

文章编号: 1000-0887(2001) 12-1299-10

柔长结构气固耦合的线性与非线性气动力理论*

徐 旭^{1, 2}, 曹志远²

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;
2. 同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092)

(程昌钧推荐)

摘要: 针对柔性结构与风在三方向相互作用的特点, 在合理的结构节段力学模型的基础上, 建立了新的气动力模型, 即三分力系数 $C_i = C_i(\beta(t), \theta)$, ($i = D, L, M$) 不仅是瞬时攻角的函数, 而且也是转速的函数, 并依据“片条理论”与改进的“准静态理论”, 提出了推导结构节段模型与风相互作用的线性与非线性气动力项的方法, 从而将土木工程中柔性结构与风的相互作用的线性与非线性理论集中到一个模型中。对于线性气动力部分, 给出了与经典气动力公式中相对应的颤振导数的半解析表达式。对于非线性气动力部分, 给出了扭转气动耦合的非线性气动力表达式, 并给出了 Tacoma 大桥扭转非线性运动的控制方程, 其形式与结果与 V. F. Bhm 的相吻合。

关键词: 非线性气动力; 耦合作用; 颤振导数

中图分类号: TU311.3; O321 文献标识码: A

引 言

随着风场中的柔性结构(如大跨度桥梁、高耸结构)柔性的增加, 其由于非定常气动力而产生的相互作用力进一步增强, 因此, 如何解决柔性结构的气动弹性问题, 关系重大。柔性结构的气动弹性现象, 不仅包括稳定性问题, 如颤振、驰振和发散; 还包括结构响应问题, 如旋涡激振和抖振。作为柔性结构的代表之一, 大跨度桥梁的气动弹性研究涉及到方方面面的安全, 因此桥梁设计之初就要通过风洞实验, 并合理选择桥梁断面以避免颤振的出现, 并在建成的桥梁上采用有效的途径, 如装上调质阻尼器(TMD), 以控制并减少抖振量。

很显然, 通过 Navier-Stokes 方程和结构运动控制方程来求解土木工程中的气动弹性问题, 不是一种高效的方法, 因此, 人们提出了各种工程分析方法。关于桥梁的稳定性研究, 较成熟且被普遍接受的是 Scanlan 教授提出的颤振导数方法^[1, 2], 若还要考虑脉动风的影响, 则有 Y. K. Lin 提出的随机稳定性分析方法^[3, 4]; 关于桥梁的抖振研究, 有 Scanlan 提出的颤抖振方法^[5]和 Davenport 提出的随机谱分析方法^[6]。但这些方法只能用于处理线性气动力问题, 而不能直接推广到非线性自激力的分析。以上研究方法中的颤振导数目前一般是通过风洞实验测试取得的, 由于系统参数识别方法的一些缺陷和实验手段的限制, 测试所需的花费较大, 且能得到

* 收稿日期: 2000_09_06; 修订日期: 2001_07_06

作者简介: 徐旭(1968—), 男, 江苏南通人, 讲师, 博士, 主要从事固体力学和柔性结构风致响应研究。

的颤振导数也还是有限的。

尽管人们也曾利用空气动力学理论,尤其是 Theodorsen 函数,推导了薄机翼截面或平板的颤振导数的一些表达式,或基于经典的三分力系数 $C_Y(\alpha)$ (其中 $Y = D, L, M$), 得到了颤振导数的准静态表达式,但推导的方法是不统一的^[7, 8],而且没有计入非线性效应。因而柔性结构与风的相互作用的基础理论研究,特别是桥梁的颤振导数的研究并未停止过,人们试图建立一个完整的气动力模型,以解决风与结构的相互作用问题。Piccardo 和 Solarì^[9, 10] 首先建立了三方向完全耦合的气动力模型, E. Strimmen 和 E. Hiorth_Hansen^[11] 在这样的模型基础上推导出了结构受任意方向来流风作用下的抖振力,但他们都没有处理好非线性气动力问题, J. L. V. Brito 和 J. D. Riera^[12] 则给出考虑位移与速度影响的线性气动力表达式,但却没有指出如何推导坐标 x, y 的函数 ϕ_x 和 ϕ_y , 无法直接运用到具体问题的分析中。

基于这样的现状,并依据“片条理论”,本文建立了三方向完全耦合的气动模型,从而将线性与非线性气动力统一到一个模型中,并推导出风场中节段模型的 12 个颤振导数的半解析表达式。可以相信,本文的研究一方面对风洞实验技术作了理论的补充,另一方面可用于柔性结构,如大跨度结构以及土木工程中的其它圆柱型截面结构的风振耦合振动研究。

