

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1193_08

形状优化的全解析敏度分析

张德欣¹, 江允正², 蔡 睿³

(1 中国船舶工业总公司 第七研究院 第七 0 三研究所, 哈尔滨 150001; 2 烟台大学, 烟台 264005;
3 468 厂, 重庆 江津 402264)

(钱伟长推荐)

摘要: 在形状优化设计中, 建立了边界元的全解析敏度分析技术, 并将该技术与通用的形状优化设计算法相结合, 对二维平面应力下的弹性体进行形状优化. 在优化该文的例题时, 用加权求和法处理该例题的多目标问题, 最后获得满意的结果.

关键词: 边界元; 敏度分析; 形状优化; 方板开孔
中图分类号: U224 文献标识码: A

引 言

对弹性体的形状进行优化, 是改善应力集中状况、防止裂损、提高其承载能力的重要措施之一. 结构重分析、敏度分析和优化算法是实现形状优化设计的三个重要环节. 在形状优化设计中, 敏度分析对优化结果的精度起着决定性的作用.

在形状优化设计中, 有关敏度分析方面的很多著作是建立在有限元公式基础上的. 如 Wang^[1] 等给出了有限元的敏度分析详细评述. 对解析方程进行隐含求导, 得到敏度方程, Ramkrshnan 和 Francavilla^[2] 给出了这种敏度分析的有限元方法. 由于边界元法与有限元法相比, 它可使所考虑问题的维数降低一维, 为此在边界元法基础上, 建立全解析敏度分析方程是很重要的. 本文参照有限元敏度分析方程, 得到边界元全解析敏度分析方程. 它不仅使问题得到简化, 同时也提高了计算效率, 为此使得整个优化过程完全由边界及边界上的物理量所决定, 从而使形状优化设计更加简单及优化结果更加精确.

用本文创建的边界元全解析敏度分析优化算法, 优化了一个例题, 其结果与现有的结果进行比较, 以此来说明本文的正确性.

1 边界元基本理论与公式

以各向同性线性弹性体 为对象(边界用 表示) 边界积分方程为:

$$C_{ik}^i + P_{lk}^* u_k d = u_{lk}^* P_k d + u_k^* b_k d \quad (1)$$

收稿日期: 1999_12_18; 修订日期: 2001_06_20

作者简介: 张德欣(1964), 男, 硕士, 高级工程师, 主要科技成果: 从事多种舰艇型号的设计工作, 已发表多篇文章.

其中:

$$C_{LK} = \frac{1}{4(1-\nu)} \begin{pmatrix} 4(1-\nu) - \left\{ 2(1-\nu) - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \right\} & -\sin^2 2\alpha \\ -\sin^2 2\alpha & 4(1-\nu) - \left\{ 2(1-\nu) - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \right\} \end{pmatrix}$$

= $U + P$, U 是位移边界, P 是面力边界

其中, Q, P , $U_{lk}^*(PQ)$ 是位移基本解, $P_{lk}^*(PQ)$ 是与 $U_{lk}^*(PQ)$ 对应的表面力
对应于平面应力问题的基本解和基本解对应的表面力为:

$$U_{lk}^*(PQ) = \frac{1+\nu}{4E} \left[(3-\nu) \ln \frac{1}{r} U_{lk} + (1+\nu) r_{,lr,k} \right],$$

$$P_{lk}^*(PQ) = -\frac{1}{4r} \left\{ \frac{r}{n} [(1-\nu) U_{lk} + 2(1+\nu) r_{,lr,k}] - (1-\nu)(r_{,lnk} - r_{,knl}) \right\} \quad (2)$$

其中 E 、 ν 为材料弹性模量和泊松比, r 表示 P 点和 Q 点之间的距离 通过 E 和 ν 的代换可以得到平面应变问题的基本解

用数值法求解方程(1)式,以二次单元为例,将边界离散成 N 个单元,其中节点数为 $2N$ 个,节点分布在每一个单元在两端点和中间点 对这些二次单元导入无因次坐标后,这些单元的几何形状、位移和面力分量插值为:

$$X_j(\xi) = \sum_{i=1}^3 j(\xi) X_{ji}; \quad U_j(\xi) = \sum_{i=1}^3 i(\xi) U_{ji}; \quad P_j(\xi) = \sum_{i=1}^3 i(\xi) P_{ji}; \quad (3)$$

式中: $i_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)$; $i_2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi)$; $i_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)$;

