

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1285-06

轴对称断裂动力学问题的自相似解^{*}

吕念春¹, 程 靳¹, 程云虹², 屈德志³

(1. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001; 2. 东北大学 土木工程系, 沈阳 110006;
3. 大庆建筑安装工程集团公司 压力容器制造厂, 大庆 163711)

(樊大钧推荐)

摘要: 通过复变函数论的方法, 对复合材料的圆盘状裂纹的轴对称性扩展问题进行研究. 采用自相似方法, 并根据任意的自相似指数的断裂动力学问题, 进行自相似求解, 导出解析解的一般表示. 应用该法可以迅速地将所论问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 并可以相当简单地得到问题的闭合解. 利用这些解并采用叠加原理, 就可以求得任意复杂问题的解.

关键词: 圆盘状裂纹; 轴对称性; 复合材料; 解析解

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

大量的复合材料在宏观上可看作是正交异性材料, 由这些复合材料组成的层状材料、组合物料、及各类结构易出现圆盘形裂纹、微观裂纹, 裂纹逐渐扩展并导致结构失稳, 丧失结构的承载能力, 因此研究圆盘形裂纹的扩展问题具有重要意义. 对这类静力学问题已有许多人进行了研究, 但这一类动力学问题, 由于数学上的困难, 人们研究得还远远不够深入. 文献[1~3]虽对圆盘形裂纹进行了研究, 但研究的是非复合材料, 且受到非均匀内部压力作用. 本文对平面问题的扩展裂纹的断裂动力学问题进行了深入研究, 利用复变函数论的方法给出解的一般表示. 应用该法可以很容易地将所论问题转化为 Riemann-Hilbert 问题, 而后一问题容易用通常的 Muskhelishvili 方法^[4]求解. 本文应用该法对阶梯载荷等情况下的扩展裂纹问题给出解的表示.

1 正交异性体弹性动力学方程及推导

利用轴对称与平面问题之间的旋转迭加关系, 对具有任意自相似指数的空间轴对称弹性动力学问题在引入自相似函数后, 将文献[5]各向同性平面问题的自相似解推广到轴对称问题之中去, 推导出了用自相似函数表达的解的一般公式. 应用这些公式可以简单而有效地得到轴对称自相似问题的闭合解, 利用这些解应用迭加原理就可以求得任意复杂轴对称问题的解. 本文对不同情况进行研究, 并利用广义函数求得了解. 用脚标表示与轴对称相应的二维问题的量, 则由旋转迭加得^[6]:

* 收稿日期: 1999_10_08; 修订日期: 2001_06_29

作者简介: 吕念春(1965—), 男, 辽宁朝阳人, 讲师, 博士, 主要从事复合材料断裂动力学研究.

$$u = \int_0^{2\pi} u_0(r \cos \theta, z) \cos \theta d\theta, \quad v = \int_0^{2\pi} v_0(r \cos \theta, z) d\theta, \quad u_0 \equiv 0, \quad (1)$$

$$\alpha_r = \int_0^{2\pi} \left\{ \sigma_{\alpha r} - 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \sin^2 \theta \right\} d\theta, \quad (2)$$

$$\alpha_\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \sigma_{\alpha \theta} + 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \sin^2 \theta \right\} d\theta, \quad (2)$$

$$\alpha_z = \int_0^{2\pi} \sigma_{\alpha z} d\theta, \quad \tau_{rz} = \int_0^{2\pi} \tau_{\alpha rz} \cos \theta d\theta, \quad \tau_{rz} = \tau_z \theta = 0, \quad (3)$$

其中 $x = r \cos \theta$ 。我们取

$$\zeta_k = \frac{r \cos \theta \cdot t - iz \sqrt{t^2 - c_k^{-2}(r^2 \cos^2 \theta + z^2)}}{r^2 \cos^2 \theta + z^2} \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

