应用数学和力学, 第 22 卷 第 12 期(2001 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1249_06

区间运算和静力区间有限元*

郭书祥[1], 吕震宙[2]

(1. 空军工程大学 工程学院 力学教研室, 西安 710038; 2. 西北工业大学 飞机工程系, 西安 710072)

(张汝清推荐)

摘要: 用均值和离差两参数表征区间变量的不确定性, 根据区间运算规则, 论证了区间变量的运算特性• 将区间分析和有限元方法相结合, 提出了非概率不确定结构的一种区间有限元分析方法• 将区间有限元静力控制方程中 n 自由度不确定位移场特征参数的求解归结为求解一 $2n$ 阶线性方程组• 实例分析表明文中方法是有效和可行的•

关 键 词: 区间运算; 区间变量; 有限元方法; 区间有限元
中图分类号: TB115; O242.29 文献标识码: A

引 言

在结构的分析和设计中, 需要合理地定量处理对结构响应和性能起支配作用的各种参量所存在的不可避免的不确定性• 概率理论在此领域曾发挥了重要作用• 得到了较为成功的应用• 随机有限元方法[1]成为不确定结构计算的最为普遍的方法• 但概率模型的应用需要较多的数据信息描述参数的概率分布, 且通常计算量较大• 而概率数据的小误差可能导致结构的概率计算出现较大误差[2,3]• 因而, 概率模型在统计数据较少或计算模型不够精确时, 不是一种理想的模型• 作为一种选择, Ben_Haim 和 Elshakoff[3~6]等提出了一种非概率的凸集模型或反优化模型• 它将不确定参量视为有界的, 将其包含在一凸集合中, 通过集合运算和优化计算, 求解结构响应所在范围• 类似思想被一些学者用于不确定结构的区间分析[7,8,9]• 当结构的不确定参量可用区间限界时, 将区间模型和传统的有限元方法相结合, 可建立起区间有限元方法• 区间形式的控制方程组的求解是其核心问题• 本文根据区间运算规则, 论证了区间变量的运算特性, 提出了不确定结构的一种静力区间有限元解法•

1 区间变量的运算特性

若结构的不确定参量 p 在某区间内变化, 其上、下界分别为 p^u、p^l, 则 $p \in P^I = [p^l, p^u]$ 称为区间变量• 令

$$p^c = (p^u + p^l)/2, \quad p^r = (p^u - p^l)/2, \tag{1}$$

则有

* 收稿日期: 1999_04_20; 修订日期: 2001_07_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59575040, 59775032)
作者简介: 郭书祥(1964—) , 男, 陕西商州人, 讲师, 博士.

$$p^{l}=p^{c}-p^{r},\ p^{u}=p^{c}+p^{r},\tag{2}$$

且区间 P^{I} 和变量 p 可分别表示为

$$P^{I}=p^{c}+p^{r}\Delta^{I},\ p=p^{c}+p^{r}\delta,\tag{3}$$

其中, $\Delta^{I}=[-1,1]$ 可称为标准化区间, $\delta\in\Delta^{I}$ 称为标准化区间变量• 显然, 任意实值区间 P^{I} 和区间变量 p 可由 p^{c} 和 p^{r} 两参数唯一确定• p^{c} 为区间数的算术平均值, 称为 P^{I} 或 p 的均值• p^{r} 表征了区间数相对于 p^{c} 的分散或偏离程度, 称为 P^{I} 或 p 的离差•

若所有实值区间的集合记为 IR, 所有非负和非正区间的集合分别记为 IR^{+} 和 IR^{-}• 可证明, 区间变量的运算具有如下特性•

定理 1 设 $X_i^{I}\in IR$, $x_i\in X_i^{I}$ 为任意不相关区间变量, $a_i\in R$ $(i=1,\cdots,n)$ 为任意实数•

令
$$y=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i,\tag{4}$$

则区间变量 y 的均值、离差分别为

$$y^{c}=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^{c},\ y^{r}=\sum_{i=1}^{n}|a_i|x_i^{r},\tag{5}$$

这里, x_i^{c}、x_i^{r} 分别为 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的均值和离差•