1 非线性气动力及其模型

正如 Scanlan^[1]所指出的,在颤振导数的测量时,就已发现非线性气动力的存在,但为了处理问题的方便,将气动力作了线性处理。事实上,涉及到非线性气动力研究的主要是裹冰输电线路和其它柔长钝体的驰振(Parkinson^[13]和 Novak^[14])和考虑时间滞后效应的非线性气动稳定问题(V. F. Blum^[15])。但前者的非线性气动力是通过用速度与位移的比值去拟合 $C_L(\alpha)$ 和 $C_D(\alpha)$ (α 攻角)而得到的,因此这是一种近似,并且只是研究了横风向振动;而后者的研究只是考虑了由于横风向位移与转动引起的气动力的叠加,而且也只是研究了横风向运动与扭转运动耦合的非线性气动稳定问题。近年来,研究人员已提出各种方法来计入非线性效应以及瞬时攻角的非线性的影响(M. Falco, A. Curami 和 A. Zasso^[16], G. Diana 和 F. Cheli, F. Resta^[17]; C. Borri, R. Huffer 和 W. Zuhlten^[18])。

早在 50 年代末,Steinmann^[19]就已获得 Tacoma 节段模型的三分力系数,以及零攻角时升力与弯矩系数与转速之间的关系,它们是

$$C_L(\alpha, 0) = 3.64\alpha - 11.0\alpha^3, \quad (1a)$$

$$C_{LT}\left[0, -\frac{b\dot{\theta}}{2U}\right] = 2.41\dot{\theta}\left[\frac{-b}{2U}\right] - 180\dot{\theta}^3\left[\frac{-b}{2U}\right]^3; \quad (1b)$$

$$C_M(\alpha, 0) = -0.44\alpha + 1.7\alpha^3, \quad (2a)$$

$$C_{MT}\left[0, -\frac{b\dot{\theta}}{2U}\right] = -1.32\dot{\theta}\left[\frac{-b}{2U}\right] + 330\dot{\theta}^3\left[\frac{-b}{2U}\right]^3; \quad (2b)$$

这里, b 是桥梁断面的宽度, α 是平均攻角, U 是平均风速, $\dot{\theta}$ 是扭转角速度。它们的关系如图 1 所示。

60 年代末, V. F. Blum 利用以上关系式研究了旧 Tacoma 大桥风致非线性振动的稳定性问题。90 年代中期, J. L. V. Brito 和 J. D. Riera 在测量 H 型桥梁断面的气动系数时,也观测到气动系数依赖于平均攻角 α 和角速度 $\dot{\theta}$; 并获得类似于图 1 的关系。

根据上文所述,考虑到线性与非线性效应的风载模型可以建立起来,即三分力系数 $C_Y = C_Y(\beta(t), \dot{\theta})$, ($Y = D, L, M$) 被认为是瞬时攻角与角速度的函数。由于颤振导数是折减频率

k 的函数, 而 k 与角速度有关系, 因此为了推出颤振导数与 $C_i (i = D, L, M)$ 及其导数的关系, 假设 $C_i (i = D, L, M)$ 是角速度的函数是合理的。参照经典的气动系数公式, x_c1y 坐标系中的三分力为(见图 2):

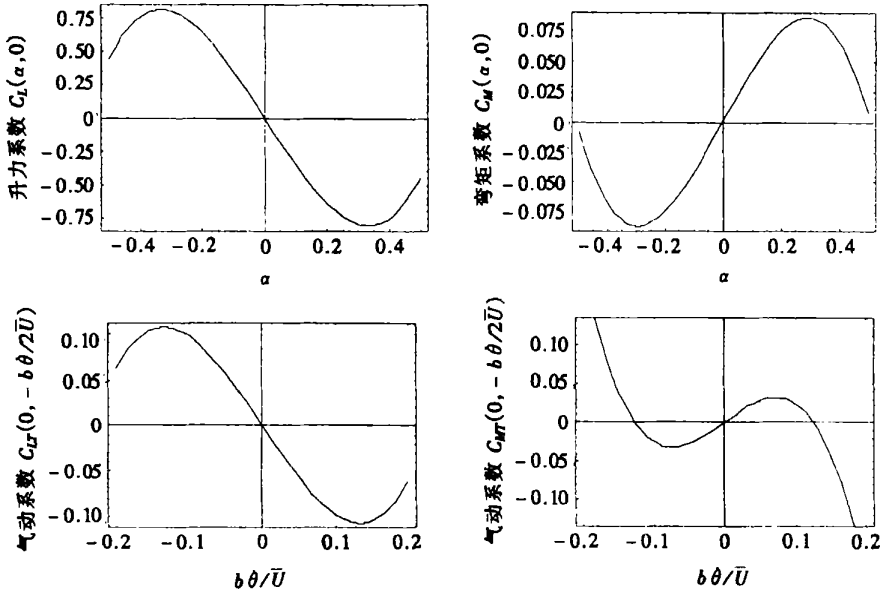


图 1 气动系数与角速度的关系

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2} \rho V_r^2(t) A_0 C_D(\beta(t), \Theta), & L = \frac{1}{2} \rho V_r^2(t) B C_L(\beta(t), \Theta), \\ M_0 = \frac{1}{2} \rho V_r^2(t) B^2 C_M(\beta(t), \Theta), \end{cases} \quad (3a, b, c)$$

