

文章编号: 1000-0887(2001) 11-1201-10

# 一类非线性波方程的光滑与非光滑行波解\*

李庶民

(昆明理工大学 理学院, 昆明 650093)

(李继彬推荐)

摘要: 讨论了一类偏微分方程的行波解. 该方程的行波方程对应于一个平面三次多项式系统, 因而可将行波解的研究化为对平面系统所定义的相轨线的拓扑分类研究. 应用平面动力系统理论在三参数空间内作定性分析, 首先获得三次多项式系统的完整拓扑分类, 再将相平面分析的结果返回到非线性波解  $u(\xi)$ . 考虑到解关于变量  $\xi = x - ct$  在“奇线”近旁的不连续性, 可得到各种光滑与非光滑行波的存在条件.

关键词: 非线性波方程; 孤立行波; 周期行波; 波的不光滑性  
中图分类号: O175 文献标识码: A

## 引 言

P. Rosenau<sup>[1]</sup>曾简单地考虑过非线性波动方程:

$$\rho_t = bu_x + \frac{1}{2}[ (u^2 \pm u_x^2) \rho ]_x, \quad \rho = u \pm u_{xx} \quad (1)$$

的 peakon 行波解的存在性(见文献[1]). 方程(1)是通过“reshuffling”KdV 方程和 mKdV 方程的二元 Hamilton 结构的 Hamilton 算子而得到的(见文献[2]). 鉴于方程(1)的强烈的物理背景, 完整地研究其各种各样行波解的存在性是非常必要的, 本文将对其可能产生的一切行波解作系统研究.

方程(1)的具有速度为  $c$  的行波解的形式为  $u = \phi(x - ct) = \phi(\xi)$ , 其中  $\xi = x - ct$ , 将  $u = \phi(\xi)$  代入(1)式, 得常微分方程

$$-c(\phi_\xi \pm \phi_{\xi\xi\xi}) = b\phi_\xi + \frac{1}{2}[(\phi^2 \pm \phi_\xi^2)(\phi \pm \phi_{\xi\xi})]_\xi \quad (2)$$

(2)的两边对  $\xi$  积分一次, 并令  $\gamma = \pm 1$ , 便有

$$[\gamma(\phi^2 + \gamma\phi_\xi^2) + 2c\gamma]\phi_{\xi\xi} = -g - \phi[\phi^2 + \gamma\phi_\xi^2 + 2(b+c)], \quad (3)$$

其中  $g$  为积分常数. 令  $\phi_\xi = y$ , (3)式等价于平面自治系统

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\xi} = y, \\ \frac{dy}{d\xi} = -\frac{u[u^2 + \gamma y^2 + 2(b+c)] + g}{\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma}. \end{cases} \quad (4)$$

\* 收稿日期: 2000\_10\_16; 修订日期: 2001\_04\_08  
基金项目: 云南省自然科学基金资助项目(1999A0018M)  
作者简介: 李庶民(1965—), 男, 云南巍山人, 副教授.

系统(4)是 P. D. E 方程(1)的行波系统, (1)的所有行波解都由(4)式确定. (1)的解称为孤立行波, 如果  $u = \phi(\xi)$  当  $|\xi|$  趋于无穷时有确定的极限. 一般而言, (1)的孤立波解对应于(4)的同宿轨道, (1)的周期行波解对应于(4)的周期轨道. 由于(4)的第二个方程右边的分母中含有二次函数  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma$ , 故当  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  时, (4)在曲线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  ( $\gamma = 1$  时是圆,  $\gamma = -1$  时是双曲线或直线)上是不连续的, 这就导致行波解的不可微性. 因此必须仔细处理和区分光滑和非光滑的行波解.

注意到当  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma \neq 0$  时, 方程组(4)的相轨线与方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \gamma(\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma), \\ \frac{dy}{d\tau} = -[u(\gamma u^2 + y^2 + 2(b+c)) + g] \end{cases} \quad (5)$$

的相轨线有着相同的拓扑性质, 其中  $d\tau = (\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma)^{-1} d\xi$ . 因此我们首先研究(5)的所有可能的拓扑相图, 然后再返回方程(4), 并描述(4)所能产生的各种不同行波解.

## 1 $\gamma = 1$ 时方程(5)的相图

设  $\gamma = 1$ , (5)式化为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = y(u^2 + y^2 + 2c), \\ \frac{dy}{d\tau} = -[u(u^2 + y^2 + 2(b+c)) + g] = -[uy^2 + f(u)], \end{cases} \quad (6)$$

其中  $f(u) = u^3 + 2(b+c)u + g$ , 系统(6)是平面 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H_+(u, y) = \frac{1}{4}(u^2 + y^2)^2 + (b+c)u^2 + cy^2 + gu. \quad (7)$$

显然,  $H_+(u, y)$  在相平面上无穷远处是正定的, 在 Poincare 圆盘上, 方程组(6)不存在无穷远奇点, 赤道是一条闭轨线, 在赤道近旁存在着(6)的一系大范围闭轨道族(见文献[3]).