证明 将区间变量 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 写成如下标准化形式

$$x_i=x_i^{c}+x_i^{r}\delta_i,\tag{6}$$

这里, $\delta_i\in[-1,1]$• 令

$$y_i=a_i x_i=a_i(x_i^{c}+x_i^{r}\delta_i),\tag{7}$$

则由区间运算的性质[10]有

$$y_i^{l}=\begin{cases}a_i(x_i^{c}-x_i^{r}) & a_i\geqslant 0,\\ a_i(x_i^{c}+x_i^{r}) & a_i<0,\end{cases}\tag{8a}$$

$$y_i^{u}=\begin{cases}a_i(x_i^{c}+x_i^{r}) & a_i\geqslant 0,\\ a_i(x_i^{c}-x_i^{r}) & a_i<0,\end{cases}\tag{8b}$$

从而, 有

$$y_i^{l}=a_i x_i^{c}-|a_i|x_i^{r},\ y_i^{u}=a_i x_i^{c}+|a_i|x_i^{r},\tag{9}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}y^{l}&=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{l}=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^{c}-\sum_{i=1}^{n}|a_i|x_i^{r},\\ y^{u}&=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^{u}=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^{c}+\sum_{i=1}^{n}|a_i|x_i^{r},\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

故有(5)式成立•

定理 2 设 $X_i^{I}\in IR^{+}$ (或 $X_i^{I}\in IR^{-}$), $x_i\in X_i^{I}$ $(i=1,\cdots,n)$ 为任意不相关的非负(或非正)区间变量• 令

$$y_n=\prod_{i=1}^{n}x_i,\tag{11}$$

则区间变量 y_n 的均值和离差满足如下递推关系

$$\left.\begin{aligned}y_i^{c}&=y_{i-1}^{c}x_i^{c}\pm y_{i-1}^{r}x_i^{r}\\ y_i^{r}&=|y_{i-1}^{c}|\cdot x_i^{r}+y_{i-1}^{r}\cdot|x_i^{c}|\end{aligned}\right\}\quad(i=2,\cdots,n),\tag{12}$$

其中, x_i^c、x_i^r 分别为$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的均值和离差, $y_1^c=x_1^c$, $y_1^r=x_1^r$• 且当$y_{i-1}^c x_i^c\geqslant 0$时, "±" 中取"+" 号• 否则, 取"-" 号•

证明 当 $n=2$时, 记$X_i^I=[x_i^l, x_i^u]$, $i=1,2$• 令

$$y_2=x_1x_2, \tag{13}$$

由区间的乘法运算规则[10]可知, 当 $x_1,x_2\in IR^+$ 时, 有

$$Y_2^I=[x_1^lx_2^l, x_1^ux_2^u], \tag{14a}$$

$$y_2^c=[(x_1^c+x_1^r)(x_2^c+x_2^r)+(x_1^c-x_1^r)(x_2^c-x_2^r)]/2=x_1^cx_2^c+x_1^rx_2^r, \tag{14b}$$

$$y_2^r=[(x_1^c+x_1^r)(x_2^c+x_2^r)-(x_1^c-x_1^r)(x_2^c-x_2^r)]/2=x_1^cx_2^r+x_1^rx_2^c; \tag{14c}$$

当$x_1,x_2\in IR^-$ 时, 有

$$Y_2^I=[x_1^ux_2^u, x_1^lx_2^l], \tag{15a}$$

$$y_2^c=[(x_1^c-x_1^r)(x_2^c-x_2^r)+(x_1^c+x_1^r)(x_2^c+x_2^r)]/2=x_1^cx_2^c+x_1^rx_2^r, \tag{15b}$$

$$y_2^r=[(x_1^c-x_1^r)(x_2^c-x_2^r)-(x_1^c+x_1^r)(x_2^c+x_2^r)]/2=(-x_1^c)x_2^r+x_1^r(-x_2^c); \tag{15c}$$

当x_1、x_2之一为非负变量, 另一个为非正变量时, 不妨设$x_1\in IR^+$, $x_2\in IR^-$, 则有

$$Y_2^I=[x_1^ux_2^l, x_1^lx_2^u], \tag{16a}$$

$$y_2^c=[(x_1^c+x_1^r)(x_2^c-x_2^r)+(x_1^c-x_1^r)(x_2^c+x_2^r)]/2=x_1^cx_2^c-x_1^rx_2^r, \tag{16b}$$

$$y_2^r=[(x_1^c-x_1^r)(x_2^c+x_2^r)-(x_1^c+x_1^r)(x_2^c-x_2^r)]/2=x_1^cx_2^r+x_1^r(-x_2^c)• \tag{16c}$$