式中: c_1, c_2 是纵、横波速, 且 $c_1 > c_2$ 。

在 $x\alpha z$ 平面以 ζ_k 为变量的任意解析函数的实部及虚部都满足波动方程。这表明当轴对称问题是齐次或者经过有限次求导或积分后是齐次时, 其相应的平面问题可用函数不变解方法求解, 该解可以从单一复变量的解析函数理论推广到 Riemann_Hilbert 边值问题。下面我们导出一些简单而实用的自相似公式。

1. 应力是齐次

将文献[1]给出的解代入(3)式得:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_z &= \mu \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{c_1^2}{c_2^2} [f_1(\zeta_1) + f_6(\zeta_2)] - 2f_6(\zeta_1) + 2f_2(\zeta_2) \right\} d\theta, \\ \tau_{rz} &= \mu \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [2f_3(\zeta_1) + f_4(\zeta_2) + f_5(\zeta_2)] d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $f_1 \sim f_6$ 的 4 个方程同文献[5] 中的(1.21), 而 u, v 可类似得到(见该文献[5] 中的(1.19))。

2. 位移是齐次

当位移是齐次时, 根据文献[1]及(1)、(3)式得:

$$u = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [f_1(\zeta_1) + f_2(\zeta_2)] \cos \theta d\theta, \quad v = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [f_3(\zeta_1) + f_4(\zeta_2)] d\theta, \quad (6)$$

$$\alpha_z = \mu \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(c_2^{-2} - 2\zeta_1^2) \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}}{\zeta_1(z\zeta_1 - r \cos \theta) \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}} f_1'(\zeta_1) + \frac{2\zeta_2 \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}}{z\zeta_2 - r \cos \theta \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}} f_2'(\zeta_2) \right] d\theta, \quad (7)$$

$$\tau_{rz} = \mu \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2(c_2^{-2} - \zeta_1^2)}{z\zeta_1 - r \cos \theta \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}} f_1'(\zeta_1) + \frac{c_2^{-2} - 2\zeta_2^2}{z\zeta_2 - r \cos \theta \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}} f_2'(\zeta_2) \right] \cos \theta d\theta. \quad (8)$$

3. 位移势是齐次

当位移势是齐次时, 采用上面类似的方法得出 $u, v, \alpha_z, \tau_{rz}$, 这里不再赘述。

可见无论应力、位移、位移势是齐次时, 轴对称问题都仅包括二个未知的复变函数。现考虑如下函数:

$$\frac{d^k f_s(r)}{dr^k} \frac{df_g(t)}{dt^e}, f_i(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi & \xi > 0, \end{cases} \quad (9)$$

式中 k, s, e, h 为任意正整数。由于以 r, t 为变量的函数一般可表示为(9)式的线性组合来一致逼近, 因而若能求解端点以常速运动的具有(9)式形式的载荷或位移问题的解有原则上的意义, 复杂条件下弹性动力学轴对称问题的解可通过叠加得到。现引入线性微分算子及反演:

$$L = \frac{\partial^{m+n}}{\partial r^m \partial t^n} = \cos \theta L' \quad \text{反演为} \quad L' = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} \quad (10)$$

上式中负指数表示积分, 其绝对值表示积分的重数, 零指数表示函数本身。 L' 为平面上的算子。容易证明^[7, 8], 必存在 m, n , 使(10)中的 L 作用于(1)、(3)式后得:

$$\left. \begin{aligned} Lu &= \int_0^{2\pi} \cos^m \theta L' v_0 d\theta, \quad Lu = \int_0^{2\pi} \cos^m \theta L' u_0 d\theta, \\ L\alpha_z &= \int_0^{2\pi} \cos^m \theta L' \alpha_{z2} d\theta, \quad L\tau_r = \int_0^{2\pi} \cos^{m+1} \theta L' \sigma_{\alpha z} d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上面式中 $m = k - s, n = e - g$ 为自相似指数。由 L' 性质可知:

当 Lu, Lv 是齐次时, 只需将 u, v, α_z, σ_r 换作 $Lu, Lv, L\alpha_z, L\sigma_r$, 则式(5)仍然成立。

当 $L\alpha_z, L\sigma_r$ 为齐次时, 只需将 u, v, α_z, σ_r 换作 $Lu, Lv, L\alpha_z, L\sigma_r$, 则式(6) ~ (8) 仍然成立。