这里, ρ 是空气密度, A_0 是节段模型在垂直来流方向的投影, B 是节段模型的特征宽度, V_r 是平均风速, $\beta(t)$ 是瞬时攻角。但值得注意的是, 方程(3) 不能直接用于结构的耦合风振研究, 因为气动系数 $C_i = C_i(\beta(t), \Theta)$, ($i = D, L, M$) 不易获得, 而目前能够测量的是零攻角时的三分力系数, 即 $C_i = C_i(0, \Theta)$, ($i = D, L, M$)。鉴于此, 本文在下文中提出了将这些公式运用于工程分析的方法。

2 气动力的推导

柔性结构的节段模型如图 2 所示, $x_0c_2y_0, x_c1y, x'c1y'$ 是 three 套坐标系。

假设 x_c1y 坐标系中的风场矢量为:

$$U(x, y, t) = [U + u, w][i, j], \quad (4)$$

α 为初始平均攻角, c_1 为气动中心, c_2 为弹性中心, $|c_1c_2| = R_0$, U, u 分别为 x 方向的平均风速和脉动风速, w 为 y 方向的脉动风速。 u, w 可以看成具有一定频谱特性的随机过程^[5]。

节段模型的位移为 $x(z, t), y(z, t), \theta(z, t)$, 这里 z 为结构的展长方向, θ 为模型本身绕弹性中心的旋转角度, 则来流对节段模型的相对风速 V_r 可由矢量法则得出:

$$V_r = [U + u(t) - x\dot{\theta}(t)]i + [w(t) - y\dot{\theta}(t)]j \quad (5a)$$

若还要考虑到结构本身的旋转对相对风速的影响, 则 V_r 应改写成:

$$V_r = [U + u(t) - x\dot{\theta}(t) + R_0\dot{\theta}\sin\alpha]i + [w(t) - y\dot{\theta}(t) + R_0\dot{\theta}\cos\alpha]j \quad (5b)$$

V_r 偏离 x 轴的角度为 δ , 此时风速相对于模型的瞬时攻角为 $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \alpha + \delta_r(t) + \theta, \tag{6}$$

$$\delta_r(t) = \arctan \left\{ \frac{[w(t) - y\dot{x}(t) + R_0\theta\cos\alpha] / [U + u(t) - x\dot{y}(t) + R_0\theta\sin\alpha]}{\dots} \right\}. \tag{7}$$

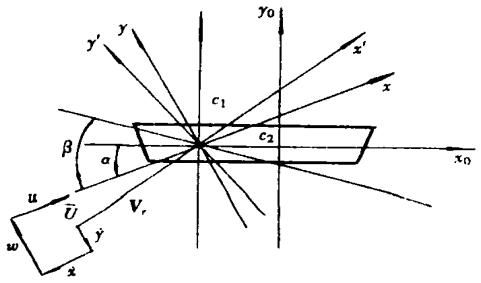


图2 柔性结构的节段模型

引入旋转角矩阵:

$$A(i) = \begin{bmatrix} \cos(i) & -\sin(i) & 0 \\ \sin(i) & \cos(i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$(i = \alpha, \delta_r(t), \beta(t)),$

所以有:

$$[D_0, L_0, M_{00}]^T = A(\alpha) \cdot [D, L, M_{0r}]^T, \tag{9a}$$

$$[D, L, M_{0r}]^T = A(\delta_r) \cdot [D', L', M'_{0r}]^T, \tag{9b}$$

式中 D_0, L_0, M_{00} 为 $x_0c_2y_0$ 坐标系中的三分力, D, L, M_{0r} 为 xc_1y' 坐标系中的三分力, D', L', M'_{0r} 为 $x'c_1y'$ 坐标系中的三分力.

因为广义力矢量的合力不管在哪个坐标系中看均为同一个矢量, 现将问题均放在 xc_1y' 坐标系中讨论, 则:

$$F = Di + Lj + M_{0r}k = D'i' + L'j' + M'_{0r}k'. \tag{10}$$

从方程(9)式可以看出, 瞬时攻角时的三分力系数可以表示为平均攻角 α 和角速度 θ 的函数, 而 $\delta_r(t)$ 又与 $x\dot{y} - y\dot{x}, w, u, U, \alpha$ 有关系, 初始的平均攻角 α 肯定与 x, y, θ 有关系, 这样, 所建立的气动力模型不仅是三方向耦合的, 而且也考虑到了气动力的非线性性.

2.1 气动力的线性表达式与颤振导数表达式

由于 $C_i(\beta(t), \theta)$ 的数据较难获得, 因此, 可以在 xc_1y' 坐标系中, 将 $C_i(\beta(t), \theta)$ 在 $\beta(t) = \alpha$ 和 $\theta = 0$ 附近, 展开成双 Maclaurin 级数. 这样 $C_i(\beta(t), \theta)$ 可以用静态的三分力系数 $C_i(\alpha)$ 及其导数与角速度 θ 来表示. 很显然, 在相对攻角 δ 和初始平均攻角 α 较小时, 方程(7) 可以表示为:

$$\delta = \frac{1}{U^2} [(w(t) - y\dot{x} + R_0\theta)U + (w(t) - y\dot{x} + R_0\theta)(x\dot{y} - u(t))], \tag{11}$$

