , 对此我们有: 在  $q^-$  点对于方程(1)我们作变换:

$$\begin{cases} X = x - \sqrt{(c - b - abc)/c}, \\ Y = y - (1 + ac)/c, \\ Z = z + \sqrt{(c - b - abc)/c/c}. \end{cases} \quad (4)$$

代入(1)式则可得到:

$$\begin{cases} \dot{X} = X/c + XY + \sqrt{(c - b - abc)/c}Y + Z, \\ \dot{Y} = -X^2 - 2\sqrt{(c - b - abc)/c}X - bY, \\ \dot{Z} = -X - cZ. \end{cases} \quad (5)$$

于是将  $q^-$  点化为  $(0, 0, 0)$ , 由此可得:

$$\det(Df(q^-)) = \begin{vmatrix} 1/c & \sqrt{(c-b-abc)/c} & 1 \\ -2\sqrt{(c-b-abc)/c} & -b & 0 \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix}. \quad (6)$$

在  $q^+$  点, 可作类似变换, 于是可以得到:

$$-\det[Df(q^\pm) - M] = (1/c)[c\lambda^3 + (c^2 + bc - 1)\lambda^2 + (bc^2 + 2c - 3b - 2abc)\lambda + 2c(c - b - abc)]. \quad (7)$$

三个特征值分别为:  $\lambda_k = \lambda_k(q^\pm)$ , 则其满足:

$$\lambda_1(q^\pm) \lambda_2(q^\pm) \lambda_3(q^\pm) = -2(c - b - abc) < 0, \quad (8)$$

这里  $\lambda_k$  是按如下的次序排列的, 当  $a, b, c$  满足  $c - b - abc \leq 0$  变化到  $c - b - abc \geq 0$  时  $\lambda_k = \lambda_k(p)$  分别连续地变化到  $\lambda_k = \lambda_k(p)$ ,  $\lambda_k = \lambda_k(q^\pm)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . 由于当  $c - b - abc < 0$  时恒有  $\lambda_1(p) < 0$ ,  $\lambda_2(p) < 0$ , 由连续性知必有  $\operatorname{Re} \lambda_1(q^\pm) < 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_2(q^\pm) < 0$  (这里  $\lambda_1(q^\pm)$  和  $\lambda_2(q^\pm)$  可能成为复数), 由(8)式得  $\lambda_3(q^\pm) < 0$ . 因此  $q^\pm$  都是稳定的汇, 它们可能是结点或焦点. 因此当  $a, b, c$  满足  $c = b + abc$  时, 系统(1) 在  $c = b + abc$  时出现分岔, 其稳定的结点分岔出一双曲鞍点和两个稳定的汇, 这也就是 Pitchfork 分岔, 由此可见在  $c - b - abc \leq 0$  变化到  $c - b - abc \geq 0$  时吸引集  $A_p$  从单点集变成为连接  $P$  和  $q^\pm$  的两异缩轨道之并.

情况 2 接下来我们继续研究当  $c > b + abc$  并增长后的进一步的分岔现象, 由(3)式可知时当  $c > b + abc$  无论怎样变化都有:  $\lambda_1(p) < 0$ ,  $\lambda_2(p) < 0$ ,  $\lambda_3(p) > 0$ , 因此对于任何  $a, b, c$  满足  $c > b + abc$  时  $P$  点的结构始终是稳定的, 至于  $q^\pm$  由(8)式可见  $\lambda_k(q^\pm)$   $k = 1, 2, 3$  当  $c > b + abc$  发生变化时, 决不会经过复平面中的原点, 但是随着差值  $c - b - abc$  的进一步增大, 可能有  $\lambda_1(q^\pm)$  和  $\lambda_2(q^\pm)$  到达虚轴. 若  $\det[Df(q^\pm) - M] = 0$  有一对纯虚根  $\lambda_1(q^\pm)$  和  $\lambda_2(q^\pm)$  则必有:

$$\lambda_1(q^\pm) + \lambda_2(q^\pm) = 0, \quad \lambda_3(q^\pm) = -(c^2 + bc - 1)/c, \quad (9)$$