这样对于具有任意自相似指数的空间轴对称问题都可用本文公式来求解, 为了更进一步研究, 将条件简化为 $z = 0, \tau_z = 0$ 的问题, 然后将(10)和(11)式代入(5) ~ (8)式, 很容易得出如下的一般结论:

$$\alpha_z^0 = \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{(c_2^{-2} - 2\zeta_1^2)^2}{z\zeta_1 - r \cos \theta \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}} W'(\zeta_1) + \frac{4\zeta_2^2(c_2^{-2} - \zeta_2^2)}{z\zeta_2 - r \cos \theta \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}} W'(\zeta_2) \right] \cos^m \theta d\theta, \quad (12)$$

$$\tau_{rz}^0 = \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2\zeta_1(c_2^{-2} - 2\zeta_1^2) \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}}{z\zeta_1 - r \cos \theta \sqrt{c_1^{-2} - \zeta_1^2}} W'(\zeta_1) - \frac{2\zeta_2(c_2^{-2} - 2\zeta_2^2) \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}}{z\zeta_2 - r \cos \theta \sqrt{c_2^{-2} - \zeta_2^2}} W'(\zeta_2) \right] \cos^{m+1} \theta d\theta, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} u^0 &= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [U_1(\zeta_1) + U_2(\zeta_2)] \cos^{m+1} \theta d\theta, \\ v^0 &= \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} [V_1(\zeta_1) + V_2(\zeta_2)] \cos^m \theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 U_1, U_2, V_1, V_2 与 W' 之间的关系见文献[5]中的(1.32)式, 因而(12) ~ (14)中仅有一个未知函数 W' 。

当 Lu, Lv 是齐次时, 令

$$u^0 = Lu, \quad v^0 = Lv, \quad \alpha_z^0 = L\alpha_z, \quad \tau_{rz}^0 = L\tau_z, \quad (15)$$

当 $L\alpha_z$ 为齐次时, 令

$$u^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lu, \quad v^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lv, \quad \alpha_z^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\alpha_z, \quad \tau_{rz}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L\tau_z. \quad (16)$$

当位移势是齐次时, 令

$$u^0 = \int_0^{2\pi} u dt, \quad v^0 = \int_0^{2\pi} v dt, \quad \sigma_z^0 = \int_0^{2\pi} \sigma_z dt, \quad \tau_{rz}^0 = \int_0^{2\pi} \tau_{rz} dt \quad (17)$$

在 $z = 0$ 上, $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = t/r \cos \theta$, 而后我们取 $\xi = \zeta^2$, 那么在 $z = 0$ 上将有 $\xi = t^2/r^2 \cos^2 \theta, \xi_0 = t^2/r^2$, 将之代入(12) ~ (14) 式后则得到用单一自相似函数表达的解:

$$\left. \begin{aligned} v^0 &= \sqrt{\xi_0} \operatorname{Re} \int_{L\xi} W(\xi) \cdot (\xi_0/\xi)^{m/2} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\xi - \xi_0}}, \\ \sigma_z^0 &= -\frac{2\mu c_2^2}{r} \operatorname{Re} \int_{L\xi} \frac{R(\xi) W'(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}} \cdot (\xi_0/\xi)^{m/2} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \xi_0}}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$R(\xi) = (c_2^{-2} - 2\xi)^2 + 4\xi \sqrt{c_1^{-2} - \xi} \sqrt{c_2^{-2} - \xi} \quad (19)$$

这里: $R(\xi)$ 是 Rayleigh 函数。

我们还引入了应力自相似函数

$$\left. \begin{aligned} F'(\xi) &= \frac{R(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}} W'(\xi), \\ \sigma_z^0 &= -\frac{2\mu c_2^2}{r} \operatorname{Re} \int_{L\xi} F'(\xi) \times \\ &\quad (\xi_0/\xi)^{m/2} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\xi - \xi_0}} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