这样积分方程(1)式可以表示成矩阵形式:

$$C^i \{U\}^i + [P^*] \{U\} = [U^*] \{P\} + [U^*] \{b\} \quad (4)$$

式中:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}; \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}; \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix};$$

$$[P^*] = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}; \quad [U^*] = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix};$$

经展开合并得: $\{U\} = \sum_{i=1}^3 [J]^i \{U\}^i$, (5a)

式中: $[J]^i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$; $\{U\}^i = \begin{Bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \end{Bmatrix}$;

同理: $\{P\} = \sum_{i=1}^3 [J]^i \{P\}^i$, (5b)

$$\{X\} = \sum_{i=1}^3 [J]^i \{X\}^i \quad (5c)$$

将(5a)、(5b)、(5c)式代入(4)式,简化后得:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\}, \quad (6)$$

式中: $[H] = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{+1} [P^*] [h] J d$; $[G] = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{+1} [U^*] [h] J d$;

$[h]$ 是包含插值函数 i 的矩阵, 方程组(6) 式可以分块并重新排序, 使所用的未知量出现在方程左边, 已知量出现在方程右边 得

$$[A]\{Y\} = \{F\}, \tag{7}$$

式中: $\{F\} = [M]\{Y\}$; $\{Y\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$; $\{Y\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$;

$$[A] = \begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} \\ -G_{21} & H_{22} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} \\ -H_{21} & G_{22} \end{bmatrix};$$

2 边界元的灵敏度分析

在形状优化设计中, 需要目标函数和约束函数的偏导数 对于很多问题, 这些函数大多是由面力和位移数据组成, 由方程 $[A]\{Y\} = \{F\}$ 解出位移和面力, 这些位移和面力可以确定应力 即, 所谓的应力恢复, 由边界上已知的面力和位移得到应力分量 通过应力方程对 X_l 隐含求导, 可得到这些应力对第 l 个设计变量的灵敏度 经过计算可知应力灵敏度取决于面力、位移和几何参数的灵敏度

1) 位移和面力的灵敏度

由(7) 式对设计变量 X_l 隐含求导, 可得未知位移和面力的灵敏度方程为:

$$[A]\{Y\}_{,l} = \{r\}_{,l} \tag{8}$$

式中: $\{r\}_{,l} = \{F\}_{,l} - [A]_{,l}\{Y\}$; $\{F\}_{,l} = [M]_{,l}\{Y\} + [M]\{Y\}_{,l}$;

2) 边界元辅助参量的灵敏度

由(8) 式知, 计算这些矩阵需要用到矩阵 $[H]$ 和 $[G]$ 的导数, 即:

$$[H]_{,l} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{+1} [[P^*]_{,l}[h]J + [P^*][h]J_{,l}]d; \tag{9}$$

$$[G]_{,l} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{+1} [[U^*]_{,l}[h]J + [U^*][h]J_{,l}]d \tag{10}$$

计算(9) 和(10) 式需要用到基本解 $[U^*]$ 和其对应的表面力 $[P^*]$, 以及它们的导数:

$$[P^*] = -K_1(CR^{-4}[P]q + R^{-2}[D][N]), \tag{11}$$

$$[U^*] = -K_2(r[I] + R^{-2}[P]), \tag{12}$$

$$[P^*]_{,l} = -K_1[4CR^{-5}R_{,l}[P]q + R^{-4}C([P]_{,l}q + [P]q_{,l}) - 2R^{-3}R_{,l}[D][N] + R^{-2}([D]_{,l}[N] + [D][N]_{,l})], \tag{13}$$

$$[U^*]_{,l} = K_2[r_{,l}[I] - 2R^{-3}R[P] + R^{-2}[P]_{,l}], \tag{14}$$

式中:

$$K_1 = \frac{1-}{4r}; \quad K_2 = \frac{1+}{4E}; \quad C = \frac{2}{1-}; \quad q = D_1n_1 + D_2n_2;$$

$$R = (D_1^2 + D_2^2)^{1/2}; \quad D_i = x_i - d_i;$$

$$r = (3-) \ln \frac{1}{R} - 3.5; \quad R_{l,i} = R^{-1}(D_1D_{1,l} + D_2D_{2,l});$$

$$[P] = \begin{bmatrix} D_1^2 & D_1D_2 \\ D_2D_1 & D_2^2 \end{bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_1 & -D_2 \\ D_2 & D_1 \end{bmatrix};$$