故当 $n=2$时, (12) 式成立• 由同样的推证过程和数学归纳法可知, 对任意正整数 n, (12) 式成立•

2 静力控制方程的求解

对线性静力问题, 当结构的不确定参量为区间变量时, 结构系统的区间有限元静力控制方程可表为

$$\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{F}, \tag{17}$$

或写成分量式为

$$\sum_{j=1}^{n}k_{ij}u_j=F_i \qquad (i=1,\cdots,n), \tag{18}$$

其中, $\boldsymbol{K}\in\boldsymbol{K}^I=([k_{ij}^l, k_{ij}^u])$ 为不确定结构的总体刚度矩阵, $\boldsymbol{F}\in\boldsymbol{F}^I=([F_i^l, F_i^u])$ 为可限界不确定载荷列向量• 在有限元方法中, 刚度矩阵的元素 k_{ij} 与材料参数和几何尺寸等有关• 这些基本参数取值非负• 当其在某非负区间变化时, 刚度矩阵的元素为区间变量• 其均值和离差可由基本参量的均值和离差按前述运算规则确定• 不确定位移 $\boldsymbol{u}$ 应满足$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{F}$ 的任意组合• 其解属于凸区域 C_u

$$C_u=\left\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{K}\in\boldsymbol{K}^I,\ \boldsymbol{F}\in\boldsymbol{F}^I\right\}• \tag{19}$$

(17) 或(18) 式的求解, 在于求解区域 C_u 的边界或特征参数• 其边界满足如下方程[7]

$$\boldsymbol{K}^I\boldsymbol{u}^I=\boldsymbol{F}^I, \tag{20}$$

其中, $\boldsymbol{u}^I=[\boldsymbol{u}^l, \boldsymbol{u}^u]$, 且这里

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}^l&=\min\left\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{K}\in\boldsymbol{K}^I,\ \boldsymbol{F}\in\boldsymbol{F}^I\right\},\\ \boldsymbol{u}^u&=\max\left\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{Ku}=\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{K}\in\boldsymbol{K}^I,\ \boldsymbol{F}\in\boldsymbol{F}^I\right\}•\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

假设 $u_i(i=1,\cdots,n)$ 的波动范围不包括零，即 u_i^{l}、u_i^{u} 同号，由(18)式，可建立如下方程组

$$\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} k_{ij}^{l} u_j^{l}(-k_{ij}^{u} u_j^{u}) + k_{ii}^{l} u_i^{u} = F_i^{u},\quad \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} k_{ij}^{u} u_j^{u}(-k_{ij}^{l} u_j^{l}) + k_{ii}^{u} u_i^{l} = F_i^{l}. \tag{22}$$

在求和表达式中，若某项非负，则取括号外的项。否则，取括号内的项。将上式转换到用均值和离差两参数表示，并写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{c} & \boldsymbol{K}_1^{r} \\ \boldsymbol{K}_2^{r} & \boldsymbol{K}_e^{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}^{c} \\ \boldsymbol{u}^{r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}^{c} \\ \boldsymbol{F}^{r} \end{Bmatrix}, \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{F}^{c}$ 为均值载荷列向量，$\boldsymbol{F}^{r}$ 为载荷离差向量。$\boldsymbol{K}^{c}=(k_{ij}^{c})$ 为结构的均值刚度阵，$\boldsymbol{K}^{r}=(k_{ij}^{r})$ 为刚度离差阵。$\boldsymbol{K}_e^{c}$ 和 $\boldsymbol{K}_1^{r}$、$\boldsymbol{K}_2^{r}$ 的所有元素可分别由 $\boldsymbol{K}^{c}$ 和 $\boldsymbol{K}^{r}$ 的对应元按一定的符号规则确定。其中，$\boldsymbol{K}_e^{c}$ 中各元素 k_{eij}^{c} 与 $\boldsymbol{K}^{c}$ 的对应元 k_{ij}^{c} 的绝对值相等，其对角元 k_{1ii}^{c} 为正，其余元均为负；$\boldsymbol{K}_1^{r}$ 和 $\boldsymbol{K}_2^{r}$ 中各元素的绝对值与 $\boldsymbol{K}^{r}$ 的对应元 k_{ij}^{r} 相等。其对角元均为负，其余元素中，与 $u_i>0$ 对应的 k_{1ij}^{r} 与 k_{ij}^{c} 同号，其余反号；$\boldsymbol{K}_2^{r}$ 中除对应于 $u_i<0$ 的元 k_{2ij}^{r} 为正外，其余为负。按此规则，可确定(23)式中的系数矩阵。解此方程组即可求得位移的均值向量 $\boldsymbol{u}^{c}$ 和离差向量 $\boldsymbol{u}^{r}$。从而可得

$$\boldsymbol{u}^{l}=\boldsymbol{u}^{c}-\boldsymbol{u}^{r},\quad \boldsymbol{u}^{u}=\boldsymbol{u}^{c}+\boldsymbol{u}^{r}. \tag{24}$$

