

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1153-10

# 集中力作用下的半平面边缘裂纹问题<sup>\*</sup>

陈宜周<sup>1</sup>, 长谷部宣男<sup>2</sup>

(1. 江苏理工大学 数理系 工程力学研究所, 江苏 镇江 212013;

2. 名古屋工业大学 土木系, 日本 名古屋)

(钱伟长推荐)

摘要: 讨论了半平面中的倾斜裂纹问题。集中力作用于裂纹表面上, 或作用于开裂半平面的边界上。利用有理保角映像函数方法求解这个问题, 同时得到了闭合形式的解。最后, 给出了二个数值例子和计算结果。

关键词: 有理保角映像函数方法; 半平面边缘裂纹问题; 应力强度因子

中图分类号: O346 文献标识码: A

## 引言

半平面边缘裂纹问题被许多研究者考虑过。利用弗里得荷蒙积分方程方法, 一个半平面裂纹问题得到解决<sup>[1]</sup>, 该文所得结果仅局限于, 边缘裂纹垂直于半平面, 又裂纹面上的作用力为大小相等方向相反的情况。有人用体积力方法求解边缘裂纹问题<sup>[2]</sup>。利用有理保角映像函数方法, 曾解决了许多边缘裂纹问题, 包括混合边值问题<sup>[3~7]</sup>。

从过去的研究可知, 至今尚未见到过集中力作用下半平面边缘裂纹问题的解。在本文中, 利用有理保角映像函数方法, 解决了集中力作用下半平面边缘裂纹问题。在下面的研究中, 先把复位函数  $\phi(\zeta)$  从区域  $S^+$  (单位圆内部) 延拓到  $S^-$  (单位圆外部), 又分离出复位函数的主要部分和解析部分, 这样便得到相应的解。这些就是本文的特点。最后, 文中给出了二个数值例子和计算结果。

## 1 分 析

首先我们讨论有关问题的求解方法。文中讨论了一个半平面边缘裂纹问题, 其中  $P_x$  和  $P_y$  是物体内一点的上的作用力(图 1(a))。此时, 相应的边界条件为

- 沿着开裂物体边界  $ABCD$  无外力作用。
- 在点  $z = z_0$  处作用着集中力  $P_x$  和  $P_y$ 。
- 当  $z \rightarrow \infty$  诸应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  均为零。

事实上, 上述原始问题可以转化一个修正问题(图 1(b))。此修正问题的边界条件如下

- 开裂半平面被一个足够大的半圆所界限。

\* 收稿日期: 2000\_09\_25; 修订日期: 2001\_04\_08

作者简介: 陈宜周(1935—), 男, 浙江余姚人, 教授, 博士。

b) 集中力  $P_x$  和  $P_y$  作用点  $z = z_0$  处, 又集中力  $-P_x$  和  $-P_y$  作用于点  $z = z_m$  处, 又它们处于平衡状态。

c) 物体的外周界是自由的。

显然, 当修正问题解决后, 若令  $z_m \rightarrow \infty$  则得到原始问题的解。

下面, 我们来讨论保角映像函数问题。已经证明, 有理保角映像函数方法是求解这类问题的最好方法。对于边缘裂纹这个几何情况(图 1(a)), 我们可得下列映像函数<sup>[4, 8]</sup>

$$z = \omega(\zeta) = A(1+i\zeta)^\beta(1-i\zeta)^{1-\beta}(1-\zeta)^{-1}, \quad A = a \frac{(1-i)\bar{i}^{-\beta}}{2\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}}, \quad (1)$$

式中  $a$  是裂纹长度, 又  $\beta\pi$  代表边缘裂纹的倾斜角, 又有

$$\bar{i}^{-\beta} = \exp(-\beta\pi i/2), \quad (2)$$

$$(1+i\zeta) = \rho_1 \exp(i\theta_1), \quad (1+i\zeta)^\beta = \rho_1^\beta \exp(i\beta\theta_1) \quad (|\zeta| < 1),$$

$$(1-i\zeta) = \rho_2 \exp(i\theta_2), \quad (1-i\zeta)^{1-\beta} = \rho_2^{1-\beta} \exp(i(1-\beta)\theta_2) \quad (|\zeta| < 1). \quad (3)$$

在式(3)中, 我们定义

$$(1+i\zeta)|_{\zeta=0} = 1 \cdot \exp(i0), \quad (1-i\zeta)|_{\zeta=0} = 1 \cdot \exp(i0), \quad (4)$$