而且, $C_i(\beta(t), \theta)$ 的级数展开为

$$C_D(\beta(t), \theta) = C_D(\alpha) + \dot{C}_D(\alpha)\theta + \frac{1}{U}(w - y\dot{x})(\dot{C}_D(\alpha) - C_L(\alpha)) + \frac{\theta}{U} [R_0(\dot{C}_D(\alpha) - C_L(\alpha)) + \dot{C}_D\theta U] + C_{DN}(t), \tag{12a}$$

$$C_L(\beta(t), \theta) = C_L(\alpha) + \dot{C}_L(\alpha)\theta + \frac{1}{U}(w - y\dot{x})(C_D(\alpha) + \dot{C}_L(\alpha)) + \frac{\theta}{U} [R_0(C_D(\alpha) + \dot{C}_L(\alpha)) + \dot{C}_L\theta U] + C_{LN}(t), \tag{12b}$$

$$C_M(\beta(t), \theta) = C_M(\alpha) + \frac{\dot{C}_M}{U}(w - y\dot{x}) + \dot{C}_M\theta + \frac{\theta}{U} [R_0\dot{C}_M + \dot{C}_M\theta U] + C_{MN}(t), \tag{12c}$$

这里, $(\quad)' = \partial(\quad) / \partial \beta |_{\beta(t)=\alpha}, C'_{i\theta} = \partial C_i / \partial \theta (i = D, L, M), C_N(t) (i = D, L, M)$ 是非

线性项·

将(11)和(12)两式代入到方程(3a, b, c)中,并利用方程(8)和(9b)式, x_1y_1 坐标系中的气动力为:

$$D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D \left[1 + \frac{2u}{U} \right] + \frac{1}{2}\rho U A w (\dot{C}_D - C_L) - \rho U A C_D x \gg - \frac{1}{2}\rho U A (\dot{C}_D - C_L) y \gg + \frac{1}{2}\rho U A [R_0 (\dot{C}_D - C_L) + \dot{C}_D \theta] \gg + \frac{1}{2}\rho U^2 A \dot{C}_D \theta + R_D(t), \quad (13a)$$

$$L = \frac{1}{2}\rho U^2 B C_L \left[1 + \frac{2u}{U} \right] + \frac{1}{2}\rho U B w (C_D + \dot{C}_L) - \rho U B C_L x \gg - \frac{1}{2}\rho U B (C_D + \dot{C}_L) y \gg + \frac{1}{2}\rho U B [R_0 (C_D + \dot{C}_L) + \dot{C}_L \theta] \gg + \frac{1}{2}\rho U^2 B \dot{C}_L \theta + R_L(t), \quad (13b)$$

$$M = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 C_M \left[1 + \frac{2u}{U} \right] + \frac{1}{2}\rho U B^2 w \dot{C}_M - \rho U B^2 C_M x \gg - \frac{1}{2}\rho U B^2 \dot{C}_M y \gg + \frac{1}{2}\rho U B^2 [R_0 \dot{C}_M + \dot{C}_M \theta] \gg + \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \dot{C}_M \theta + R_M(t), \quad (13c)$$

这里, $R_D(t)$ 、 $R_L(t)$ 、 $R_M(t)$ 是 $x \gg y \gg \theta$ 、 t 的非线性函数· 由于它们的复杂性,其表达式可以结合具体要研究的问题推导出来·

若假设桥梁节段模型的质量中心到有效转轴的距离为 r ,则由(13a)和(13c)可得脉动风对有效转轴的力矩为:

$$M_b = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left(1 + 2 \frac{u}{U} \right) \left[C_M + \frac{Ar}{B^2} C_D \right] + \frac{1}{2}\rho U B^2 w \left[C_M + \frac{Ar}{B^2} (C_D - C_L) \right], \quad (14)$$

此式中, r 可以是 R ,也可不是,即认为桥梁可同时绕有效转轴和弹性中心转动·

设 D_b 、 L_b 、 M_b 为抖振力, D_{ae} 、 L_{ae} 、 M_{ae} 为自激力,并采用与经典理论中的颤振导数相类似的记号,则(13a, b, c)式的线性部分可概括为:

$$\begin{bmatrix} D \\ L \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_b \\ L_b \\ M_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{ae} \\ L_{ae} \\ M_{ae} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_b \\ L_b \\ M_b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\rho U B \begin{bmatrix} P_1 & P_5 & P_2 \\ H_5 & H_1 & H_2 \\ A_5 & A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \gg \\ y \gg \\ \theta \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\rho U B \begin{bmatrix} P_3 \\ H_3 \\ A_3 \end{bmatrix} \theta, \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} D_b = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D \left[1 + \frac{2u}{U} \right] + \frac{1}{2}\rho U A w (\dot{C}_D - C_L), \\ L_b = \frac{1}{2}\rho U^2 B C_L \left[1 + \frac{2u}{U} \right] + \frac{1}{2}\rho U B w (C_D + \dot{C}_L), \\ M_b = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left(1 + 2 \frac{u}{U} \right) \left[C_M + \frac{Ar}{B^2} C_D \right] + \frac{1}{2}\rho U B^2 w \left[\dot{C}_M + \frac{Ar}{B^2} (C_D - C_L) \right]. \end{cases} \quad (16a, b, c)$$