从而

$$-\det[Df(q^\pm) - M] = (\lambda + (c^2 + bc - 1)/c)(\lambda^2 + (bc^2 + 2c - 3b - 2abc)/c) + (2c - 3b - 2abc - bc^4 - b^2c^3 + 3b^2c + 2ab^2c^2)/c^2, \quad (10)$$

由此必有:

$$bc^4 + b^2c^3 - 2ab^2c^2 + (2ab - 2 - 3b^2)c + 3b = 0. \quad (11)$$

此时  $q^\pm$  的特征值分别为:

$$\begin{cases} \lambda_1(q^\pm) = i\sqrt{(bc^2 + 2c - 3b - 2abc)/c}, \\ \lambda_2(q^\pm) = -i\sqrt{(bc^2 + 2c - 3b - 2abc)/c}, \\ \lambda_3(q^\pm) = -(c^2 + bc - 1)/c. \end{cases} \quad (12)$$

在参数  $a, b, c$  的变化过程中  $\lambda_3(q^\pm) < 0$  始终没有改变. 所以由中心流形定理可见系统(1)的分岔现象只出现在  $\lambda_1(q^\pm)$  和  $\lambda_2(q^\pm)$  的特征向量所张成的中心流形中, 在此中心流形中  $q^\pm$  由稳定的焦点变成为不稳定的源, 因此系统(1) 在参数  $a, b, c$  满足(11)的临近出现 Hopf 分岔, 即在  $q^\pm$  的临近分岔出周期轨道, 对方程(11)而言假定参数  $a, b$  已知, 而  $c$  未知, 则  $c$  最多有 4 个根, 不妨记为:  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 满足:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = -b, \quad c_1c_2c_3c_4 = 3. \quad (13)$$

由(13)得  $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的根满足下列两种情况:

- a) 两个负根; 两个复数根, 此时不出现 Hopf 分岔.
- b) 两个负根; 两个正根  $ch_1$  和  $ch_2$ , 此时有可能出现两次 Hopf 分岔.
- c) 四个复数根, 此种情况下与实际情况不符我们不进行讨论.

### 3 数值结果

情况 1  $c - b - abc > 0$ , 若取  $a = 3, b = 0.2, c = 2$ , 同时取初值点  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 其 4 096 点的  $x-y$  相图如图 1(a);  $y-z$  相图如图 1(b);  $x-z$  相图如图 1(c);  $x-y-z$  相图如图 1(d); 数值计算结果表明: 系统在满足情况 1 的条件下的平衡点是汇, 与理论推导结果完全吻合.

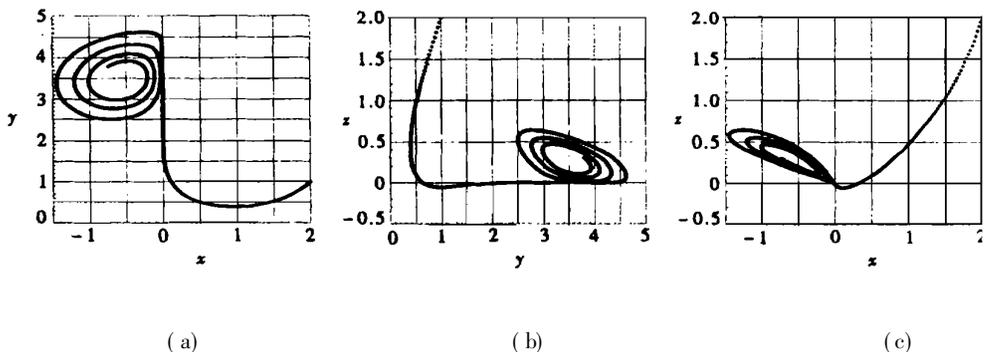


图 1

由(11)式可得, 当  $a = 3, b = 0.2, c > 0.5$  时系统才有可能产生 Hopf 分岔; 由(11)式,  $c$  只有 4 个虚根它们分别为:  $c_{1,2} = -1.20115828 \pm 1.30014665i, c_3 = 1.60618358, c_4 = 0.59613298$ ; 所以  $a = 3, b = 0.2$  时,  $c$  只有取  $c_3, c_4$  时系统才产生 Hopf 分岔.