其次, 式(2)和(3)中的  $\theta_1, \theta_2$  的值由变量  $\zeta$  的连续变化及定义式(4) 得出。

函数  $z = \omega(\zeta)$  把开裂半平面(在  $z$ -平面) 映像到单位圆内(在  $\zeta$ -平面)(图 2), 在图 2 中, 还指出了边界点的对应关系。由条件

$$\omega'(\zeta_l) = 0 \quad (5)$$

可得到

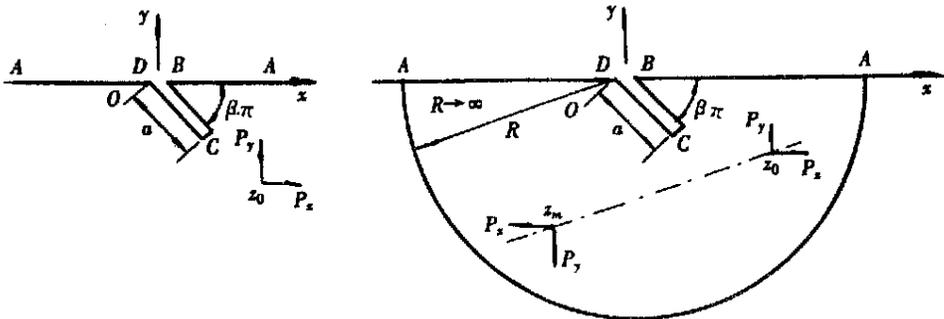
$$\zeta_l = \exp(i(\pi - 2\alpha)) = \frac{1 - 2\beta + i}{1 - 2\beta - i} \quad (\text{其中 } \tan \alpha = 1 - 2\beta). \quad (6)$$

显然, 点  $\zeta = \zeta_l$  相应于  $z$  平面上的裂纹端点。

可以证明, 以下二个函数可以用有理函数来近似表示<sup>[3]</sup>

$$(1+i\zeta)^\beta = 1 + \sum_{j=1}^{12} A_j \left[ 1 - \frac{1}{1+i\alpha_j\zeta} \right] \quad (|\zeta| < 1, 0 < \beta < 1),$$

$$(1-i\zeta)^{1-\beta} = 1 + \sum_{k=1}^{12} B_k \left[ 1 - \frac{1}{1+i\beta_k\zeta} \right] \quad (|\zeta| < 1, 0 < \beta < 1), \quad (7)$$

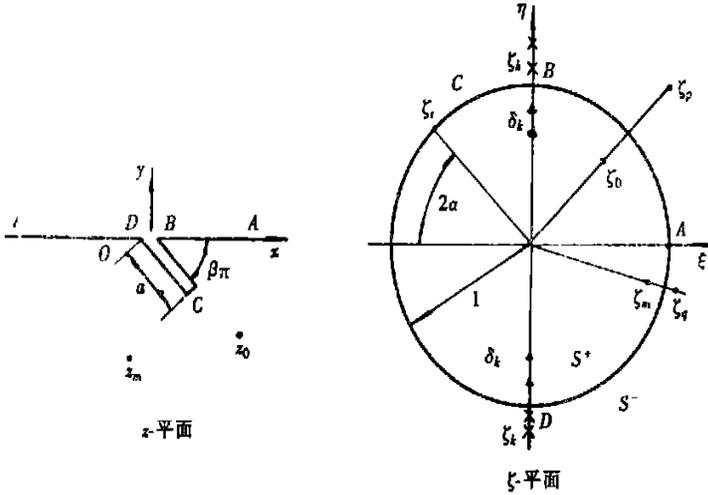


(a) 半平面的一个边缘裂纹问题 (b) 修正边缘裂纹问题

图 1 二个边界值问题

其中, 相应的值  $A_j, \alpha_j (j = 1, 2, \dots, 12)$  和  $B_k, \beta_k (k = 1, 2, \dots, 12)$  可由一个非线性代数方程组的解得到<sup>[3]</sup>。

把式(7)代入到式(1)中, 我们得到下列有理保角映像函数



(a) 开裂半平面几何形状 (b) 实际区域的保角映像

图2 保角映像关系

$$z = \omega(\zeta) = \frac{A_0 i}{\zeta - 1} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\zeta - \zeta_k}, \quad (8)$$

已经证明: a)  $A_0$  为实值; b)  $\zeta_k (k = 1, 2, \dots, 24)$  在  $\eta$  轴上, 又  $|\zeta_k| > 1$ ; c) 诸系数  $E_k (k = 1, 2, \dots, 24)$  一般取复数值。已经证明, 建议的有理保角映像函数是求解边值问题的关键。此外, 式(7) 的得到过程可以参考文献[3]。

为了分析上述问题, 我们利用平面弹性复变函数方法<sup>[9]</sup>。在此法中, 应力分量  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy})$ , 合力函数  $(X, Y)$  和位移  $(u, v)$  可以通过二个复变函数  $\phi_0(z), \psi_0(z)$  来表示

$$\alpha_x + \sigma_y = 4\text{Re } \Phi_0(z),$$

$$\alpha_y - \alpha_x + 2i\alpha_{xy} = 2[z\Phi_0(z) + \Psi_0(z)], \quad (9)$$

$$f = -Y + iX = \phi_0(z) + z\overline{\phi_0(z)} + \overline{\psi_0(z)} + c, \quad (10)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\phi_0(z) - z\overline{\phi_0(z)} - \overline{\psi_0(z)}, \quad (11)$$