可以看出,上式是由静风载与脉动风引起的风载组成的,这个结果与经典抖振力公式^[5]是相当一致的· 而这里不同的是顺风向抖振力也受到横风向脉动风速 w 的影响,这一点从物理意义上讲,正是三方向耦合的体现· 经典书籍中并未给出这种被忽略的讨论· 另外, M_b 式中多的一项亦说明了横风向脉动风速对 M_b 的影响·

在(15)式中, $[x \gg y \gg \theta]^T$ 前面的矩阵表示由于桥梁的单位运动速度而产生的自激力, θ 前面的矩阵表示由于桥梁的单位转动位移而产生的自激力· 而三个方向总的自激力线性部分为:

$$\begin{cases} D_{ae} = \frac{1}{2} \rho U B [P_1 x + P_5 y + P_2 \theta + P_3 \theta], \\ L_{ae} = \frac{1}{2} \rho U B [H_5 x + H_1 y + H_2 \theta + H_3 \theta], \\ M_{ae} = \frac{1}{2} \rho U B [A_5 x + A_1 y + A_2 \theta + A_3 \theta]. \end{cases} \quad (17a, b, c)$$

这些矩阵中的每一项与 Scanlan 公式^[2,7,8]相对应的项有着相近的物理本质, 均可称为颤振导数, 只不过前者是由“片条理论”以及改进的“准静态理论”推出的, 而后者则通过做实验由参数识别法, 统计得出的, 它们之间满足以下关系^[2]:

$$\lim_k \zeta_i^* \propto \xi_i \quad (\zeta_i^*: H_i^*, P_i^*, A_i^*; \xi_i: H_i, P_i, A_i; i = 1, 2, 3, 5). \quad (18)$$

这也是准静态理论所限定的, 只有在低速和小角度转动时, 方能相互代替. (15) 式中的 H_i 、 P_i 、 A_i ($i = 1, 2, 3, 5$) 可以表示为:

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{2A}{B} C_D, P_2 = \frac{A}{B} [R_0(\dot{C}_D - C_L) + \dot{C}_D \theta U], P_3 = \frac{A}{B} U \dot{C}_D, \\ P_5 = -\frac{A}{B} (\dot{C}_D - C_L); A_1 = -B \dot{C}_M, A_2 = B(R_0 \dot{C}_M + \dot{C}_M \theta U), \\ A_3 = B U \dot{C}_M, A_5 = -2B \dot{C}_M; H_1 = -(C_D + \dot{C}_L), \\ H_2 = R_0(C_D + \dot{C}_L) + \dot{C}_L \theta U, H_3 = U \dot{C}_L, H_5 = -2C_L. \end{cases} \quad (19a \sim 1)$$

当桥梁发生速度为 x, y, θ 和转角位移为 θ 的运动时, 按 Scanlan 理论所得到的三方向自激力为 D_{ae} 、 L_{ae} 、 M_{ae} , 写成矩阵为:

$$\begin{bmatrix} D_{ae} \\ L_{ae} \\ M_{ae} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho U B \begin{bmatrix} kP_1^* & kP_5^* & kP_2^* & B \\ kH_5^* & kH_1^* & kH_2^* & B \\ kA_5^* & kA_1^* & kA_2^* & B^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \rho U B \begin{bmatrix} Uk^2 P_3^* \\ Uk^2 H_3^* \\ UBk^2 A_3^* \end{bmatrix} [\theta]. \quad (20)$$

对照(15)式与 Scanlan 公式(20)式, 可以得到均匀风场中的节段模型的颤振导数的表达式:

$$\begin{cases} P_1^* = -\frac{2A}{Bk} C_D, P_2^* = \frac{A}{B^2 k} [R_0(\dot{C}_D - C_L) + \dot{C}_D \theta U], \\ P_3^* = \frac{A}{Bk^2} \dot{C}_D, P_5^* = -\frac{A}{Bk} (\dot{C}_D - C_L); \\ A_1^* = -\frac{1}{k} \dot{C}_M, A_2^* = \frac{1}{kB} (R_0 \dot{C}_M + \dot{C}_M \theta U), \\ A_3^* = \frac{1}{k^2} \dot{C}_M, A_5^* = -\frac{2}{k} \dot{C}_M; \\ H_1^* = -\frac{1}{k} (C_D + \dot{C}_L), H_2^* = \frac{1}{kB} [R_0(C_D + \dot{C}_L) + \dot{C}_L \theta U], \\ H_3^* = \frac{1}{k^2} \dot{C}_L, H_5^* = -\frac{2}{k} C_L. \end{cases} \quad (21a \sim 1)$$

这些颤振导数是基于三分力系数及其导数推导出来的, 而平均攻角时的三分力系数 C_i ($i = D, L, M$) 以及零攻角时的气动系数 $C_i = C_i(0, \theta)$, ($i = D, L, M$) 需要实验获得, 因此这里给出的仅仅是颤振导数的半解析表达式. 而且, 由于在早期的 Scanlan 公式^[1,2,5]中, 颤振导数的获得没有用到系数 $1/2$, 因此, 在运用本文的(21)式进行颤振导数的绝对分析时, 必须将系数