$$[N] = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix}; \quad [N]_{,l} = \begin{bmatrix} n_{1,l} & n_{2,l} \\ -n_{2,l} & n_{1,l} \end{bmatrix};$$

$$[P]_{,l} = \begin{bmatrix} 2D_1D_{1,l} & D_{1,l}D_2 + D_1D_{2,l} \\ D_{1,l}D_2 + D_1D_{2,l} & 2D_2D_{2,l} \end{bmatrix};$$

$$[D]_{,l} = \begin{bmatrix} D_{1,l} & -D_{2,l} \\ D_{2,l} & D_{1,l} \end{bmatrix};$$

$$q_{,l} = D_1m_{1,l} + D_1n_{1,l} + D_2m_{2,l} + D_2n_{2,l}; \quad r_{,l} = -(3-\nu)R^{-1}R_{,l};$$

$$n_1 = J^{-1}X_2; \quad n_2 = J^{-1}X_1; \quad n_{1,l} = -J^{-2}J_{,l}X_2 + J^{-1}X_{2,l};$$

$$n_{2,l} = J^{-2}J_{,l}X_1 - J^{-1}X_{1,l};$$

n_i 是单位向量分量; x_i, d_i 分别表示从原点到试验点和载荷点的距离

3) 边界应力灵敏度分析

在边界 上

$$11 = P_1, \quad (15)$$

$$12 = P_2, \quad (16)$$

$$22 = \frac{1}{1-\nu} 11 + \frac{E}{1-\nu} 2e_{22}, \quad (17)$$

$$\text{式中: } e_{22} = \frac{du_2}{ds} = \frac{du_2}{d} \frac{d}{ds} = \frac{du_2}{d} J^{-1}; \quad (18)$$

$$\frac{du_2}{d} = \sum_{i=1}^3 \frac{dh^i}{d} U_2^i; \quad (19)$$

通过式(15)~(17)对 X_l 求导, 可得到这些应力对第 l 个设计变量的敏感度:

$$11_{,l} = P_{1,l}, \quad (20)$$

$$12_{,l} = P_{2,l}, \quad (21)$$

$$22_{,l} = \frac{1}{1-\nu} 11_{,l} + \frac{E}{1-\nu} 2e_{22,l}, \quad (22)$$

$$\text{式中: } e_{22,l} = J^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{dh^i}{d} U_{2,l} - J^{-2} J_{,l} \sum_{i=1}^3 \frac{dh^i}{d} U_2, \quad J_{,l} = J^{-1} \left[\frac{dx_1}{d} \left(\frac{dx_1}{d} \right)_{,l} + \frac{dx_2}{d} \left(\frac{dx_2}{d} \right)_{,l} \right];$$

$$\left(\frac{dx_j}{d} \right)_{,l} = \sum_{i=1}^3 \frac{dh^i}{d} x_{j,i}$$

4) 用线性单元计算 J

$$|J| = \frac{d}{d};$$

$$d = \sqrt{d^2x + d^2y} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d} \right)^2} d = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right)^2} d = \frac{l}{2} d;$$

$$\text{得: } |J| = \frac{l}{2}$$

5) 计算单元向量分量 n'_1 和 n'_2

$$\begin{cases} n'_1 = J^{-1}y_j, \\ n'_2 = J^{-1}x_j, \end{cases}$$

$$J = \frac{l}{2}; \quad J^{-1} = \frac{2}{l}; \quad y_j = \begin{cases} 1y_1 + 2y_{i+1}; \end{cases}$$

$$\text{式中: } \begin{cases} 1() = \frac{1}{2}(1-), \\ 2() = \frac{1}{2}(1+), \end{cases}$$

$$y_j = (1y_i + 2y_{i+1}), = 1, y_i + 2 y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_i);$$

$$\begin{cases} n_1^i = \frac{1}{l_1}(y_{i+1} - y_i), \\ n_2^j = \frac{1}{l_2}(x_{i+1} - x_i) \end{cases}$$

6) 计算 $\begin{cases} D_1 = x - d_1^i, \\ D_2 = y - d_2^j \end{cases}$

d_1 和 d_2 分别表示沿 x 轴和 y 轴方向, 从原点到载荷点的距离:

$$D_1^j = x^j - d_1^i = (1x^j + 2x^{j+1}) - d_1^i = \left[\frac{1}{2}x^j + \frac{1}{2}x^{j+1} + x^j \right] + \frac{1}{2}(x^{j+1} - x^i);$$

