

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1278-07

# 同伦算法在并联机器人运动学中的应用\*

董 滨<sup>1</sup>, 张祥德<sup>2</sup>

(1. 东北大学 数学系, 沈阳 110006; 2 中国科学院 机器人学开放研究实验室, 沈阳 110003)

(钟万勰推荐)

摘要: 讨论同伦算法求解并联机器人运动学正问题。通过参系数同伦法大大减少了跟踪路径的数目, 从而提高了同伦算法的效率使之对求解一般非线性代数方程组更为可行。采用这一算法, 求出了中科院沈阳自动化研究所机器人开放研究实验室的新型并联机器人模型的全部正解。为新模型的机构分析和实时控制提供了理论依据。

关键词: 同伦算法; 并联机器人运动学; 一般同伦法; 参系数同伦法

中图分类号: TP24 文献标识码: A

## 引 言

同伦算法作为求解非线性代数方程组的数值方法近年来被广泛应用于求解非线性代数系统。尤其在机器人运动学求解方面被广泛地采用。文献[1]应用它求解串联机器人运动学逆问题, 文献[2]应用它求解并联机器人运动学正问题。由于同伦算法是通过同伦映射从初始方程组的解出发跟踪曲线从而得到所求的目标方程组的解。因而根据初始方程组的不同构造方法同伦算法被分为一般同伦法, 系数同伦法和参数同伦法。

一般同伦法由于构造初始方程组简单且容易实现而多被采用, 但当方程组的次数较高时相应的跟踪路径的数目较大(即使采用多元齐次变换有时跟踪路径的数目仍较大)导致一般同伦法的计算量很大。文献[3, 4]给出了减少跟踪路径提高计算效率的改进同伦算法, 本文在此基础上给出一种大大减少跟踪路径的参系数同伦法。它对求解一般的非线性代数方程组更快且更可行。

下面我们以求解并联机器人运动学正问题为例说明这一同伦算法在求解非线性方程组中的应用。

令  $F(q, \theta)$  代表并联机器人正问题的非线性代数方程组。这里  $q = (p_x, p_y, p_z)$  代表在  $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向的位移矢量,  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$  代表绕  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的旋转矢量, 记  $u = (q, \theta)$ 。

令  $G(u)$  代表一初始方程组, 它和  $F(u)$  具有同样的代数结构但容易求解。

定义:

\* 收稿日期: 1999\_05\_05; 修订日期: 2001\_06\_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19701006); 教育部普通高等学校骨干教师资助计划; 辽宁省、沈阳市科学基金资助项目

作者简介: 董滨(1969—), 女, 哈尔滨人, 讲师, 硕士, 研究方向为非线性方程组求解。

$$H(\mathbf{u}, t) = (1-t)e^{i0}G(\mathbf{u}) + tF(\mathbf{u}) \quad (1)$$

注意到  $t = 0$  时,  $H(\mathbf{u}, t) = 0$  的解恰好是  $G(\mathbf{u}) = 0$  的解, 在  $t = 1$  时它的解又正好是  $F(\mathbf{u}) = 0$  的解. 由于  $F$  和  $G$  有同样的代数结构, 所以跟踪  $H(\mathbf{u}, t) = 0$  从 0 到 1 的解, 我们就能得到  $F(\mathbf{u}) = 0$  的解.

首先根据目标方程组的特点采用参系数同伦法构造初始方程组. 然后解此方程组. 这时由于参系数同伦法构造的初始方程组可通过消元法化简直接求解或采用一般同伦法求出它的解. 这样从初始方程组的解出发通过同伦映射(1)跟踪路径我们就能得到所求的目标方程组的全部解.

对上述系统采用一般同伦法至少需要跟踪 256 条同伦路径. 而采用参系数同伦法只需跟踪 20 条同伦路径. 计算效率大大提高. 采用这一方法我们求出了一新型并联机器人模型正问题的全部解, 为新模型的机构分析和实时控制提供了依据. 而这一新模型是中科院沈阳自动化研究所机器人开放研究实验室新近提出的获得国家专利的并联机器人模型. 它对并联机器人的研究具有重要的理论和现实意义.

## 1 参系数同伦法

参系数同伦法是以初始方程组与目标方程组的系数参数构造同伦的方法. 令  $F(c, x)$  代表方程组. 这里  $c$  表示方程组的系数.  $x$  表示变量. 如果有参数  $q = (q_1, \dots, q_s)$  使得  $c = c(q)$  则  $F(c, x) = F(c(q), x)$ .

现令  $F(c(q^1), x)$  代表所求的目标方程组,  $F(c(q^0), x)$  代表初始方程组. 由(1)构造同伦:

$$H(x, t) = F(c[(1-t)q^0 + tq^1], x), \quad (2)$$

这里  $\gamma = e^{i0}$ . 这样构造的同伦称为参系数同伦.