当仅考虑载荷不确定性时，线性区间有限元的静力控制方程可写为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}, \tag{25}$$

其中，总体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为确定性的。从而可得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}, \tag{26}$$

这里 $\boldsymbol{K}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为确定性的。由区间变量的线性运算特性(式(5))，有下式成立

$$\boldsymbol{u}^{c}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}^{c},\quad \boldsymbol{u}^{r}=|\boldsymbol{G}|\boldsymbol{F}^{r}, \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{u}^{c}$、$\boldsymbol{u}^{r}$ 和 $\boldsymbol{F}^{c}$、$\boldsymbol{F}^{r}$ 分别为位移和载荷的均值、离差向量。$|\boldsymbol{G}|=(|G_{ij}|)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的所有元素取其绝对值。当 $\boldsymbol{F}$ 中各元素不相关时，由(27)式可求得位移的准确界限。且不受外载荷和位移波动范围的限制。

3 算例分析

图1所示为一6杆桁架结构[7]。其参数为：材料弹性模量 $E=2.1\times10^{8}\ \mathrm{kN/m^2}$，$L=1.0\ \mathrm{m}$。①、②、③、④号杆的横截面积为 $A_i=1.0\times10^{-3}\ \mathrm{m^2}(i=1,2,3,4)$。⑤⑥号杆的横截面积为一区间 $A^{I}=[1.0\times10^{-3},1.1\times10^{-3}]\ (\mathrm{m^2})$。作用载荷向量为 $\boldsymbol{F}=\left\{P,2P,2.5P,-1.5P\right\}$。其中，$P^{I}=[20,21]\ (\mathrm{kN})$。为便于比较，每根杆作为一个单元。可得结构的总刚度阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} \frac{E_1A_1}{L_1}+0.36\frac{E_5A_5}{L_5} & -0.48\frac{E_5A_5}{L_5} & \frac{E_1A_1}{L_1} & 0 \\ -0.48\frac{E_5A_5}{L_5} & \frac{E_3A_3}{L_3}+0.36\frac{E_5A_5}{L_5} & 0 & 0 \\ \frac{E_1A_1}{L_1} & 0 & \frac{E_1A_1}{L_1}+0.36\frac{E_6A_6}{L_6} & 0.48\frac{E_6A_6}{L_6} \\ 0 & 0 & 0.48\frac{E_6A_6}{L_6} & \frac{E_4A_4}{L_4}+0.36\frac{E_6A_6}{L_6} \end{bmatrix}.$$

由区间变量的运算规则易得其均值矩阵和离差阵分别为

$$\boldsymbol{K}^{c}=\begin{bmatrix}42\,938 & -10\,584 & -35\,000 & 0\\ -10\,584 & 40\,362 & 0 & 0\\ -35\,000 & 0 & 42\,938 & 10\,584\\ 0 & 0 & 10\,584 & 40\,362\end{bmatrix}\times 10(\mathrm{N/mm}),$$

$$\boldsymbol{K}^{r}=\begin{bmatrix}378 & 504 & 0 & 0\\ 504 & 672 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 378 & 504\\ 0 & 0 & 504 & 672\end{bmatrix}\times 10(\mathrm{N/mm})\cdot$$

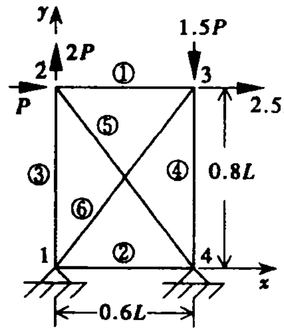

图 1　6 杆桁架结构

载荷的均值和离差向量分别为

$$\boldsymbol{F}^{c}=\{20\,500,\ 41\,000,\ 51\,250,\ -30\,750\}^{T}(\mathrm{N}),\ \boldsymbol{F}^{r}=\{500,\ 1\,000,\ 1\,250,\ 750\}^{T}(\mathrm{N})\cdot$$