情况 2  $c - b - abc > 0$ , 若取  $a = 3, b = 0.2, c = 1.60618358$  同时取初值点  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 其 4 096 点的  $x-y$  相图如图 2(a);  $y-z$  相图如图 2(b);  $x-z$  相图如图 2(c);  $x-y-z$  相图如图 2(d); 数值计算结果表

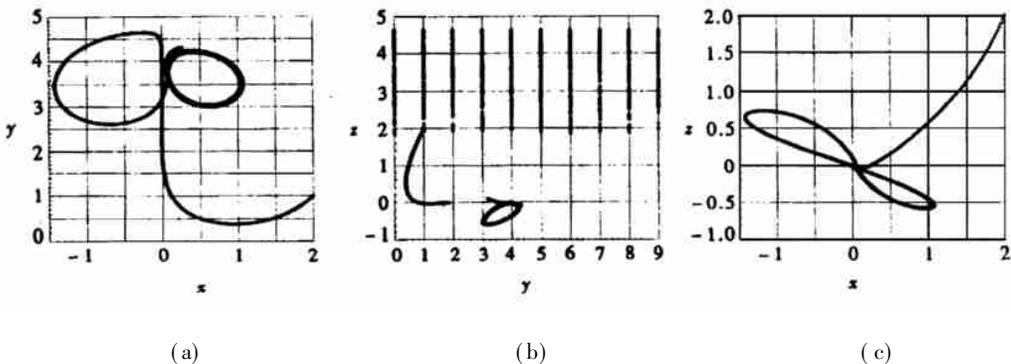


图 2

明: 系统(1) 在参数  $a = 3, b = 0.2, c = 1.606\ 183\ 58$  时的临近出现 Hopf 分岔, 与理论推导结果完全吻合.

若取  $a = 3, b = 0.2, c = 0.596\ 132\ 98$  同时取初值点  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 其 4 096 点的  $x_y$  相图如图 3(a);  $y_z$  相图如图 3(b);  $x_z$  相图如图 3(c);  $x_yz$  相图如图 3(d); 数值计算结果表明: 系统(1) 在参数  $a = 3, b = 0.2, c = 0.596\ 132\ 98$  时的临近出现 Hopf 分岔, 与理论推导结果完全吻合.

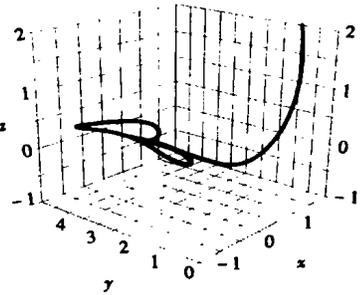
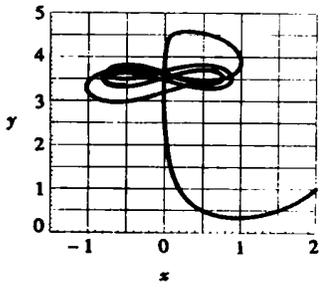
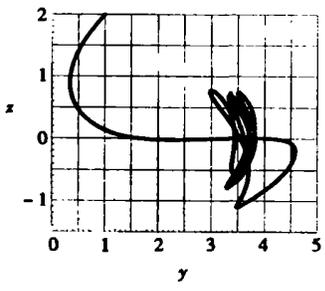


图 2 (d)

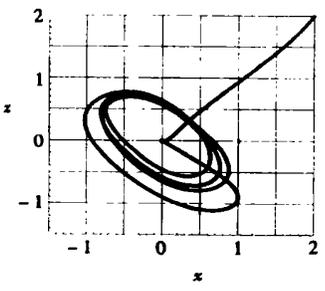
由(11) 式可得, 当  $a = 4.5, b = 0.163, c > 0.611\ 632\ 27$



(a)



(b)



(c)

图 3

时系统才有可能产生 Hopf 分岔, 由(11) 式  $c$  只有 4 个虚根其分别为:  $\tilde{c}_{1,2} = 1.198\ 272\ 222 \pm 1.177\ 831\ 39i, \tilde{c}_3 = 1.546\ 347\ 35, \tilde{c}_4 = 0.687\ 197\ 09$ , 所以  $a = 3, b = 0.2$  时,  $c$  只有取  $\tilde{c}_3, \tilde{c}_4$  时系统才产生 Hopf 分岔.