式中  $\Phi_0(z) = \phi_0'(z)$ ,  $\Psi_0(z) = \psi_0'(z)$ ,  $G$  为剪切弹性模量,  $\kappa = 3 - 4\nu$  (平面应变时),  $\kappa = (3 - \beta)/(1 + \nu)$  (平面应力时),  $\nu$  为 Poisson 比。

当利用保角映像时, 可令

$$\phi(\zeta) = \phi_0(z) |_{z=\omega(\zeta)}, \quad \psi(\zeta) = \psi_0(z) |_{z=\omega(\zeta)}, \quad (12)$$

乃得

$$\alpha_x + \sigma_y = 4\text{Re} \left[ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right],$$

$$\alpha_y + i\alpha_{xy} = 2\text{Re} \left[ \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \frac{\phi'(\zeta)\omega'(\zeta) - \phi(\zeta)\omega''(\zeta)}{(\omega'(\zeta))^2} + \psi'(\zeta) \right], \quad (13)$$

$$f = -Y + iX = \phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} + \overline{\psi(\zeta)} + c, \quad (14)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\phi(\zeta) - \omega(\zeta) \frac{\overline{\phi(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} - \overline{\psi(\zeta)}. \quad (15)$$

显然, 在修正问题中边界条件有下列形式

$$\phi^+(\sigma) + \overline{\omega^+(\zeta)} \frac{\overline{\phi^+(\sigma)}}{\overline{\omega^+(\sigma)}} + \overline{\psi^+(\sigma)} = c \quad (\sigma = \exp(i\theta), \text{ 在单位圆上}), \quad (16)$$

此外我们熟知, 当集中力  $P_x$  和  $P_y$  作用于点  $z = z_0$  处时, 基本解有下列形式<sup>[9]</sup>

$$\phi(z) = \frac{p}{2\pi} \lg(z - z_0),$$

$$\phi(z) = -\frac{kp}{2\pi} \lg(z - z_0) - \frac{p}{2\pi} \frac{\overline{z_0}}{z - z_0}, \quad (17)$$

式中  $p = -(P_x + iP_y)/(1 + \kappa)$ . (18)

在分析中, 自然把复位函数表示成

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta), \quad (19)$$

式中  $\phi_1(\zeta)$ ,  $\psi_1(\zeta)$  是复位函数  $\phi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  的主要部分, 又  $\phi_2(\zeta)$ ,  $\psi_2(\zeta)$  是解析部分. 由式(17)所示复位函数的结构出发, 可令

$$\phi_1(\zeta) = \frac{p}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) - \frac{p}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_m),$$

$$\phi_2(\zeta) = -\frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) - \frac{p}{2\pi} \frac{\overline{\omega(\zeta_0)}}{\omega'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)} + \frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_m) + \frac{p}{2\pi} \frac{\overline{\omega(\zeta_m)}}{\omega'(\zeta_m)(\zeta - \zeta_m)}, \quad (20)$$

式中  $\zeta = \zeta_0$  或  $\zeta = \zeta_m$  相应是  $z = z_0$  和  $z = z_m$  的映像点(图 1(b) 和图 2).

为了进行下面的推导, 我们引入

$$\phi(\zeta) = -\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} \phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \psi\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad (\zeta \in S^-). \quad (21)$$

利用式(16)和式(21), 可得

$$\phi^+(\sigma) = \phi^-(\sigma) \quad (\sigma = \exp(i\theta), \text{ 在单位圆上}), \quad (22)$$

上式意味着函数  $\phi(\zeta)$  ( $\zeta \in S^-$ ) 是函数  $\phi(\zeta)$  ( $\zeta \in S^+$ ) 的一个从单位圆内部到单位圆外部的解析延拓. 由式(21), 便可以导出

$$\phi(\zeta) = -\phi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi(\zeta) \quad (\zeta \in S^+), \quad (23)$$

其中  $\omega(1/\zeta) = A_0i + \sum_{k=1}^{24} E_k \delta_k + \frac{A_0i}{\zeta - 1} + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2}{\zeta - \delta_k}$ , (24)

$$\delta_k = 1/\zeta_k \quad (k = 1, 2, \dots, 24). \quad (25)$$

极为明显, 由于函数  $\phi_2(\zeta)$  在区域  $S^+$  内解析, 则函数  $\phi_2(\zeta)$  在区域  $S^-$  内有极点. 与此类同, 函数  $\phi_2(1/\zeta)$  在区域  $S^-$  内解析, 但它同时在区域  $S^+$  有极点(图 2).