1/2 考虑进去。根据文献[20], 颤振导数之间的相互关系也可以获得。

值得注意的是, 这里的颤振导数是在与 Scanlan^[1, 2] 不同的坐标系中推导出来的, 因此, 某些与经典气动力公式中对应的项要取负值。

2.2 非线性气动力

非线性气动力可以采用与 2.1 节同样的方法推导出来, 但如果要推导三方向完全耦合的非线性气动力时, 因为许多可忽略的小值项而使其表达式显得非常复杂。作者^[21] 曾经推导出三个单方向的非线性气动力表达式。为演示非线性气动力的推导过程, 这里将推导非线性自激力矩。

如果节段模型仅仅具有扭转方向的运动($\theta, \dot{\theta}$), 此时有 $x = x^0 = y = y^0 = 0$, 那么由(5b) 式得到的相对风速为

$$V_r^2 = (U + u + R_0\dot{\theta}\sin\alpha)^2 + (w + R_0\dot{\theta}\cos\alpha)^2 \approx (U + u)^2 + (w + R_0\dot{\theta})^2 \quad (\alpha \text{ 非常小}) \quad (22)$$

V_r 偏离平均风速的角度为

$$\delta_i = \arctan \frac{w + R_0\dot{\theta}}{U + u(t)} \approx \frac{w + R_0\dot{\theta}}{U} \cdot \frac{U}{U + u(t)} \approx \frac{w + R_0\dot{\theta}}{U} \left[1 - \frac{u}{U} \right], \quad (23)$$

则, 由来流风所引起的瞬时自激力矩是:

$$M = \frac{1}{2} \rho V_r^2 B^2 C_{M0}(\beta(t), \theta) \quad (24)$$

将 $C_{M0}(\beta(t), \theta)$ 在 $\beta = \alpha$ 和 $\theta = 0$ 的附近展开为双 Maclaurin 级数, 并将(22) 和(23) 两式代入(24) 式中可得:

$$M = \frac{1}{2} \rho B^2 [U^2 + 2Uu + u^2 + w^2 + 2R_0w\dot{\theta} + R_0^2\dot{\theta}^2] \left\{ C_M + \dot{C}_M(\delta + \theta) + \ddot{C}_M\theta + \frac{1}{2} \ddot{C}_M(\delta + \theta)^2 + \frac{1}{2} \ddot{C}_M\theta(\delta + \theta) + \dots \right\} = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_M \left[1 + 2 \frac{u}{U} \right] + \frac{1}{2} \rho U B^2 w \dot{C}_M + \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[\dot{C}_M + \ddot{C}_M \frac{w}{U} + 2 \dot{C}_M \frac{u}{U} \right] \theta + R_3 \dot{\theta} + R_M(t), \quad (25)$$

这里, R_3 是扭转方向的气动阻尼项, $R_M(t)$ 是非线性项, 它们的具体表达式为:

$$\left\{ \begin{aligned} R_3 &= \frac{1}{2} \rho U B^2 [\dot{C}_M R_0 + \dot{C}_M \theta U] + \frac{1}{2} \rho B^2 [3 \dot{C}_M R_0 + 2 U \dot{C}_M \theta] u + \\ &\quad \frac{1}{4} \rho B^2 [2 \ddot{C}_M R_0 + U \ddot{C}_M \theta + 4 C_M R_0] w, \\ R_M(t) &= \frac{1}{2} \rho B^2 C_M (u^2 + w^2) + \frac{3}{2} \rho B^2 u w \dot{C}_M + \frac{1}{4} \rho B^2 \ddot{C}_M U^2 \theta^2 + \\ &\quad \frac{1}{4} \rho B^2 R_0 [U \ddot{C}_M \theta + 2 R_0 C_M] \theta^2 + \\ &\quad \frac{1}{4} \rho B^2 U (U \ddot{C}_M \theta + 2 \ddot{C}_M \theta R_0) \theta \dot{\theta} + \dot{C}_M \theta R_0, \end{aligned} \right. \quad (26)$$

从以上表达式可以看出, 由于三方向运动的完全耦合, 来流方向的平均风速、横风向和顺风向的脉动风速均对节段模型的转动有影响, 从物理意义上讲是合理的。在推导的过程中, 包含 $1/U^2$ 以上的微小项, u, w 的高阶非线性项以及它们的耦合项均忽略掉。由于位移与速度的系数含有脉动风速, 而脉动风速的系数也包含 $C_i(\alpha)$ 及其导数, 因此可以得出这样的结论:

不仅存在结构与平均风速的耦合作用, 而且还存在结构与脉动风速的耦合作用。显然一点未在经典风载荷理论中得到反映。

3 非线性风荷载理论的应用

由于非线性气动力包含了非线性脉动风速项、非线性平均风速项以及它们的耦合项, 这就增加了处理问题的难度。作为非线性随机稳定性问题, 脉动风速非线性项以及它们与平均风速的耦合非线性项的研究将在其它的文章中讨论, 这里仅研究平均风速引起的非线性项对稳定性的影响。