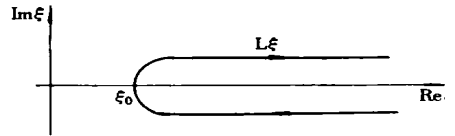


图 1 圆盘形积分线路示意图

对于(20)式中的积分路线 $L\xi$ 如图1所示, 我们规定 $\sqrt{c_1^{-2} - \xi}, \sqrt{c_2^{-2} - \xi}$ 取算术根, 在 $\xi \rightarrow 0$ 时有 $\sqrt{\xi - \xi_0} = i\xi_0$, 则(18)、(20) 式中的积分在去掉沿实轴正向的切口后是解析的。下面我们应用这些公式求解受阶梯载荷的圆盘状运动裂纹。

2 阶梯载荷作用下问题的解

假定在 $t = 0$ 时复合材料包含一圆盘状裂纹, 在 $z = 0$ 平面上以速度 V (小于声速) 开始轴对称扩展, 且中心在坐标原点。裂纹面受到沿圆盘状裂纹径向方向上以 $\alpha < V$ 速度运动的轴对称阶梯载荷, 载荷大小为 $-p, -q$ 。当 $t < 0$ 时, 半平面静止, 然后裂纹开始扩展, 问题的边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -p, \quad r < \alpha; \quad \sigma_z = -q, \quad \alpha < r < Vt, \\ v &= 0, \quad Vt < r; \quad \tau_{rz} = 0, \quad z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

当 $z = 0$ 时, 在所有 r 上有 $\tau_{rz} = 0$, 则(21) 式可用广义函数论^[7] 改写为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -p + (p - q)H(r^2 - \alpha^2 t^2), \quad \xi_0 > V^2, \\ v &= 0, \quad \xi_0 < V^2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用对称性、无穷远条件及裂纹尖端的奇异性^[8,9] 可知, 在复平面区间上 $L\xi$ 必为纯实量。即 $\operatorname{Im}\xi = 0$, 式中 H 为阶跃(Heavyside) 函数, 本问题应力是齐次, 因而有:

$$\begin{aligned} \sigma_z^0 &= -(p - q)2t\alpha^2 \cdot \delta(r^2 - \alpha^2 t^2) = \\ &= -2\alpha^2 t^{-1}(p - q) \delta(\xi_0^{-1} - \alpha^2) \quad \xi_0 < V^2, \end{aligned} \quad (23)$$

这里 δ 为(Dirac) δ_{ξ} 函数, 利用 δ_{ξ} 函数的性质^[7], 由(23) 式可得:

$$\sigma_z^0 = \operatorname{Re} \frac{-2(p - q)\xi_0}{\pi t(\alpha^{-2} - \xi_0)} i = \frac{2(p - q)\xi_0}{t} \delta(\xi_0 - \alpha^{-2}) \quad \xi_0 < V^2. \quad (24)$$

由 δ_{ξ} 函数的性质可知, 只需满足下述二个条件则边界条件一定满足, 首先: 当 $\xi_0 > V^2$

时, $f(\xi_0)$ 无奇点且 $\text{Im}f(\xi_0) = 0$ 其次: 当 $f(\alpha^{-2}) = p - q$ 时, 我们选取 $0.5\sigma_z^0 \xi_0^{1/2} = \text{Re}[i \cdot f(\xi_0) \pi^{-1} (\xi_0 - \alpha^{-2})^{-1}]$, 则边界条件必然满足, 这就使 σ_z^0 脱出了(24)式的约束。本问题中的自相似指数 $m = 0$, 由(20)式, 并利用裂纹尖端的奇异性, 注意到 $\xi_0 > V^{-2}$ 时取两个不同的常数值, 因而可唯一确定 $F'(\xi)$ 解的形式为:

$$F'(\xi) = \frac{R(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}(V^{-2} - \xi)^2} \left[A + \frac{B}{\pi(\xi_0 - \alpha^{-2})} \right]. \quad (25)$$