若取  $a = 4.5, b = 0.163, c = 1.546\ 347\ 35$  同时取初值点  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 其 4 096 点的  $x_y$  相图如图 4(a);  $y_z$  相图如图 4(b);  $x_z$  相图如图 4(c);  $x_yz$  相图如图 4(d); 数值计算结果表明: 系统(1) 在参数  $a = 3, b = 0.2, c = 1.546\ 347\ 35$  时的临近出现 Hopf 分岔, 与理论推导结果

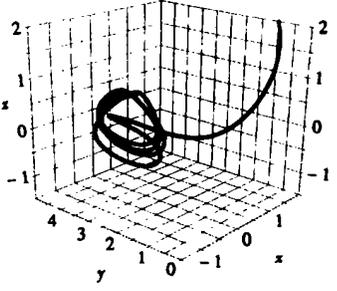
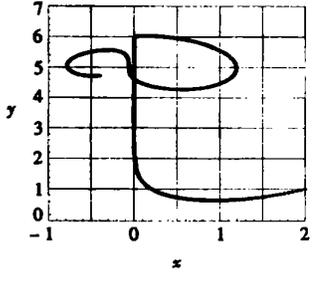
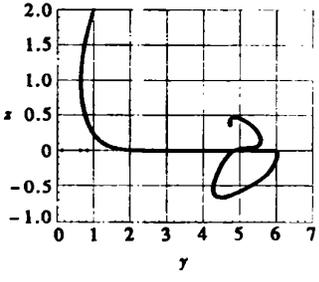


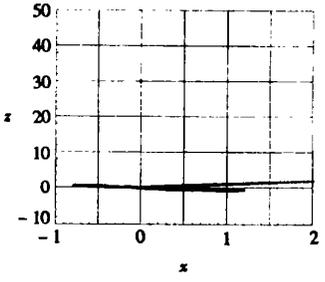
图 3 (d)



(a)



(b)



(c)

图 4

完全吻合。

若取  $a = 4.5$ ,  $b = 0.163$ ,  $c = 0.68719709$  同时取初值点  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ ,  $\Delta t = 0.01$ , 其 4 096 点的  $x_y$  相图如图 5(a);  $y_z$  相图如图 5(b);  $x_z$  相图如图 5(c);  $x_yz$  相图如图 5(d); 数值计算结果表明: 系统(1) 在参数  $a = 3$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.68719709$  时的临近出现 Hopf 分岔, 与理论推导结果完全吻合。

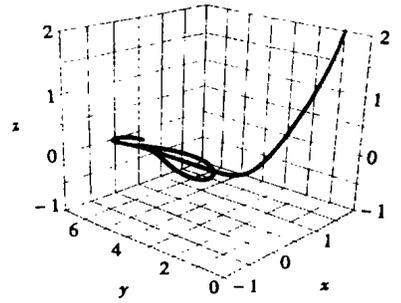
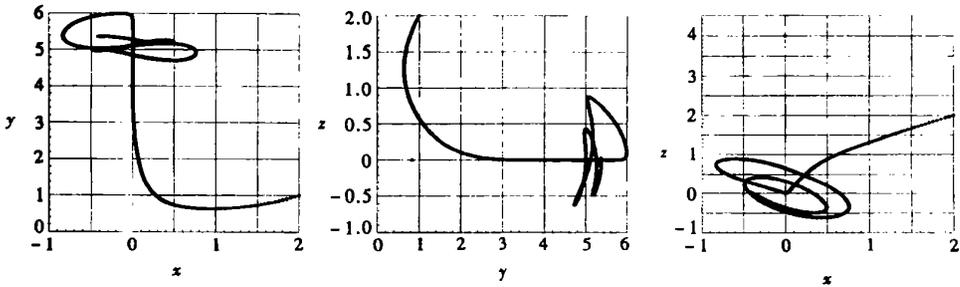


图 4 (d)

## 4 结 论

从上述的模拟结果可知, 首先, 系统中各参数不合适的组合是引起经济系统出现混沌的根源, 它有可能使系统趋向混沌而失控, 也有可能是系统陷于



(a)