例 设一目标方程组为:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1 \quad (3)$$

用参系数同伦构造(3)的初始方程组我们可选第一个方程  $xy$  的系数等于 2, 其余二方程和(3)相同. 也即

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad x^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

由于在方程组(3)的第一个方程中添加  $2xy$  项并不改变方程组的 Bezout 数因此这样构造初始方程组是合理的. 而且由于(4)的第一方程的化简使得初始方程组的解容易求得.

下面给出参系数同伦法的理论依据.

定理 有一稠密开子集  $Q_0 \subseteq Q$ , 使得如果  $q^0 \in Q_0$ ,  $q^1 \in Q_1$ , 并且  $S$  是  $f(c[q^0], x) = 0$  在  $P^n$  的非奇异解的集合, 则初始点在  $S$  且  $(x, t) \in P^n \times [0, 1]$  的同伦

$$h(x, t) = f(c[(1-t)q^0 + tq^1], x) \quad (5)$$

在  $P^n$  中有光滑的并且  $t$  随着弧长增加而增加的同伦路径, 路径的终点包含了  $f(c[q^1], x) = 0$  的全部孤立零点.

(定理证明参见文献[5])

这里初始方程组的解集  $S$  中解的个数可以小于方程组的次数(或多元齐次化方程组的 Bezout 数). 由于求解目标方程组的跟踪路径的数目等于初始方程组解的数目, 因此参系数同伦法可以直接减少跟踪路径的数目. 至于求解初始方程组  $f(c[q^0], x) = 0$  的解, 由于初始方

程组的化简可以直接求得,或采用一般同伦法求得。

## 2 参数同伦法求解并联机器人运动学正问题

下面以中科院沈阳自动化研究所机器人开放研究实验室的新型4自由度并联机器人机床为例说明参数同伦法在求解非线性方程组中的应用。

新模型的机构如图1,其中杆长 $L_1, L_2, L_3, L_4$ 固定不变。它们的上端与可以沿 $z$ 轴滑动的滑块相连。它们的下端与旋转关节连接。其中与 $L_1, L_2$ 相连的关节可以绕 $x$ 轴 $y$ 轴旋转,与 $L_3, L_4$ 相连的关节只能绕 $y$ 轴旋转。这样通过滑块位移 $H_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 带动末端刀具运动。在末端刀具下面是一可以沿 $y$ 方向移动的工作平台。

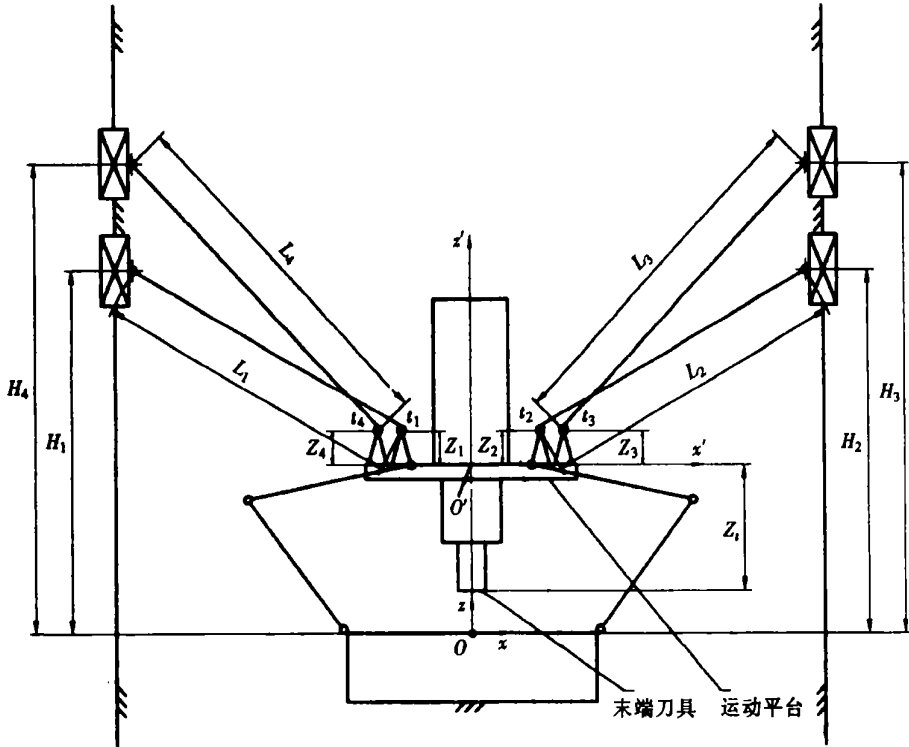


图1 新4\_Dof 并联机器人模型

用D\_H 矩阵法建立的正问题的运动学方程如下:

$$f_i = -L_i^2 + (H_i - p_z + c_1 s_2 x_i - s_1 y_i - c_1 c_2 Z_i - c_1 c_2 z_i)^2 + (-s_1 s_2 x_i + Y_{si} - c_1 y_i + c_2 s_1 z_i)^2 + (-p_x + X_{si} - c_2 x_i - s_2 Z_i - s_2 z_i)^2 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

$$f_j = -L_j^2 + (Y_{sj} - y_j)^2 + (H_j - p_z + s_2 x_j - c_1 c_2 Z_i - c_2 z_j)^2 + (-p_x + X_{sj} - c_2 x_i - s_2 Z_i - s_2 z_i)^2 \quad (j = 3, 4), \quad (7)$$

$$f_5 = c_1^2 + s_1^2 - 1, \quad (8)$$

$$f_6 = c_2^2 + s_2^2 - 1, \quad (9)$$

这里  $c_1 = \cos \alpha, s_1 = \sin \alpha, c_2 = \cos \beta, s_2 = \sin \beta$ 。

给定机构参数见表1。



续表 2

№		$c_1$	$s_1$	$c_2$	$s_2$	$p_x$	$p_z$
3	Re	- 0.970 5	1.157 4	- 0.999 87	0.000 926	- 0.667 24	14 016 8
	Im	0.867 443	0.727 3	0.023 45	- 0.291 25	- 0.071 36	1.315 5
4	Re	- 0.970 45	1.157 4	- 0.999 87	0.000 926	- 0.667 24	14 016 8
	Im	- 0.867 44	- 0.727 3	- 0.023 45	0.291 25	0.071 356	- 1.315 5
5	Re	- 0.862 18	- 0.508 11	2.640 8	- 2.116 47	- 3.941 9	- 6.316
	Im	- 0.019 91	0.033 79	2.021 97	2.522 9	- 5.206 5	- 0.441 9
6	Re	- 0.862 18	- 0.508 11	2.640 8	- 2.116 47	- 3.941 9	- 6.316
	Im	0.019 91	- 0.033 79	- 2.021 97	- 2.522 9	5.206 5	0.441 9
7	Re	- 0.803 85	- 0.613 59	1.642 9	- 1.137 4	5.448 75	22.33
	Im	- 0.091 4	0.119 776	0.984 76	1.422 4	- 6.400 7	3.133
8	Re	- 0.803 85	- 0.613 59	1.642 9	- 1.137 4	5.448 75	22.33
	Im	0.091 4	- 0.119 78	- 0.984 76	- 1.422 4	6.400 7	- 3.133
9	Re	- 0.778 7	- 0.629 44	0.112 46	- 1.406 85	1.948 3	- 4.498 7
	Im	0.031 88	- 0.039 44	0.992 76	0.079 4	- 0.420 2	- 0.953 05
10	Re	- 0.778 7	- 0.629 44	0.112 46	- 1.406 85	1.948 3	- 4.498 7
	Im	- 0.031 88	0.039 44	- 0.992 76	- 0.079 4	0.420 2	0.953 05
11	Re	- 0.232 97	- 1.385 4	0.999 01	0.055 2	0.508 145	8.021 4
	Im	0.973 03	- 0.163 63	0.001 81	0.032 68	- 0.046 36	1.514 9
12	Re	- 0.232 97	- 1.385 4	0.999 01	0.055 2	0.508 145	8.021 4
	Im	- 0.973 03	0.163 63	- 0.001 81	- 0.032 68	0.046 36	- 1.514 9
13	Re	0.090 7	- 1.374 53	0.978 05	0.219 4	- 2.841	18.479 6
	Im	- 0.945 34	- 0.062 38	- 0.015 05	0.067 1	- 0.241 2	- 1.347 83
14	Re	0.090 7	- 1.374 53	0.978 05	0.219 4	- 2.841	18.479 6
	Im	0.945 34	0.062 38	0.015 05	- 0.067 1	0.241 2	1.347 83
15	Re	0.993 405	- 2.053 4	1.855 46	- 0.936 9	5.357	18.631 4
	Im	- 0.034 48	- 0.166 82	- 0.821 35	- 1.626 62	8.812	- 0.705 3
16	Re	0.993 405	- 2.053 4	1.855 46	- 0.936 9	5.357	18.641 4
	Im	0.034 48	0.166 82	0.821 35	1.626 62	- 8.812	0.705 3
17	Re	0.996 7	- 0.083 07	0.975 8	- 3.707 26	3.094 57	0.188 85
	Im	0.001 529	0.018 3	3.578 9	0.942 017	- 5.906 88	- 9.800 03
18	Re	0.996 7	- 0.083 07	0.975 8	- 3.707 26	3.094 57	0.188 85
	Im	- 0.001 53	- 0.018 3	- 3.578 9	- 0.942 02	5.906 88	9.800 03
19	Re	1.000 33	0.010 43	1.647 3	- 1.391 79	- 1.303 85	- 0.893 47
	Im	- 0.000 85	0.081 96	- 1.233	- 1.459 5	0.331 15	4.876 98
20	Re	1.000 33	0.010 43	1.647 3	- 1.391 79	- 1.303 85	- 0.893 47
	Im	0.000 852	- 0.081 96	1.233	1.459 5	- 0.331 15	- 4.876 98

