应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 12_1317_07

各向同性弹性损伤本构方程的一般形式*

唐雪松[1,2], 蒋持平[1], 郑健龙[3]

(1. 北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系, 北京 100083;
2. 长沙交通学院 桥梁与结构工程系, 长沙 410076;
3. 长沙交通学院 道路与交通工程系, 长沙 410076)

(樊大钧推荐)

摘要: 直接从不可逆热力学基本定律出发, 推导出弹性各向同性损伤材料本构方程的一般形式, 克服了由应变等效假设建立的经典损伤本构方程的缺陷, 并阐明了两种各向同性弹性损伤模型(单标量模型与双标量模型)之间的联系• 研究表明, 采用单标量描述的损伤模型, 在材料损伤本构方程中含有两个"损伤效应函数", 反映损伤对于两个弹性常数的不同影响• 应变等效假设给出的损伤本构方程, 是该文方程的一个近似形式, 常常不能满意地描述实际材料的损伤行为•

关 键 词: 损伤力学; 不可逆热力学; 弹性损伤; 本构方程
中图分类号: O346.5 文献标识码: A

引 言

自从 Kachanov[1] 与 Rabotnov[2] 对于金属蠕变破坏所做的开创性工作以来, 损伤力学逐步发展起来, 目前已成为固体力学一个十分活跃的研究领域[3~6]•

损伤本构关系的描述是损伤力学的基本问题之一• 在以往文献中应变等效假设被广泛用于建立损伤材料的本构方程• 根据这一假设, 受损材料的本构关系可以采用无损时的形式, 只要把其中的 Cauchy 应力简单地换成有效应力即可[7]• 如各向同性弹性损伤材料的本构关系式为

$$\sigma_{ij} = 2\mu(1 - D)\varepsilon_{ij} + \lambda(1 - D)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \tag{1}$$

式中 σ_{ij}、ε_{ij} 为 Cauchy 应力与无穷小应变张量, λ、μ 为材料的 Lame 弹性常数, D 是各向同性标量损伤变量, δ_{ij} 是 Kronecker 记号• 随着研究的深入, 应变等效假设逐渐暴露出理论缺陷与局限性• 文献[8, 9] 中指出, 按应变等效假设, 在材料损伤过程中, 有效弹性常数 $\tilde{\lambda} = \lambda(1 - D)$ 与 $\tilde{\mu} = \mu(1 - D)$ 按相同的规律 $(1 - D)$ 变化, 泊松比 $\tilde{\nu} = \nu$ 保持不变• 这与现有的大量细观力学结果不一致[10, 11], 也与实际材料的损伤行为不相符• 为此一些学者提出了唯象的各向同性损伤的双标量模型[6, 9, 12], 但以往的文献中没有阐明单标量与双标量损伤模型的区别与联系•

Coleman 和 Gurtin[13] (1967) 对于耗散材料建立了含内变量的普遍热力学理论• 以后经

---

* 收稿日期: 1999_10_11; 修订日期: 2001_05_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972005); 交通部重点科技项目
作者简介: 唐雪松(1964—), 男, 湖南双峰人, 副教授, 博士.

Lemaitre 等许多学者的努力, 损伤力学的研究被纳入到连续介质力学与不可逆热力学理论框架之内. 然而据作者所知, 不可逆热力学还没有被用于研究含损伤连续介质本构方程的一般形式(广泛采用的是由应变等效假设给出的本构方程), 还没有被用于从理论上研究单标量、双标量模型的区别与联系. 而这无论从连续损伤力学理论体系的完整性, 还是从这门学科的工程应用来说, 都是至关重要的基本问题.