文中方法和区间摄动法[7]计算结果的比较如表 1 所示•

表 1　结构不确定位移的特征量　mm

	区间摄动法[7]			本文方法		
	u^{c}	u^{r}	u^{I}	u^{c}	u^{r}	u^{I}
u_{2x}	0.86	0.17	[0.69, 1.03]	0.877 8	0.142 3	[0.735 5, 1.020 1]
u_{2y}	0.33	0.07	[0.26, 0.40]	0.334 5	0.056 3	[0.278 2, 0.390 8]
u_{3x}	0.90	0.17	[0.73, 1.07]	0.914 8	0.141 8	[0.773 0, 1.056 6]
u_{3y}	−0.31	0.07	[−0.38, −0.24]	−0.317 1	0.045 2	[−0.362 3, −0.271 9]

由表 1 可看出, 文中方法所求得的结果比区间摄动法的结果更优• 实际上, 文中方法所求得的位移区间相对于区间方程组(20)式应该是准确的• 相对于原问题(17)式则是偏于保守的•

4　结 束 语

区间有限元静力控制方程为区间变量的运算关系• 本文用均值和离差两参数表征区间变量的不确定性• 根据区间运算规则, 论证了区间变量的运算特性• 将区间分析和传统的 FEM 相结合, 提出了非概率不确定结构的一种区间有限元分析方法• 将区间有限元静力控制方程中 n 自由度不确定位移特征参数的求解归结为求解一 $2n$ 阶线性方程组• 其系数矩阵的所有元素可由均值刚度矩阵和刚度离差阵的对应元素按一定的符号规则确定• 其总体刚度矩阵的形成、装配和求逆均可借助确定性 FEM• 其求解过程较为简便• 计算量小, 精度高• 文中的运算规则和方法也可推广用于确定应力区间变量的特征参数• 文中方法的应用需先判断各自由度位移的正负号, 且只适用于位移变化范围的上下界同号的情况• 一般, 各自由度位移的符号可由均值方程(刚度阵和载荷向量的所有元素取均值)预先确定• 当位移的上下界不同号, 或不易判断时, 可通过载荷分解利用叠加法解•

[参 考 文 献]

[1] 郭书祥, 冯元生, 吕震宙. 随机有限元方法和结构可靠性[J]. 力学进展, 2000, **30**(3): 343—350.

[2] Ben_Haim Y. A non_probabilistic concept of reliability[J]. Structural Safety, 1994, **14**(4): 227—245.

[3] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A M Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. Computers & Structures, 1995, **56**(6): 871—895.

[4] Ben_Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier Science, 1990.

[5] Ben_Haim Y. Convex models of uncertainty in radial pulse buckling of shells[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, **60**(3): 683—688.

[6] Elishakoff I, Elisseeff P, Glegg S A L. Non_probabilistic, convex_theoretic modeling of scatter in material properties[J]. AIAA Journal, 1994, **32**(4): 843—849.

[7] Qiu Z, Elishakoff I. Anti_optimization of structures with large uncertain_but_non_random parameters via interval analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, **152**(3_4): 361—372.

[8] Koylouglu H U, Cakmak A S, Nielsen S R K. Interval algebra to deal with pattern loading and structural uncertainties[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1995, **121**(11): 1149—1157.

[9] Rao S S, Berke L. Analysis of uncertain structural system using interval analysis[J]. AIAA Journal, 1997, **35**(4): 727—735.

[10] Alefeld G, Claudio D. The basic properties of interval arithmetric, its software realizations and some applications[J]. Computers & Structures, 1998, **67**(1/3): 3—8.

Interval Arithmetic and Static Interval Finite Element Method

GUO Shu_xiang[1], LÜ Zhen_zhou[2]

(1. Faculty of Mechanics, Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, P R China;

2. Department of Aircraft Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P R China)

Abstract: When the uncertainties of structures may be bounded in intervals, through some suitable discretization, interval finite element method can be constructed by combining the interval analysis with the traditional finite element method (FEM). The two parameters, median and deviation, were used to represent the uncertainties of interval variables. Based on the arithmetic rules of intervals, some properties and arithmetic rules of interval variables were demonstrated. Combining the procedure of interval analysis with FEM, a static linear interval finite element method was presented to solve the non_random uncertain structures. The solving of the characteristic parameters of n_freedom uncertain displacement field of the static governing equation was transformed into $2n$_order linear equations. It is shown by a numerical example that the proposed method is practical and effective.

Key words: interval variable; interval arithmetic; finite element method; interval finite element method