把式(19)代出入到式(23)中, 将会得到

$$\phi_2(\zeta) = -\phi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_2(\zeta) - \phi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_1(\zeta) - \psi_1(\zeta) \quad (\zeta \in S^+). \quad (26)$$

由于函数  $\phi_2(\zeta)$  在区域  $S^+$  内是解析的, 则式(26)右侧项也应有同样性质. 在式(26)右侧各项中  $\phi_2(1/\zeta)$  和  $\psi_1(\zeta)$  ( $\zeta \in S^+$ ) 是奇异的, 但  $\phi_1(1/\zeta)$  和  $\phi_1(\zeta)$  ( $\zeta \in S^+$ ) 是解析的. 此外, 我们可以分离出下列函数的奇异部分

$$\frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_1(\zeta) = \frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{p}{2\pi} \left[ \frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta_m} \right] =$$

$$\frac{p}{2\pi} \left[ \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} + \frac{\overline{\omega(\zeta_0)}}{\omega'(\zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right] -$$

$$\frac{p}{2\pi} \left[ \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_m)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} + \frac{\overline{\omega(\zeta_q)}}{\omega'(\zeta_m)} \frac{1}{\zeta - \zeta_m} \right] + \text{解析部分} (\zeta \in S^+), \quad (27)$$

$$\frac{\omega(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \phi_2'(\zeta) = \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2 \phi_2'(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} + \text{解析部分} \quad (\zeta \in S^+), \quad (28)$$

式中  $\zeta_p = 1/\zeta_0, \zeta_q = 1/\zeta_m$ . (29)

注意到, 在点  $\zeta = 1$  的邻域, 函数  $\omega(1/\zeta)$  和  $\omega'(\zeta)$  相应地有估计值  $O((\zeta - 1)^{-1})$  和  $O((\zeta - 1)^{-2})$ . 从而,  $\zeta = 1$  不是函数  $\omega(1/\zeta) \phi_1'(\zeta)/\omega'(\zeta)$  和  $\omega(1/\zeta) \phi_2'(\zeta)/\omega'(\zeta)$  的极点.

由于式(26)的右端也必须是解析的, 把式(27)和(28)代入到式(26)中, 利用式(20), 可得

$$\begin{aligned} \phi_2 \left( \frac{1}{\zeta} \right) &= \frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) - \frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_m) - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2 \phi_2(\delta_k)}{\omega'(\delta_k)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} + \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_0)} - \overline{\omega(\zeta_p)}}{\omega'(\zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} \right\} - \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_m)} - \overline{\omega(\zeta_q)}}{\omega'(\zeta_m)} \frac{1}{\zeta - \zeta_m} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \delta_k^2}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_m)} \frac{1}{\zeta - \delta_k} \right\} \quad (\zeta \in S^+). \end{aligned} \quad (30)$$

在本文中, 我们假定  $\zeta_0$  和  $\zeta_m$  并不和点  $\delta_k (k = 1, 2, \dots, 24)$  重合.

由于函数  $\phi_2(1/\zeta)$  是沿着单位圆延拓的, 从而式(30)在全平面上成立. 由式(30), 我们容易得到

$$\begin{aligned} \phi_2(\zeta) &= \frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_p) - \frac{kp}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_q) + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \overline{\phi_2(\delta_k)}}{\omega'(\delta_k)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_0)} - \overline{\omega(\zeta_p)}}{\omega'(\zeta_0)} \frac{\zeta_p^2}{\zeta - \zeta_p} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} \right\} + \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_m)} - \overline{\omega(\zeta_q)}}{\omega'(\zeta_m)} \frac{\zeta_q^2}{\zeta - \zeta_q} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_m)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(\zeta) &= \frac{kp}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - \zeta_p} - \frac{1}{\zeta - \zeta_q} \right\} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \overline{\phi_2(\delta_k)}}{\omega'(\delta_k)} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} + \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_0)} - \overline{\omega(\zeta_p)}}{\omega'(\zeta_0)} \frac{\zeta_p^2}{(\zeta - \zeta_p)^2} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right\} - \\ &\frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta_m)} - \overline{\omega(\zeta_q)}}{\omega'(\zeta_m)} \frac{\zeta_q^2}{(\zeta - \zeta_q)^2} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\omega'(\delta_k)(\delta_k - \zeta_m)} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

只要在式(32)中代入  $\zeta = \delta_j (j = 1, 2, \dots, 24)$ , 便于可以得到关于  $\phi_2'(\delta_k) (k = 1, 2, \dots, 24)$  的代数方程组.

一旦复位函数  $\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta)$  求出后, 复位函数  $\phi(\zeta)$  可由公式(23)得到. 就这样, 修正问题得到解决.

若令  $\zeta_m \rightarrow 1$ , 这时有  $z_m \rightarrow \infty$ , 又有下列关系式

$$\lim_m \zeta_q = \lim_m (1/\zeta_m) = 1, \quad \lim_m \zeta_q = \lim_m [(\overline{\omega(\zeta_m)} - \overline{\omega(\zeta_q)})/\omega'(\zeta_m)] = 0 \quad (33)$$