本文从不可逆热力学基本定律出发, 以 Helmholtz 自由能作为受损材料的本构泛函, 将其对 ε_{ij} 与 D 作 Taylor 级数展开, 推导出弹性各向同性损伤材料应力_应变本构方程与损伤对偶力本构方程的一般形式. 当采用由损伤材料的细观几何所定义的单标量损伤变量描述各向同性损伤状态时, 在损伤本构方程中含有两个"损伤效应函数", 它们揭示了单、双标量损伤模型之间的联系, 及损伤的宏观效应与其细观物理机制之间的关联. 损伤效应函数的具体形式可由细观力学或实验结果确定, 从而可实现连续损伤力学与细观损伤力学的衔接. 研究还表明, 由应变等效假设建立的损伤本构方程, 只是本文方程的一种(可能是过分的)简化形式, 从理论上说明了它常常不能满意地描述实际材料损伤现象的原因.

本文方法可推广应用于研究各向异性损伤与其它损伤问题, 从而为连续损伤力学的基本问题, 即损伤本构关系的研究, 提供了一个具有严格理论基础与普遍适用的方法.

1　不可逆热力学基本方程

对于无穷小应变和等温的热力学过程, 局部熵产生不等式(即 Clausius_Duhem 不等式)为

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\psi} \geqslant 0, \tag{2}$$

式中 ψ 为单位体积的 Helmholtz 自由能, 圆点表示物质导数. 假定材料是弹性各向同性的, 且发生各向同性损伤, 则有

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, D), \tag{3}$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D}\dot{D}. \tag{4}$$

式(4)代入式(2)中, 有

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial D}\dot{D} \geqslant 0. \tag{5}$$

式(5)对 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 的任意值均成立, 这要求

$$\sigma_{ij} = \partial\psi/\partial\varepsilon_{ij}. \tag{6}$$

定义

$$Y = -\partial\psi/\partial D, \tag{7}$$

则式(5)成为

$$Y \cdot \dot{D} \geqslant 0. \tag{8}$$

Y 是与 D 相对偶的广义热力学力, 可称为损伤对偶力. 式(6)即为应力_应变本构方程, 式(7)为损伤对偶力本构方程. $Y \cdot \dot{D}$ 为材料的损伤耗散功率, 式(8)表明热力学第二定律限定材料的损伤耗散功率恒为非负. 一般情况下损伤不可逆, 恒有

$$D \geqslant 0,\quad \dot{D} \geqslant 0,\quad Y \geqslant 0, \tag{9}$$

即损伤对偶力 Y 恒为非负.

2　弹性损伤本构方程的一般形式

设材料初始状态为: $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0,\ Y = D = 0$. 将 Helmholtz 自由能 $\psi(\varepsilon_{ij}, D)$ 在初始状

态附近作Taylor级数展开,只保留含有应变二次及二次以下的各项(因为$|\varepsilon_{ij}|\ll 1$)• 材料的损伤度是一个有限量,$0\leqslant D\leqslant D_c<1$,含有$D$的高阶项保留到$N$阶• 则弹性各向同性损伤下,有

$$\phi(\varepsilon_{ij},D)=\phi_0+\sum_{n=1}^{N}C^{(n)}D^n+\sum_{n=0}^{N}B_{ij}^{(n)}\varepsilon_{ij}D^n+\frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}D^n \tag{10}$$

ϕ_0为初始状态下的ϕ值,可取为零• $C^{(n)}$为标量系数• c_{ijkl}、$A_{ijkl}^{(n)}$、$B_{ij}^{(n)}$为系数张量,下标按求和约定• 式(10)代入式(6)、(7)中,得

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_{ij}}=\sum_{n=0}^{N}B_{ij}^{(n)}D^n+c_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{kl}D^n, \tag{11}$$

$$Y=-\frac{\partial\phi}{\partial D}=-\sum_{n=1}^{N}C^{(n)}nD^{n-1}-\sum_{n=1}^{N}B_{ij}^{(n)}\varepsilon_{ij}nD^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}nD^{n-1}• \tag{12}$$