同理: $D_2^i = \left[\frac{1}{2}y^i + \frac{1}{2}y^{i+1} - y^i \right] + \frac{1}{2}(y^{i+1} - y^j);$

7) 用高斯积分计算下列四个积分式

$$h_{ij}^1 = \int_{-1}^{+1} P^* d_j = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1 - \eta) P^* \frac{l_i}{2} d\eta = \int_{-1}^{+1} \frac{l_j}{4}(1 - \eta) P^* d\eta;$$

同理: $h_{ij}^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{l_j}{4}(1 + \eta) P^* d\eta;$

$$g_{ij}^1 = \int_{-1}^{+1} \frac{l_j}{4}(1 - \eta) U^* d\eta;$$

$$g_{ij}^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{l_j}{4}(1 + \eta) U^* d\eta$$

所用积分公式为: $\int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta = \sum_{k=1}^4 W_k f(\eta_k)$

3 例题计算

用本文编制的优化程序, 计算了方板开孔例题。方板开孔的形状及受力情况如图 1 所示。其中, $P = 50\text{MPa}$; $E = 200\text{GPa}$; $\nu = 0.25$;

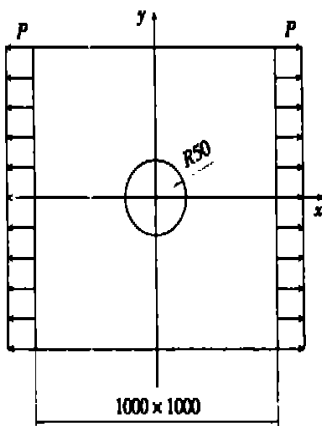


图 1 方板开孔的形状及受力情况

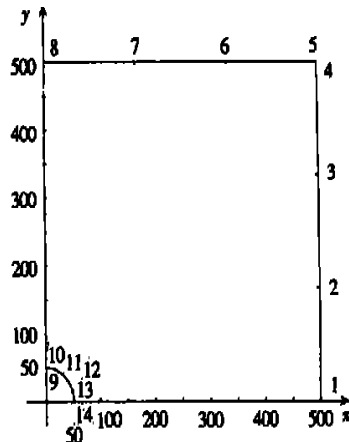


图 2 开孔方板的边界单元划分

考虑对称性, 可取方板的四分之一作为优化模型。边界单元划分如图 2 所示, 采用平面线

性单元,对该例题进行边界元分析

方板受拉时,边界最大切向应力出现在内孔边界处,此处易出现裂纹,为此,对该例题的内孔形状进行优化,使内孔边界处的最大切向应力值最小.本文用椭圆曲线来描述内孔边界,选椭圆的两轴为设计变量,即 x_{14} 和 y_9 为设计变量,内孔边界方程为:

$$\frac{x^2}{x_{14}^2} + \frac{y^2}{y_9^2} = 1$$

考虑在不增加方板重量的情况下,进行形状优化.于是该问题数学模型可以写成:

$$\begin{aligned} \min: \quad & G(1) = F(x) = \sum_{j=1}^{11} |j_i(x)| / [J], \\ \text{s. t} \quad & G(i) = ([J] - [j_i(x)]) / [J] \leq 0 \quad (i = 2, 3, \dots, 6; j = i + 5), \\ & G(7) = 1 - X(1) / 500 \leq 0, \\ & G(8) = 1 - X(2) / 500 \leq 0, \\ & G(9) = X(1) \leq 0, \\ & G(10) = X(2) \leq 0, \\ & G(11) = X(1)X(2) / \left[\frac{1}{2} R^2 \right] - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

表 1 全解析敏度分析的方板开孔优化结果

THE FINAL RESULTS			
X(1 2) = 140 615 700 00	46 717 050 00		
GX(1 11) = 298 338 600 00	0 581 920 30	0 593 623 10	0 629 590 90
0 728 420 90	0 974 751 80	0 296 921 60	0 532 829 50
140 615 700 00	46 717 050 00	0 375 142 00	
OPT. T_STRESS ARE:	83 615 940	81 275 380	74 081 830
	54 315 830	- 5 049 633	
REANALIES	TIMES: 249	SENS. ANALIES TIMES: 38	