此时, 便可以得到原始问题的解. 从而, 利用式(20), (31), (32)和(33), 可得图 1(a) 所示问题的复位函数

$$\phi_1(\zeta) = \frac{p}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) - \frac{p}{2\pi} \lg(\zeta - 1), \quad (34)$$

$$\phi_2(\zeta) = \frac{kp}{2\pi} [\lg(\zeta - \zeta_p) - \lg(\zeta - 1)] + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \overline{\phi_2(\delta_k)}}{\omega'(\delta_k)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} -$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2\pi} \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - 1)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \\ & \frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\omega(\zeta_0) - \omega(\zeta_p)}{\overline{\omega(\zeta_0)}} \frac{\zeta_p^2}{\zeta - \zeta_p} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{\zeta - \zeta_k} \right\}, \quad (35) \\ \phi_2(\zeta) = & \frac{kp}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - \zeta_p} - \frac{1}{\zeta - 1} \right\} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \overline{\phi_2(\delta_k)}}{\overline{\omega(\delta_k)}} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} + \\ & \frac{p}{2\pi} \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - 1)} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} + \\ & \frac{p}{2\pi} \left\{ \frac{\omega(\zeta_0) - \omega(\zeta_p)}{\overline{\omega(\zeta_0)}} \frac{\zeta_p^2}{(\zeta - \zeta_p)^2} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{(\zeta - \zeta_k)^2} \right\}. \quad (36) \end{aligned}$$

由上式可见,在式(35), (36)中有一些尚未定出的值  $\phi_2(\delta_k)$ , 它们可以用下面的方法定出。只要在式(36)中,令  $\zeta = \delta_j (j = 1, 2, \dots, 24)$ , 便可得到关于  $\phi_2(\delta_k) (k = 1, 2, \dots, 24)$  的方程组

$$\begin{aligned} \phi_2(\delta_j) + \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k \overline{\phi_2(\delta_k)}}{\overline{\omega(\delta_k)}} \frac{1}{(\delta_j - \zeta_k)^2} = & \frac{kp}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\delta_j - \zeta_p} - \frac{1}{\delta_j - 1} \right\} + \\ & \frac{p}{2\pi} \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - 1)} \frac{1}{(\delta_j - \zeta_k)^2} + \frac{p}{2\pi} \times \\ & \left\{ \frac{\omega(\zeta_0) - \omega(\zeta_p)}{\overline{\omega(\zeta_0)}} \frac{\zeta_p^2}{(\delta_j - \zeta_p)^2} - \sum_{k=1}^{24} \frac{E_k}{\overline{\omega(\delta_k)}(\delta_k - \zeta_0)} \frac{1}{(\delta_j - \zeta_k)^2} \right\} \\ & (j = 1, 2, \dots, 24), \quad (37) \end{aligned}$$

上式中,关于  $\phi_2(\delta_k) (k = 1, 2, \dots, 24)$  的实部和虚部共有 48 个未知数,它们由式(37)所示的方程组解出。

在上述的推导中,只要把复位函数的主要部分和解析部分分离,又不作任何部分,待求的解便得到了。这些就是所建议方法的优点<sup>[10~12]</sup>。

最后,裂纹端  $C$  的应力强度因子可由下式定出<sup>[3]</sup>

$$K_{1C} = K_{1C} - iK_{2C} = 2(\pi)^{1/2} \exp(i\beta\pi) \phi(\zeta_t) [\overline{\omega(\zeta_t)}]^{-1/2}, \quad (38)$$

式中  $\zeta_t$  是单位圆上一点,它是裂纹端点  $C$  的映像点,如式(6)所示。

可以证明,若点  $z = z_0$  在开裂半平面的边界上,上述解仍然正确。但是,由于此时有  $\zeta_0 = \zeta_p$ , 则式(35), (36)和(37)中的  $\omega(\zeta_0) - \omega(\zeta_p)$  项应代为零。与此同时,当集中力作用于开裂半平面的边界上时,复位函数可以表示为比较简单的形式<sup>[13,14]</sup>。

## 2 数值例子

为了证明所建议方法的有效性和提供更多的应力强度因子的数值结果,下面提供了二个数值例子。由于计算过程比较简单,具体过程不作详述。

例 1 集中力  $P_1, Q_1$  作用在裂纹表面上(图 3(a))。此时,裂纹端  $C$  的应力强度因子可表为

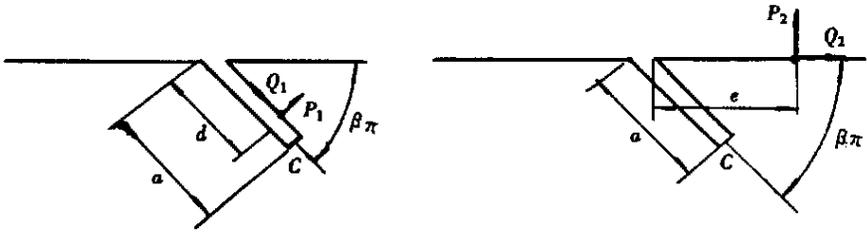
$$\begin{aligned} K_{1C} = & E_{1C} \left[ \beta, \frac{d}{a} \right] Q_1 (\pi a)^{-1/2} + F_{1C} \left[ \beta, \frac{d}{a} \right] P_1 (\pi a)^{-1/2}, \\ K_{2C} = & E_{2C} \left[ \beta, \frac{d}{a} \right] Q_1 (\pi a)^{-1/2} + F_{2C} \left[ \beta, \frac{d}{a} \right] P_1 (\pi a)^{-1/2}. \quad (39) \end{aligned}$$