令$D=0$,式(11)就退化为熟知的线弹性应力_应变本构方程• 由于损伤不可逆,在任意损伤状态下将材料卸载至零时,$\sigma_{ij}=\varepsilon_{ij}=0$, $Y=0$,此时$D\neq 0$,则由式(11)、(12)可知

$$B_{ij}^{(0)}=0,\quad B_{ij}^{(n)}=0,\quad C^{(n)}=0\qquad (n=1,2,\cdots,N)• \tag{13}$$

由σ_{ij}的对称性,知系数张量应满足如下对称性要求

$$c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}=c_{klij},\quad A_{ijkl}^{(n)}=A_{jikl}^{(n)}=A_{ijlk}^{(n)}=A_{klij}^{(n)}\qquad (n=1,2,\cdots,N)• \tag{14}$$

另外,由ϕ与Y的非负性知,c_{ijkl}必为非负张量,而$A_{ijkl}^{(n)}(n=1,2,\cdots,N)$必为非正张量• 式(10)~(12)可简化为

$$\phi(\varepsilon_{ij},D)=\frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}D^n, \tag{15}$$

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{kl}D^n, \tag{16}$$

$$Y=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}A_{ijkl}^{(n)}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}nD^{n-1}• \tag{17}$$

若材料有初始损伤,亦可导出与上相类似的结果•

弹性各向同性损伤下,c_{ijkl}与$A_{ijkl}^{(n)}$成为对称各向同性张量,可分别表示成

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}), \tag{18}$$

$$A_{ijkl}^{(n)}=-\lambda\alpha^{(n)}\delta_{ij}\delta_{kl}-\mu\beta^{(n)}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),\qquad \alpha^{(n)},\ \beta^{(n)}\geqslant 0,\qquad (n=1,2,\cdots,N), \tag{19}$$

λ、μ为Lame弹性常数,$\alpha^{(n)}$、$\beta^{(n)}$为无因次非负实数• 式(15)~(17)成为

$$\phi(\varepsilon_{ij},D)=\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\left[1-\sum_{n=1}^{N}\beta^{(n)}D^n\right]+\frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{kk})^2\left[1-\sum_{n=1}^{N}\alpha^{(n)}D^n\right], \tag{20}$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}\left(1-\sum_{n=1}^{N}\beta^{(n)}D^n\right)+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\left(1-\sum_{n=1}^{N}\alpha^{(n)}D^n\right), \tag{21}$$

$$Y=\frac{1}{2}\lambda\sum_{n=1}^{N}\alpha^{(n)}nD^{n-1}(\varepsilon_{kk})^2+\mu\sum_{n=1}^{N}\beta^{(n)}nD^{n-1}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}• \tag{22}$$

式(20)~(22)即分别为弹性各向同性损伤材料的自由能表达式,应力_应变本构方程与损伤对

偶力本构方程• 记

$$M_\lambda(D) = 1 - \sum_{n=1}^{N} \alpha^{(n)} D^n,\quad M_\mu(D) = 1 - \sum_{n=1}^{N} \beta^{(n)} D^n, \tag{23}$$

并定义

$$\lambda(D) = \lambda M_\lambda(D),\quad \mu(D) = \mu M_\mu(D), \tag{24}$$

则式(21) 成为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} M_\mu(D) + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} M_\lambda(D) = 2\mu(D)\varepsilon_{ij} + \lambda(D)\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \tag{25}$$