表 2 半解析敏度分析的方板开孔优化结果

THE FINAL RESULTS			
X(1 2) = 115 234 900 00	41 475 510 00		
GX(1 11) = 321 111 700 00	0 552 810 80	0 562 322 80	0 616 525 50
0 677 147 30	0 985 634 90	0 423 825 50	0 585 244 90
115 234 900 00	41 475 510 00	0 000 493 26	
OPT. T_STRESS ARE:	89 437 840	87 535 440	76 694 900
	64 570 540	2 873 024	
REANALIES TIMES: 302	SENS. ANALIES TIMES: 43		

用本文研制的全解析敏度分析形状优化程序运算了该例题,优化结果如表 1 所示,用半解析敏度的结构形状优化程序也运算了该例题,优化结果如表 2 所示

比较表1和表2,得到用全解析敏度分析结构形状优化算法计算的内孔最大切向应力值比用半解析求敏度的结构形状优化算法计算的内孔最大切向应力值降低了百分之七,计算时间减少了百分之二十五

4 结束语

1) 本文研究了边界元全解析敏度分析的一般公式,并用该方法编制了计算机程序,优化了一个方板开孔例题,根据得到的优化结果和现有的结果进行比较,其精度还是很高的。在边界元的敏度分析领域中,可以用近似的解析求敏度的方法,这样在对精度影响不大的情况下,可以减少计算机费用,目前该方法正研究中

2) 在结构形状优化设计中,边界元法与有限元法相比,它有很多优点。将边界元法用于结构形状优化设计中,它可以使优化问题的维数降低一维,大大减少计算工作量,以及还降低计算的复杂程度。并且,它可以很容易地和通用的形状优化算法相结合,为此,它有很好的发展前景

[参 考 文 献]

- [1] Wang S, Sun Y, Gallagher R H. Sensitivity analysis in shape optimization of continuum structures [J]. *Comput & Structures*, 1985, **20**(5): 855-867.
- [2] Ramakrishnan C V, Francavilla A. Structural shape optimization using penalty functions [J]. *J Struct Mech*, 1975, **3**(4): 403-422.
- [3] Barone M R, Caulk D A. Optimal arrangement of holes in a two-dimensional heat conductor by a special boundary integral methods [J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1982, **18**(5): 675-685.
- [4] Banerjee P K, Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science* [M]. New York, N Y: McGraw-Hill Book Co, New York, N Y, 1981.
- [5] Eizadian D. Optimization of the shape of bidimensional structures by the boundary integral equation method [D]. France: the National Institute of Applied Science of Lyon, 1984.
- [6] Eizadian D. Trompette shape optimization of bidimensional structures by the boundary element method [A]. *Conf on CAD/CAM Robotics and Automation in Design* [C]. Tucson Ariz, 1985.
- [7] Trompette Ph, Marcelin J L, Lallemaud C. Shape optimization of axisymmetric structures [M]. New York: N Y. The Optimum Shape Plenum Press, 1985. 283-296.
- [8] Zochowski A, Mizukami K. A comparison of BEM and FEM in minimum weight design [A]. In: C A Brebbia Ed. *Boundary Element* [C]. Heidelberg: West Germany: Springer-Verlag, 1983, 901-911.
- [9] Rodrigues H C, Mota Soares C A. Shape optimization of shafts [A]. In: 3rd Nat Cong of Theoret and Appl Mech [C]. Lisbon Portugal (in Portuguese), 1983.
- [10] A Chaudouet-Miranda F, Elyafi Recent. Optimum design using BEM technique [A]. In: A Cruse Ed. *Advances in Boundary Element Analysis Methods* [C]. Department of Engineering Mechanics, San Antonio TX: Southwest Research Institute, 78284, U S A
- [11] 刘洪秋,夏人伟. 一种新的形状灵敏度分析方法——具有两类变量的伴随方程法 [J]. *计算结构力学及其应用*, 1993, **10**(3): 7-14.

Analytic Sensitivity Analysis for Shape Optimization

ZHANG De_xin¹, JIANG Yun_zheng², CAI Jian³

(11703 Research Institute, the Seventh Academy, China State Shipbuilding

Corporation, Harbin 150001, P R China;

21 Yantai University, Yantai 264005, P R China;

31468 Factory, Jiangjin, Chongqing 400226, P R China)

Abstract: Analytic sensitivity analysis technology for the boundary element method (BEM) is presented, combined with a shape optimization system for structural analysis. A shape optimization was done for an elastomer under planar stress, based on this new algorithm. A multi_object problem was studied as an illustrative example for the programmer, using weighted summing method. The result is feasible.

Key words: BEM; design sensitivity analysis; shape optimization; square plate with a hole