对于  $\beta = 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$  的情况,  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}$  的计算结果表示在图 4~ 图 8 中。对于  $\beta = 1/2 (\beta\pi = \pi/2)$  的情况, 对比结果表示在表 1 中。从表 1 我们可以看到各种结果之间的吻合情况, 又发现有下列关系存在 -  $E_{2C}(1/2, d/a) = F_{1C}(1/2, d/a)$ 。

表 1 无因次应力强度因子  $E_{1C}, F_{1C}, F_{2C}(1/2, d/a)$  值和对比情况(见图 3(a) 和式(39))

$d/a =$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$E_{1C}$	0.826	0.825	0.822	0.814	0.803	0.789	0.774	0.758	0.741	0.723
$F_{1C}$	1.297	1.296	1.296	1.301	1.319	1.355	1.422	1.542	1.778	2.369
	1.295	1.294	1.294	1.296	1.304	1.327	1.380	1.495	1.744	2.382
	1.297									* 1
$F_{2C}$	-0.823	-0.737	-0.654	-0.581	-0.518	-0.464	-0.417	-0.376	-0.341	-0.310
	-0.821									* 2

\* 1 文献[1]中得到的值      \* 2 文献[4]中得到的值



(a) 集中力  $P_1, Q_1$  作用于裂纹表面上

(b) 集中力  $P_2, Q_2$  作用于开裂半平面的直线边界上

图 3 半平面中的一个条边缘裂纹

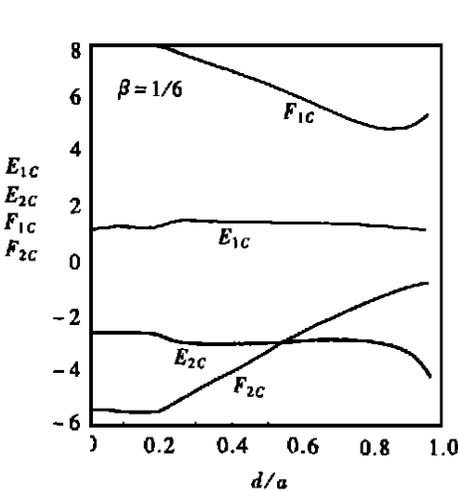


图 4 在  $\beta = 1/6$  情况下的  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}(\beta, d/a)$  值(见图 3(a) 和式(39))

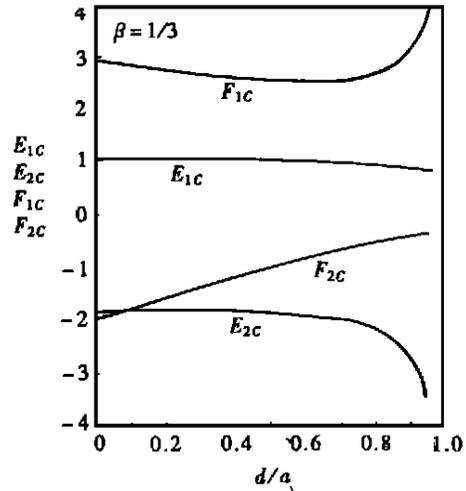


图 5 在  $\beta = 1/3$  情况下的  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}(\beta, d/a)$  值(见图 3(a) 和式(39))

例 2 集中力  $P_2, Q_2$  作用在开裂半平面边界上(图 3(b))。此时, 裂纹端 C 的应力强度因子可表为

$$\begin{aligned}
 K_{1C} &= G_{1C} \left\{ \beta, \frac{e}{a} \right\} Q_2(\pi a)^{-1/2} + H_{1C} \left\{ \beta, \frac{e}{a} \right\} P_2(\pi a)^{-1/2}, \\
 K_{2C} &= G_{2C} \left\{ \beta, \frac{e}{a} \right\} Q_2(\pi a)^{-1/2} + H_{2C} \left\{ \beta, \frac{e}{a} \right\} P_2(\pi a)^{-1/2}.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

对于  $\beta = 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$  的情况,  $G_{1C}, G_{2C}, H_{1C}, H_{2C}$  的计算结果表示在图 9 ~ 图 13 中。

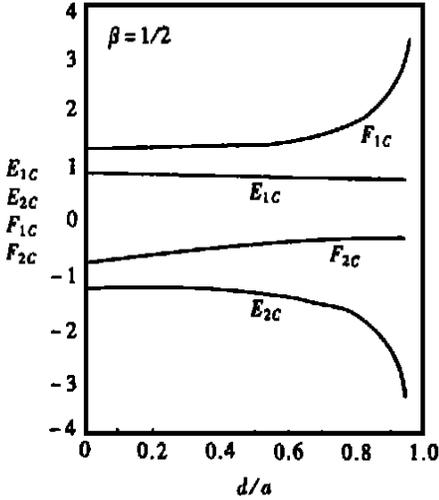


图 6 在  $\beta = 1/2$  情况下的  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}(\beta, d/a)$  值 (见图 3(a) 和式 (39))