将(25)式代入到(20)、(18)式即得在 $z = 0$ 上的应力、位移:

$$\sigma = -\mu c_2^2 \text{Re} \int_0^{r^2/r^2} \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0}} \int_{L\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi_0}} \frac{R(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}(V^{-2} - \xi)^2} \times \left[A + \frac{B}{\pi(\xi_0 - \alpha^{-2})} \right] d\xi \quad (26)$$

$$v = \frac{r}{2} \text{Re} \int_0^{r^2/r^2} \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0}} \int_{L\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi_0}(V^{-2} - \xi)} \left[A + \frac{B}{\pi(\xi_0 - \alpha^{-2})} \right] d\xi. \quad (27)$$

由于 $f(\xi_0) = -\frac{\mu c_2^2 B}{\sqrt{\xi_0}} \int_{L\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi_0}} \frac{(c_2^{-2} - 2\xi)^2 - 4\xi \sqrt{(\xi - c_1^{-2})(\xi - c_2^{-2})}}{\sqrt{\xi - c_1^{-2}}(V^{-2} - \xi)^2} d\xi,$

而后利用 $f(\alpha^{-2}) = p - q$, 即可确定实常数 B , 由边界条件得:

$$\left. \begin{aligned} A &= (q/\mu c_2^2 - BJ_2)/J_1 \quad \text{且} \quad V^{-2} < M < \alpha^{-2}, \\ J_1 &= \text{Re} \int_0^M \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0}} \int_{L\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi_0}} \frac{R(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}(V^{-2} - \xi)^2} d\xi \\ J_2 &= \text{Re} \int_0^M \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0}} \int_{L\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi - \xi_0}} \frac{R(\xi)}{\sqrt{c_1^{-2} - \xi}(V^{-2} - \xi)^2 \pi(\xi_0 - V^{-2})} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

3 结 论

通过复变函数的方法建立了复合材料圆盘形裂纹动力学模型的解析解, 采用自相似函数的途径能够获得正交各向异性体圆盘形裂纹动力学模型的具体解, 这可以认为是弹性理论研究的相似类型的动力学问题。

[参 考 文 献]

- [1] Charepanov G P. Mechanics of Brittle Fracture [M]. New York: McGraw_Hill International Book Company, 1979.
- [2] Kostrov B V. The axisymmetric problem of propagation of a tension crack[J]. J Appl Math Mech, 1964, 28(4): 793—803.
- [3] Kostrov B V. Self-similar problems of propagation of shear cracks[J]. J Appl Math Mech, 1964, 28(5): 1077—1087.
- [4] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations [M]. Moscow: Nauka, 1968.
- [5] Charepanov G P, Afanasov E F. Some dynamic problems of the theory of elasticity—A review[J]. Int J Engng Sci, 1970, 12(5): 665—690.
- [6] Erigen A C, Suhubi E S. Elastodynamics, Vol 2, Linear Theory [M]. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975.
- [7] Hoskins R F. Generalized Functions [M]. New York: Ellis Horwood, 1979.

- [8] Sih G C. Mechanics of Fracture 4. Elastodynamics Crack Problems [M]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977, 213—247.
- [9] Kanwal R P, Sharma D L. Singularity methods for elastostatics[J]. J Elasticity, 1976, 6(4): 405—418.

Self-Similar Solutions of Fracture Dynamics Problems on Axially Symmetry

LÜ Nian_chun¹, CHENG Jin¹, CHENG Yun_hong², QU De_zhi³

(1. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute
of Technology, Harbin 150001, P R China;

2. Department of Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, P R China;

3. Compressive Vessel Manufacturer of Constructive Installation Group Company
of Daqing, Daqing 163711, P R China)

Abstract: By the theory of complex functions, a penny-shaped crack on axially symmetric propagating problems for composite materials was studied. The general representations of the analytical solutions with arbitrary index of self-similarity were presented for fracture elastodynamics problems on axially symmetry by the ways of self-similarity under the ladder-shaped loads. The problems dealt with can be transformed into Riemann-Hilbert problems and their closed analytical solutions are obtained rather simple by this method. After those analytical solutions are utilized by using the method of rotational superposition theorem in conjunction with that of Smimov-Sobolev, the solutions of arbitrary complicated problems can be obtained.

Key words: penny-shaped crack; axially symmetric; composite materials; analytical solutions