$\lambda(D)$ 与 $\mu(D)$ 分别为材料受损后的有效 Lame 常数, 与材料的损伤程度有关•

3 讨 论

由式(25) 知, 受损材料的应力_应变本构方程与无损时的形式相同, 只是其中的弹性常数为材料损伤后的有效值所取代, 而不是应变等效假设的那样, 用有效应力 $\sigma_{ij}/(1-D)$ 来代换 Cauchy 应力• 式(25) 表明, 损伤对两个弹性常数 λ 与 μ 有着不同的影响, 它们分别按照各自的规律 $M_\lambda(D)$ 与 $M_\mu(D)$ 随损伤 D 演变• 这一结论与现有的大量细观损伤力学研究结果[10, 11] 相一致• 函数 $M_\lambda(D)$ 与 $M_\mu(D)$ 的物理意义, 是描述损伤对材料两个独立弹性常数影响的函数, 可称为损伤效应函数• 而 $\alpha^{(n)}$ 与 $\beta^{(n)}$ 则为描述材料损伤效应的材料参数• $M_\lambda(D)$、$M_\mu(D)$ 或 $\alpha^{(n)}$、$\beta^{(n)}$ 与材料损伤的细观特征(微缺陷的分布、方向、形状等) 有关, 可由细观损伤力学的解答或实验确定•

取 $N = 1$, 式(21) 的一阶近似形式为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(1 - \beta^{(1)} D) + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}(1 - \alpha^{(1)} D), \tag{26}$$

若进一步取

$$\alpha^{(1)} = \beta^{(1)} = 1 \qquad (\text{i. e.}\quad A^{(1)}_{ijkl} = -c_{ijkl}), \tag{27}$$

则式(26) 就与应变等效假设给出的方程(1) 相同• 这表明基于应变等效假设的经典连续损伤本构方程, 只是本文方程的一个近似形式• 这种简化处理的误差, 将在下面通过连续损伤力学与细观力学的结合来加以讨论•

若从唯象学角度定义双标量损伤变量如下

$$\begin{cases} D_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1 - M_\lambda(D) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \alpha^{(n)} D^n, \\ D_\mu = 1 - \dfrac{\mu}{\mu} = 1 - M_\mu(D) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \beta^{(n)} D^n, \end{cases} \tag{28}$$

即可由此导出双标量描述的损伤模型• 本文导出的由一个标量损伤变量描述的损伤本构方程, 可以正确反映损伤材料的实际宏观力学行为, 克服了经典方程(1) 存在的缺陷• 式(28) 揭示了双标量损伤变量的物理含义, 以及其与单标量损伤变量的关系• 双标量损伤变量是对损伤材料弹性行为的唯象描述, 而并非是对材料损伤本身细观特征的描述•

4 连续损伤力学与细观损伤力学的结合

本构方程中的损伤效应函数 $M_\lambda(D)$ 与 $M_\mu(D)$, 或无因次材料系数 $\alpha^{(n)}$ 与 $\beta^{(n)}$, 是与材料细观损伤特征相联系的, 可利用细观损伤力学的研究结果加以确定•

对于二维随机分布的微圆孔损伤, 文献[14] 利用 Mori_Tanaka 方法, 考虑了相互作用的影

响,给出了如下的细观力学解答

$$\frac{\bar{E}}{E} = \frac{1-\rho}{1+2\rho},\quad \bar{\nu} = \frac{\rho+\nu-\rho\nu}{1+2\rho},\tag{29}$$

式中 E、ν 分别为材料的杨氏模量与泊松比,$\bar{E}$ 与 $\bar{\nu}$ 为受损后的有效杨氏模量与泊松比。ρ 为孔隙率,其定义为单元截面上微圆孔面积与单元截面积之比。此时,定义 ρ 为材料的损伤变量,即 $D = \rho$。

将式(29)代入式(24),并利用 λ、μ 与 E、ν 之间的关系,可得

$$M_{\lambda}(D) = \frac{(1-D)(D+\nu-D\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu(1+3D+\nu-D\nu)(1-2\nu+2D\nu)},\tag{30}$$

$$M_{\mu}(D) = \frac{(1-D)(1+\nu)}{1+3D+\nu-D\nu}.\tag{31}$$

对于二维随机分布的微裂纹损伤,文献[15]利用 Mori_Tanaka 方法,考虑了相互作用的影响,给出的细观力学解答为

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \left[1+\frac{\pi\rho^{*}}{1+\nu}\right]^{-1},\quad \frac{\bar{E}}{E} = \frac{1}{1+\pi\rho^{*}},\tag{32}$$