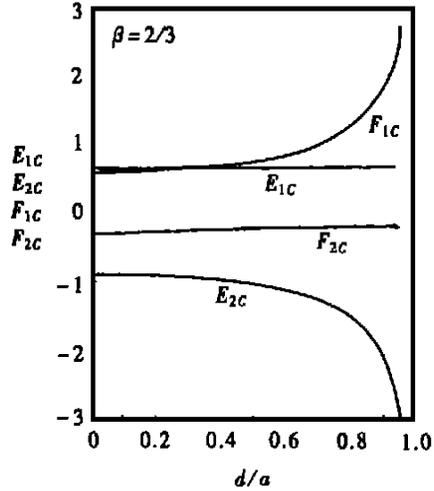


图 7 在  $\beta = 2/3$  情况下的  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}(\beta, d/a)$  值 (见图 3(a) 和式 (39))

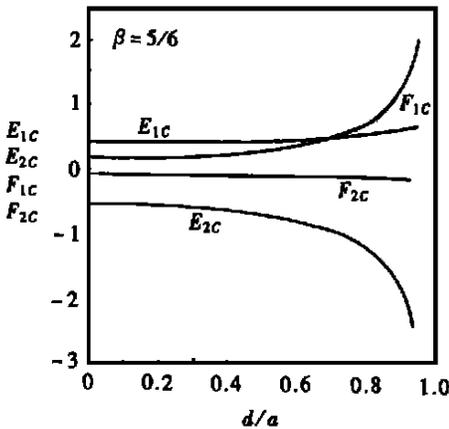


图 8 在  $\beta = 5/6$  情况下的  $E_{1C}, E_{2C}, F_{1C}, F_{2C}(\beta, d/a)$  值 (见图 3(a) 和式 (39))

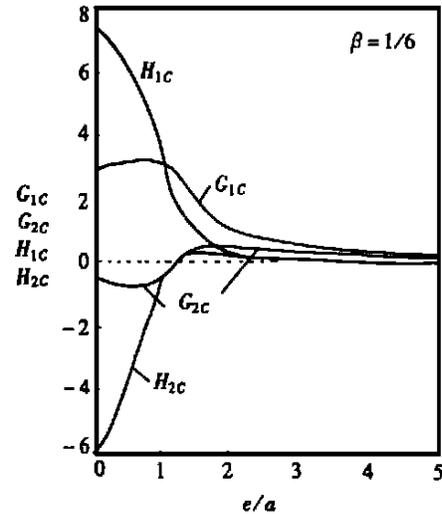


图 9 在  $\beta = 1/6$  情况下的  $G_{1C}, G_{2C}, H_{1C}, H_{2C}(\beta, e/a)$  值 (见图 3(b) 和式 (40))

### 3 结 论

当利用有理保直角映像函数时, 仅仅分离复位函数的主要部分和解析部分, 便可以得到待

求解。这些就是所建议方法的最大优点。

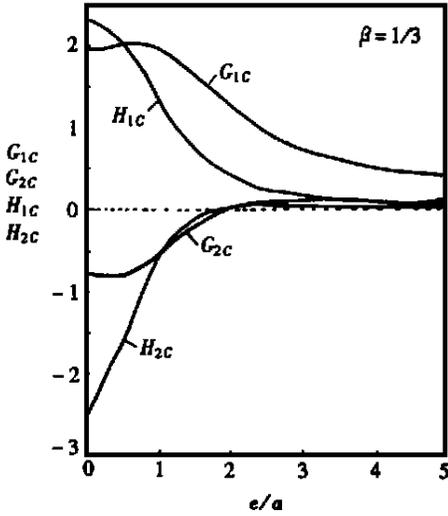


图 10 在  $\beta = 1/3$  情况下的  $G_{1c}, G_{2c}, H_{1c}, H_{2c}(\beta, e/a)$  值(见图 3(b)和式(40))

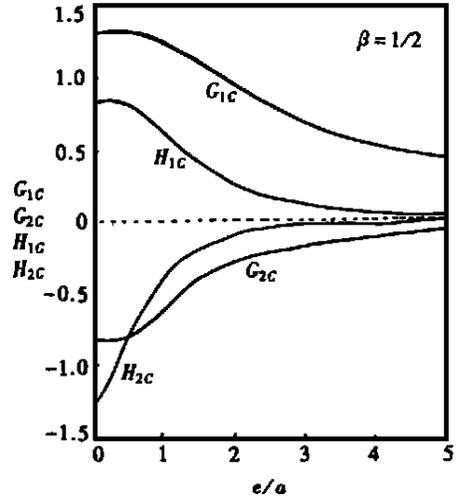


图 11 在  $\beta = 1/2$  情况下的  $G_{1c}, G_{2c}, H_{1c}, H_{2c}(\beta, e/a)$  值(见图 3(b)和式(40))