这里  $H_1 = 11, H_2 = 13, H_3 = 13, H_4 = 10$  (单位: dm)

## 4 结 论

并联机器人运动学正问题一般归结为求解多项式方程组,是并联机器人研究的基础和难点,利用同伦法求解并联机器人正问题是目前普遍采用的有效的数值方法。与一般同伦法相比,本文采用参系数同伦法构造初始方程组,大大减少了跟踪路径的数目从而显著地提高了计算效率。而且由于初始方程组具有与所求方程组更为相似的代数结构和容易求解的特点,它提高了运算速度。另外由于并联机器人正问题是关于三角函数的高次非线性方程组,采用这一方法可直接化非线性方程组为多项式方程组,而无需经过万能公式代换,进一步大大减少了计算量。因此参系数同伦算法是求解并联机器人正问题的更快更可行的数值方法。

采用这一方法,对中科院沈阳自动化研究所的并联机器人新模型运动学正问题求解,只需跟踪 20 条同伦路径,而采用一般同伦法,则至少需要跟踪 256 条同伦路径。同样对文献[2]的一般 STWART 并联机器人模型,只需跟踪 40 条路径就得到相应正问题的全部解。而文中的一般同伦法需要跟踪 768 条路径。

由于许多实际问题都归结为求解非线性代数方程组,如文献[4]中的求几何交点问题、化学平衡问题等等。而运用参系数同伦法总可以找到适当的初始方程组,从而减少跟踪路径的数目,因此参系数同伦法作为求解非线性代数方程组的数值方法,将会得到更广泛的应用。

### [参 考 文 献]

- [1] Tsai L W, Morgan A P. Solving the kinematics of the most general six\_and\_five\_degree\_of\_freedom manipulators by continuation methods[J]. ASME Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, 1989, **107**: 189—200.
- [2] 刘安心, 杨廷力. 求一般 6\_SPS 并联机器人机构的全方位正解[J]. 机械科学与技术, 1996, **15** (7): 543—546.
- [3] Morgan A P, Wampler C W. Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, **112**(3): 59—68.
- [4] Morgan A P, Sommese A J. Computing all solutions to polynomial systems using homotopy continuation[J]. Appl Math Comput, 1987, **24**: 115—138.
- [5] Morgan A P, Sommese A J. Coefficient parameter polynomial continuation[J]. Appl Math Comput, 1989, **29**: 123—160.
- [6] 王则柯, 高堂安. 同伦方法引论[M]. 重庆: 重庆出版社, 1990, 123—178.
- [7] Merlet J P. An algorithm for the forward kinematics of general parallel manipulators[A]. In: International Conference on Advanced Robotics [C]. Hse, June, 1991, 1131—1135.
- [8] Merlet J P. Algebraic Geometry tools for the study of kinematics of parallel manipulators[A]. In: J Angeles et al Eds. Computational Kinematics, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993, 183—194.
- [9] Merlet J P. Direct Kinematics and assembly modes of parallel manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 1992, **11**: 150—162.
- [10] Nanua P, Waldron K J, Murthy V. Direct kinematics solution of a stewart platform[J]. IEEE Trans Robotics Automation, 1990, **6**: 438—444.
- [11] Raghavan M, Roth B. Kinematic analysis of the 6\_R manipulator of general geometry[A]. In: 5th Int Symp of Robotics Research [C]. Tokyo, 1990, 263—270.
- [12] 赵明扬. 一种衍架结构数控机床[P]. 中国专利: 98121062. 7, 1998.

## Continuation Method Applied in Kinematics of Parallel Robot

DONG Bin<sup>1</sup>, ZHANG Xiang\_de<sup>2</sup>

( 1. Department of Mathematics, Northeastern University, Shenyang 110006, P R China;

2. Robot Open Laboratory of Science Institute of China, Shenyang 110003, P R China )

**Abstract:** Continuation method solving forward kinematics problem of parallel robot was discussed. And through a coefficient\_parameter continuation method the efficiency and feasibility of continuation method were improved. Using this method all forward solutions of a new parallel robot model which was put forward lately by Robot Open Laboratory of Science Institute of China were obtained. Therefore it provided the basis of mechanism analysis and real\_time control for new model.

**Key words:** continuation method; parallel robot kinematics; generic continuation; coefficient\_parameter continuation