式中 ρ^{*} 为材料的微裂纹密度参数,其定义为 $\rho^{*} = ml^{2}$,m 为单位面积上的微裂纹数目,l 为微裂纹的平均半长。此时可将 ρ^{*} 定义为材料的损伤变量,即 $D = \rho^{*}$。按相同的方式可得

$$M_{\lambda}(D) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1+\nu+\pi D)(1-2\nu+\pi D)},\tag{33}$$

$$M_{\mu}(D) = \frac{1+\nu}{1+\nu+\pi D}.\tag{34}$$

由上可知,本构方程中的损伤效应函数,可由细观损伤力学方法确定。对于给定的材料,损伤效应函数仅与材料的细观损伤特征有关。实际材料的细观损伤机理可能要复杂得多。此时可由实验或细观损伤力学的数值解答,确定出本构方程(21)、(22)中的无因次材料系数 $\alpha^{(n)}$ 与 $\beta^{(n)}$。

图1、图2 分别给出二维随机均匀分布的微圆孔与微裂纹损伤下两个损伤效应函数 $M_{\lambda}(D)$、$M_{\mu}(D)$ 的变化曲线,图中 $\nu = 1/3$。图1中还给出了应变等效假设的结果。根据应变等效假设,不管是何种材料及何种损伤形式,总是有 $M_{\lambda}(D) = M_{\mu}(D) = 1-D$。图1 显示,对于二维随机分布的微圆孔损伤,当取 $\nu = 1/3$ 时,$M_{\lambda}(D) = M_{\mu}(D) = (1-D)/(1+2D) \neq 1-D$,仍与应变等效假设的结果不同。对于二维随机均匀分布的微裂纹损伤,图2 显示两条损伤效应函数曲线明显不同。另外,损伤效应函数曲线是明显非线性的,而应变等效假设的结果是一条直线。

由上可知,在宏观层次的损伤本构方程中,通过损伤效应函数,使损伤的宏观效应与损伤的细观机理相联系,从而可以建立宏细观相互联系的损伤理论,以便更真实地反映材料的损伤行为。

5　结　　论

本文直接从不可逆热力学基本定律出发,通过将本构泛函展开成多项式级数,来研究损伤材料的本构方程。这一方法可以推广应用于研究各向异性损伤与其它损伤问题,从而为连续损伤力学的基本问题之一,即损伤本构关系的研究,提供了一个具有严格理论基础与普遍适用的方法。由此推导出弹性各向同性损伤下的应力_应变本构方程与损伤对偶力本构方程的一般形式,克服了经典损伤本构方程的缺陷。研究表明,小应变情况下损伤对材料宏观力学性能

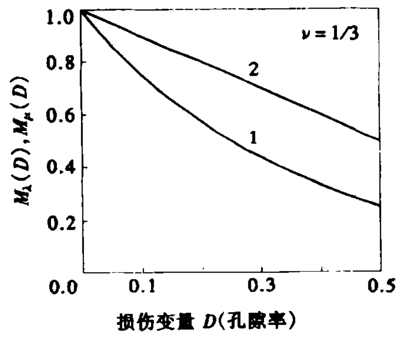

图 1　二维微圆孔损伤下的损伤效应函数曲线(1_本文结果, 2_应变等效假设的结果)

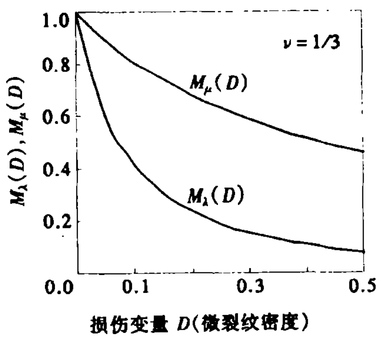

图 2　二维微裂纹损伤下的损伤效应函数曲线

的影响由两个不同的损伤效应函数来描述, 它们的具体形式取决于材料的细观损伤几何特征(微缺陷的分布、方向、形状等)• 基于应变等效假设的经典损伤本构方程, 是本文方程的一个简化形式• 同时, 首次阐明了单标量损伤模型与双标量模型的区别与联系• 对于有限变形问题, 在本构泛函展开时应保留关于应变的高阶项, 此时损伤本构方程中将含有两个以上的损伤效应函数•