(b)

(c)

图 5

停滞僵化的状态。因此, 无论在严重的通货膨胀时期, 还是在经济萧条时期, 转换机制、调整结构, 永远是金融系统改革的首要任务。其次, 变量的弹性不足会引起信息反馈的滞后, 只会给决策机构提供扭曲了的错误信号, 由此所造成的不良后果是可想而知的, 更严重的是这些不良后果还会以恶性循环的形式不断蔓延、扩大。所以, 适当地提高变量的弹性将有利于稳定经济, 有利于金融系统的正常运转。此外, 系统中储蓄额变量  $a$  也必须保持在一个适当的水平。上述的研究结果表明,  $a$  越小, 系统的波动越大,

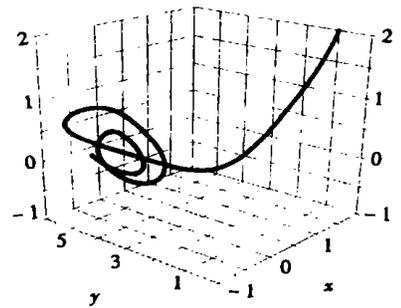


图 5 (d)

$a$  过于小时还会导致产生混沌的局面; 然而  $a$  也不能太大, 否则, 将使经济缺乏活力。

## [参 考 文 献]

- [1] 成思危. 复杂科学与管理[A]. 见: 成思危 编. 北京香山会议论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1998, 1—9.
- [2] 黄登仕, 李后强. 非线性经济学的理论和方法[M]. 成都: 四川大学出版社, 1993.
- [3] 陆启韶. 分岔与奇异性[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.
- [4] 李京文. 混沌理论与经济学[J]. 数量经济技术经济研究, 1991, 24(2): 19—26.

- [5] Brunella M, Miarim. Topological equivalence of a piecewise vector field with its principal part defined through Newton polyhedra[J]. J Differential Equations, 1990, **85**(6): 338—366.
- [6] Cima A, Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane[J]. J Math Anal Appl, 1990, **47**(4): 420—448.
- [7] Omer Morgul. Necessary condition for observer-based chaos synchronization[J]. Phys Rev Lett, 1999, **82**(9): 77—80.
- [8] 杨小京. 一类平面齐次多项式系统的局部相图[J]. 系统科学与数学, 1999, **19**(4): 150—156.
- [9] Clerc M, Coulet P, Tirapegui E. Lorenz bifurcation: instabilities in quasireversible systems[J]. Phys Rev Lett, 1999, **19**(11): 3820—3823.
- [10] Sengupta Jati K, Sfeir Raymond E. Nonlinear dynamics in foreign exchange markets[J]. International Journal of Systems Science, 1998, **29**(11): 1213—1224.
- [11] 马军海. 陈予恕. 一类金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I)[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1119—1128.
- [12] Freedman HI, Singh M, Easton A K, et al. Mathematical models of population distribution within a culture group[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1999, **29**(6): 257—267.
- [13] Lipton Lifschitz Alexander. Predictability and unpredictability in financial markets[J]. Phys D, 1999, **133**(12): 321—347.

## Study for the Bifurcation Topological Structure and the Global Complicated Character of a Kind of Non\_Linear Finance System( II )

MA Jun\_hai<sup>1</sup>, CHEN Yu\_shu<sup>2</sup>

(1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China;

2. Department of Mechancis, Tianjin University, Tianjin 300072, P R China)

**Abstract:** Based on the work discussed on the former study, this article first starts from the mathematical model of a kind of complicated financial system, and analyses all possible things that the model shows in the operation of our country's macro\_financial system balance, stable periodic, fractal, Hopf\_bifurcation, the relationship between parameters and Hopf\_bifurcation, and chaotic motion etc. By the changes of parameters of all economic meanings, the conditions on which the complicated behaviors occur in such a financial system, and the influence of the adjustment of the macro\_economic policies and adjustment of some parameter on the whole financial system behavior have been analyzed. This study will deepen people's understanding of the lever function of all kinds of financial policies.

**Key words:** stable periodic; bifurcation; chaotic; topological structure; global complicated character; finance system