以旧 Tacoma 大桥为例, 来研究非线性扭转振动。为方便讨论, 仅取一阶振型, 即

$$\theta(z) = \sin \frac{\pi z}{L}. \quad (27)$$

旧 Tacoma 大桥的气动系数可以从(2)式得到。因为 $C_M(\beta, 0)$, $C_M(0, -b \theta/2U)$ 被描述为 β 和 θ 的奇次幂的多项式, 这样就有:

$$\left. \frac{d^2 C_M(\alpha, 0)}{d\beta^2} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{d^2 C_M(0, -b \theta/2U)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (28)$$

假设 $R_0 = 0$, 即气动中心与弹性中心重合。忽略(25)和(26)两式中的脉动风速项 u 和 w , 并设初始攻角为 $\alpha = 0$, 则桥梁的运动控制方程可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + \xi_{\alpha} \omega_{\alpha} q + \omega_{\alpha}^2 q = s_1 U^2 q + s_2 U^2 q^3 + s_3 U q + \frac{s_4}{U} q^3 + \\ s_5 U^2 q^2 + s_6 U^2 q \end{aligned} \quad (29)$$

上式中

$$\begin{aligned} s_1 = -\frac{0.11 \rho B^2 L}{I_1}, \quad s_2 = \frac{5.1 \rho B^2 L}{16 I_1}, \quad s_3 = \frac{0.33 \rho B^3 L}{2 I_1}, \\ s_4 = -\frac{495 \rho B^5 L}{64 I_1}, \quad s_5 = \frac{3 \rho B^2 C_{\beta 20}}{32 I_1}, \quad s_6 = \frac{2 \rho B^2 L}{3 \pi I_1} (C_{\beta 0} + C_{\beta 02}/2), \end{aligned}$$

这里
$$I_1 = \int_0^L \rho r^2 \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = \frac{2 \rho L^3}{\pi}$$

是广义惯性矩。由于 $C_M(\beta, \theta)$ 的数据并未广泛获得, 因此假设 $C_{\beta 20} = C_{\beta 0} = C_{\beta 02} = 0$, 这样方程(29)可简化为:

$$\ddot{q} + \xi_{\alpha} \omega_{\alpha} q + \omega_{\alpha}^2 q = s_1 U^2 q + s_2 U^2 q^3 + s_3 U q + \frac{s_4}{U} q^3. \quad (30)$$

上式与 V. F. Blum 所给的方程是一致的, 不同点就是这里的非线性扭转运动方程是通过新的气动力模型得到的, 而且这个新模型不仅考虑了三方向的完全耦合, 而且还包含了 $U(x, y, t)$ 与结构的相互作用。而 V. F. Blum 的理论却不能推导出颤振导数的表达式。作者^[22]曾通过数值方法研究了方程(30)式, 得到了与 V. F. Blum 类似的结论, 即桥梁的非线性稳定性受到初始条件的影响, 并且当风速超过临界风速时存在极限环振动。由 $\bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha dt = 0$, $\bar{\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T \theta dt = 0$, 并采用文[22]中的结构数据, 可以求得桥梁的临界风速, $U_c = \xi_{\alpha} \omega_{\alpha} / s_3 = 17.44$ m/s, 这个值与 A. Piccardo^[10]的结果也是一致的。

4 结 论

针对柔性结构与风的相互作用的特点, 本文建立了三运动方向完全耦合的气动力模型。

利用“片条理论”, 通过将 $C_i = C_i(\beta(t), \theta)$, ($i = D, L, M$) 展开为 $C_i(\alpha)$ ($i = D, L, M$) 和 $C_i = C_i(0, \theta)$, ($i = D, L, M$) 的级数, 从而得到了线性与非线性气动力。并且也给出了颤振导数的半解析表达式, 这对某些较难测试的颤振导数而言, 无疑是一种有益的理论补充。推导出的三方向非线性气动力的线性部分与经典理论相吻合。本文不仅考虑了脉动风速对自激力的影响, 还考虑了非线性脉动风速、速度和位移的影响。对旧 Tacoma 大桥的风致扭转非线性振动的研究表明, 本文所得的扭转非线性振动方程与 V. F. Blum 的相一致, 这也证明了本文模型的正确性, 这样柔性结构的自激力理论统一到一个模型中。

当然, 在推导的过程中, 脉动风速的高阶项 $O(u^2)$, $O(w^2)$ 以及 $1/U^2$ 以上的小值项已被忽略。且这里所给的线性气动力只适合于二维问题的分析, 如果要推广到三维分析, 则要沿着柔性结构的展长方向进行模态积分。可以相信随着气动力理论的进一步完善, 本文的气动力模型与推导方法可用于土木工程中其它一些柔性结构的风振问题。

[参 考 文 献]