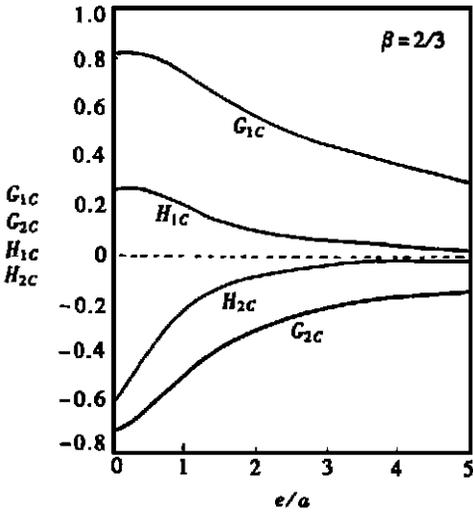


图 12 在  $\beta = 2/3$  情况下的  $G_{1c}, G_{2c}, H_{1c}, H_{2c}(\beta, e/a)$  值(见图 3(b)和式(40))

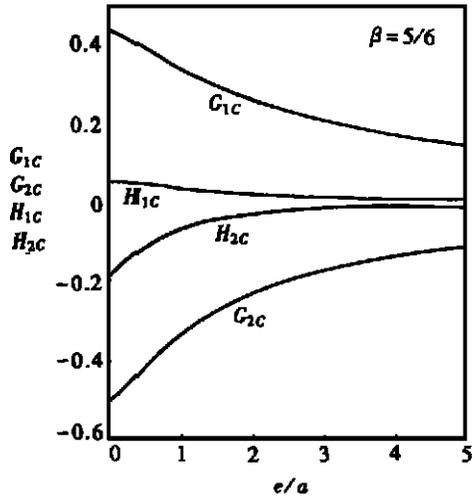


图 13 在  $\beta = 5/6$  情况下的  $G_{1c}, G_{2c}, H_{1c}, H_{2c}(\beta, e/a)$  值(见图 3(b)和式(40))

[参 考 文 献]

[1] Hartranft R J, Sih G C. Alternating method applied to edge and surface crack problems[A]. In: G C Sih Ed. Mechanics of Fracture[C]. Vol 1, 1973, 177—238.

[2] Nisitani H. Stress intensity factor for the tension of a semi\_infinite plate having an oblique or a bent edge crack[J]. Trans Japan Soc Mech Engrs, 1975, 41(344): 1103—1110.

[3] Hasebe N, Inohara S. Stress analysis of a semi\_infinite plate with an oblique edge crack[J]. Ingen Arch, 1980, 49(1): 51—62.

[4] Hasebe N. An edge crack in semi\_infinite plate welded to a rigid stiffener[J]. Proc Japan Soc Civil

- Engrs, 1981, **314**(10): 149—157.
- [5] Hasbe N, Okumura M, Takeuchi T, et al. Mixed boundary value problem of simple support type in plane elasticity[J]. *Acta Mech*, 1988, **73**(1): 199—212.
- [6] Okumura M, Hasebe N, Nakamura T. A crack and a debonding at an end of a simple support in plane elasticity[J]. *Acta Mech*, 1988, **74**(1): 139—153.
- [7] Hasebe N, Nakamura T, Ito Y. Analysis of the second mixed boundary value problem for a thin plate[J]. *J Appl Mech*, 1994, **61**(3): 555—559.
- [8] Imai I. Conformal Mapping and its Application [M]. Tokyo: Iwanami Shoten, 1979.
- [9] Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Gronigen: Noordhoff, 1953.
- [10] Hasebe N, Okumura M, Nakamura T. Bonded bi-materials half-planes with semi-elliptical notch under tension along the interface[J]. *J Appl Mech*, 1992, **59**(1): 77—83.
- [11] CHEN Yi\_zhou. Elastic analysis of an infinite plate containing hole with cusps and applied by concentrated forces[J]. *Engng Fract Mech*, 1984, **20**(4): 573—582.
- [12] Hasebe N, Chen Y Z. Interaction between a hole edge crack and a line crack[J]. *Int J Fract*, 1996, **77**(4): 351—366.
- [13] Hasebe N, Horiuchi Y. Stress analysis for a strip with semi-elliptical notches or cracks on both sides by means of rational mapping function[J]. *Ingen arch*, 1978, **47**: 169—179.
- [14] Hasebe N, Natsuura S. Stress analysis of a strip with a step and a crack[J]. *Engng Fract Mech*, 1984, **20**(3): 447—460.

## An Edge Crack Problem in a Semi-Infinite Plane Subjected to Concentrated Forces

CHEN Yi\_zhou<sup>1</sup>, Norio Hasebe<sup>2</sup>

(1. Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University of Science  
and Technology, Zhenjiang 212013, P R China;

2. Department of Civil Engineering, Nagoya Institute of Technology,  
Gokiso-cho Showa-ku, Nagoya 466, Japan)

**Abstract:** An oblique edge crack problem in a semi-infinite plane is discussed. The concentrated forces are applied on the edge crack face, or on the line boundary of the cracked semi-infinite plane. The rational mapping function approach is suggested to solve the boundary value problem and a solution in a closed form is obtained. Finally, several numerical examples with the calculated results are given.

**Key words:** rational mapping function approach; edge crack problem; stress intensity factor