[参　考　文　献]

[1] ±É±À³ . ³Â¶¾¶¿º Â±ÂÅË¶¿º Ñ ³ ÅÃ½À³ ºÑÇ ÁÀ½Î¹ ÅÉ¶ÃÄº [J] . ¶³ , 1958, (8) : 26—31.

[2] Rabotnov Y N. Creep Problems in Structural Members [M] . Amsterdam: North_Holland, 1969.

[3] Kachanov L M. Introduction to Continuum Damage Mechanics [M] . Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986.

[4] Chaboche J L. Continuum damage mechanics: Part Ⅰ_general concepts[J] . J Appl Mech, 1988, **55** (1) : 59—64.

[5] Chaboche J L. Continuum damage mechanics: part Ⅱ_damage growth, crack initiation and crack growth[J] . J Appl Mech, 1988, **55**(1): 65—72.

[6] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics [M] . Berlin: Springer_Verlag, 1992.

[7] Lemaitre J. Evaluation of dissipation and damage in metals submitted to dynamic loading[A] . In: Proc ICM_1[C] . Kyoto, 1971.

[8] Rabier P J. Some remarks on damage mechanics[J]. Int J Engng Sci, 1989, **27**(1): 29—54.

[9] 高蕴昕, 郑泉水, 余寿文. 各向同性弹性损伤的双标量描述[J]. 力学学报, 1996, **28**(5): 542—549.

[10] Fares N. Effective stiffness of cracked elastic solids[J]. Appl Mech Rev, 1992, **45**: 336—345.

[11] Kachanov M, Tsukrov I, Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes[J] . Appl Mech Rev, 1994, **47**(1) : S151—S174.

[12] Cauvin A, Testa R B. Elastoplastic materials with isotropic damage[J]. Internat J Solids Structures, 1999, **36**: 727—746.

[13] Coleman B D, Gurtin M E. Thermodynamics with internal variable[J] . J Chen Phys, 1967, **47**: 597—613.

[14] Kachanov M. On the effective moduli of solids with cavities and cracks[J] . Int J Fracture, 1993, **59**: R17—R21.

[15] Benvensite Y. On the Mori_Tanaka's method in cracked solids[J]. Mech Res Comm, 1986, **13**(4): 193—201.

General Expressions of Constitutive Equations for Isotropic Elastic Damaged Materials

TANG Xue_song[1,2], JIANG Chi_ping[1], ZHENG Jian_long[3]

(1. Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P R China;

2. Department of Bridge and Structure Engineering, Changsha Jiaotong University, Changsha 410076, P R China;

3. Department of Highway and Communications Engineering, Changsha Jiaotong University, Changsha 410076, P R China)

Abstract: The general expressions of constitutive equations for isotropic elastic damaged materials were derived directly from the basic law of irreversible thermodynamics. The limitations of the classical damage constitutive equation based on the well_known strain equivalence hypothesis were overcome. The relationships between the two elastic isotropic damage models (i. e. single and double scalar damage models) were revealed. When a single scalar damage variable defined according to the microscopic geometry of a damaged material is used to describe the isotropic damage state, the constitutive equations contain two "damage effect functions", which describe the different influences of damage on the two independent elastic constants. The classical damage constitutive equation based on the strain equivalence hypothesis is only the first order approximation of the general expression. It may be unduly simplified and may fail to describe satisfactorily the damage phenomena of practical materials.

Key words: damage mechanics; irreversible thermodynamics; elastic damage; constitutive equation