- [1] Scanlan R H, Tomko J J. Airfoil and bridge deck flutter derivatives[J]. J Eng Mech, ASCE, 1971, **97**(EM6): 1717—1737.
- [2] Scanlan R H. The action of flexible bridges under wind (I) flutter theory[J]. J Sound Vibration, 1978, **60**(2): 187—199.
- [3] Lin Y K. Motion of suspension bridges in turbulent winds[J]. J Eng Mech, ASCE, 1979, **105**(EM6): 921—923.
- [4] Lin Y K, Ariaratnam S T. Stability of bridge motion in turbulent winds[J]. J Struct Mech, 1980, **8**(1): 1—15.
- [5] Scanlan R H. The action of flexible bridge under wind (II) buffeting theory[J]. J Sound Vibration, 1978, **60**(2): 201—211.
- [6] Davenport A G. The response of slender, line_like structures to a gusty wind[J]. Proceedings ICE, 1962, **23**: 389—407.
- [7] Scanlan R H. Interpreting aeroelastic models of cable_stayed bridges[J]. J Eng Mech, ASCE, 1987, **113**(4): 555—575.
- [8] Sarkar P P, et al. Identification of aeroelastic parameters of flexible bridges[J]. J Eng Mech, ASCE, 1994, **120**(8): 1718—1742.
- [9] Piccardo G. A methodology for the study of coupled aeroelastic phenomena[J]. J Wind Eng Indus Aerodynamic, 1993, **48**: 241—252.
- [10] Solari G. Gust_Excited Vibrations [M]. New York: Springer_Verlag, 1994.
- [11] Strümmen E, Hjørth_Hansen E. The buffeting wind loading of structural members at an arbitrary attitude in the flow[J]. J Wind Eng Indus Aerodynamic, 1995, **56**: 267—290.
- [12] Brito J L V, Riera J D. Aerodynamic instability of cylindrical bluff bodies in non_homogeneous flow [J]. J Wind Eng Indus Aerodynamic, 1995, **57**, 81—96.
- [13] Parkinson G V, Brooks N P H. On the aeroelastic instability of bluff cylinders[J]. J Appl Mech, 1961, **83**: 250—258.
- [14] Novak M. Aeroelastic galloping of rigid and elastic bodies[R]. Univ Western Ontario, London/Canada, Res Rep BLWT_3_68, 1968.
- [15] Blum V F. Berechnung nichtlinearer aerodynamisch erregter schwingungen von Hängebrücken[J]. Der Stahlbau, 1967, **7**: 207—215.

- [16] Falco M, Curami A, Zasso A. Nonlinear effects in sectional model aeroelastic parameters[J]. *J Wind Eng Indus Aerodynamic*, 1992, **41_44**: 1321—1332.
- [17] Diana G, Cheli F, Resta F. Time domain aeroelastic force identification on bridge decks[A]. In: *9th International Conference of Wind Engineering* [C]. New Delhi, India, 1995, 938—949.
- [18] Borri C, Hffer R, Zahlten W. A nonlinear approach for evaluating simultaneous buffeting and aeroelastic effects on bridge decks[A]. In: *9th International Conference of Wind Engineering* [C]. New Delhi, India, 1995, 839—850.
- [19] Steinmann D G, Hangebr cken_Das aerodynamische problem und seine L-sung[J]. *Acier_Steel_Stahl*, 1954, **19**(10_11): 495, 542.
- [20] Scanlan R H, Jones N P, Singh L. Inter_relation among flutter derivatives[J]. *J Wind Eng Indus Aerodynamic*, 1997, **69_71**: 829—837.
- [21] XU Xu, CAO Zhi_yuan. New expressions of nonlinear aerodynamic forces in civil engineering[A]. In: *Proceedings of the 3rd Int Conf on Nonlinear Mech(ICNM_III)* [C]. Shanghai: Shanghai University Press, Aug, 1998, 396—401.
- [22] 徐旭, 曹志远. 气动耦合扭转非线性振动的稳定性分析[J]. *非线性动力学学报*, 1999, **6**(3): 228—234.

Linear and Nonlinear Aerodynamic Theory of Interaction Between Flexible Long Structure and Wind

XU Xu^{1, 2}, CAO Zhi_yuan²

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China

2. Department of Engineering Mechanics and Technology, Tongji University,
Shanghai 200092, P R China)

Abstract: In light of the characteristics of the interactions between flexible structure and wind in three directions, and based on the rational mechanical section_model of structure, a new aerodynamic force model is accepted, i. e. the coefficients of three component forces are the functions of the instantaneous attack angle and rotational speed $C_i = C_i(\beta(t), \dot{\theta})$, ($i = D, L, M$). So, a new method to formulate the linear and nonlinear aerodynamic items of wind and structure interacting has been put forward in accordance with “strip theory” and modified “quasi-static theory”, and then the linear and nonlinear coupled theory of super_slender structure for civil engineering analyzing are converged in one model. For the linear aerodynamic_force parts, the semi_analytical expressions of the items so called “flutter derivatives” corresponding to the one in the classic equations have been given here, and so have the nonlinear parts. The study of the stability of nonlinear aerodynamic_coupled torsional vibration of the Old Tacoma Bridge shows that the form and results of the nonlinear control equation in rotational direction are in agreement with that of V. F. B-hni s.

Key words: nonlinear aerodynamic forces; coupled interaction; flutter derivatives