以下, 我们在  $b, c, g$  三参数空间中研究系统(6)的相图的分支. 我们只考虑存在(6)的周期环域(即(6)有中心型奇点)的情况.

注意到当  $c \geq 0$  时, 系统(6)所定义的向量场仅存在一条竖直等倾线  $y = 0$  ( $u$  轴); 当  $c < 0$  时, 除  $y = 0$  外, 圆  $C^*: u^2 + y^2 = -2c$  也是一条竖直等倾线. 另一方面, 系统(6)的水平等倾线(记为  $C_H$ ) 方程可表示为

$$C_H: y^2 = -\frac{f(u)}{u} = -\frac{u^3 + 2(b+c)u + g}{u}. \quad (8)$$

因此, 当且仅当  $uf(u) \leq 0$  ( $u \neq 0$ ) 时, 才出现  $C_H$  的实分支. 三次代数方程  $f(u) = u^3 + 2(b+c)u + g = 0$  当  $\Delta = (g/2)^2 + [2/3(b+c)]^3 = 0$ , 即  $g^2 = g_0^2 \equiv -\frac{32}{27}(b+c)^3$  时, 存在一个二重实根, 一个单实根; 当  $g^2 < g_0^2$  时存在三个实根; 当  $g^2 > g_0^2$  时只存在一个简单实根.

不失一般性, 我们恒假设  $g < 0$ . 对于  $g > 0$  情形, 由(6)的方向场的对称性, 只需在  $g < 0$  情形下所得相图中用  $-u$  替换  $u$ , 即得  $g > 0$  情形的相图.

于是, 由以上判别式的讨论及(8)式, 显然可见:

1) 当  $b+c \geq 0$  时, 由于  $f'(u) = 3u^2 + 2(b+c) \geq 0$ ,  $f(u)$  仅在正  $u$  轴上有一个简单零点  $A_3(u_3, 0)$ , 曲线  $C_H$  仅在条形区域  $0 < u < u_3$  内存在一个开分支.

2) 当  $b+c < 0$  时, 若  $g = -g_0$ ,  $f(u)$  在正  $u$  轴上存在一个简单零点  $A_3(u_3, 0)$ , 在负  $u$  轴

上存在一个二重零点  $A_{12}(u_{12}, 0)$ , 此时, 曲线  $C_H$  由一点和一个开分支组成; 若  $-g_0 < g < 0$ ,  $f(u) = 0$  有三个实零点  $A_1(u_1, 0)$ ,  $A_2(u_2, 0)$  和  $A_3(u_3, 0)$ , 且  $u_1 < u_2 < 0 < u_3$ . 此时, 曲线  $C_H$  存在一个闭分支和一个开分支, 闭曲线分支交负  $u$  轴于点  $A_1$  及  $A_2$ , 开分支交正  $u$  轴于点  $A_3$ ; 若  $g < g_0$ , 则  $C_H$  仅在正  $u$  轴的条形区域  $0 < u < u_3$  内存在一个开分支.

综合以上讨论可知,

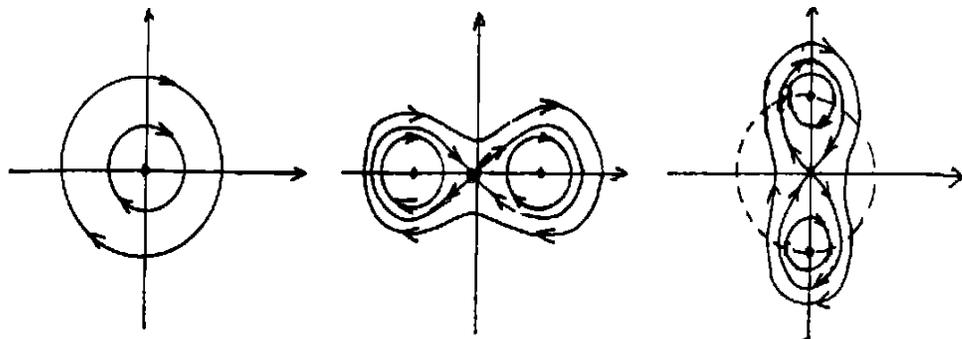
i) 系统(6)在  $u$  轴上( $y = 0$ ) 至多存在三个平衡点  $A_1, A_2$  与  $A_3$ .

ii) 当  $c < 0$  时, 若曲线  $C_H$  与  $C^*$  有交点, 则当  $2c + g^2/4b^2 < 0$  (即  $-g_0 \equiv \sqrt{-8b^2c} < g < 0$ ) 时, 系统(6)在圆上有两个平衡点  $B_{1,2} \left[ -\frac{g}{2b}, \pm \sqrt{-2c - \frac{g^2}{4b^2}} \right]$ ; 当  $g = -g_0$  时, 系统

(6) 在圆上有一个二重平衡点  $B_{1,2} \left[ -\frac{g}{2b}, 0 \right]$ .

作为特例, 当  $g = 0$  时, 系统(6)的平衡点是容易分析的, 在此不再赘述.

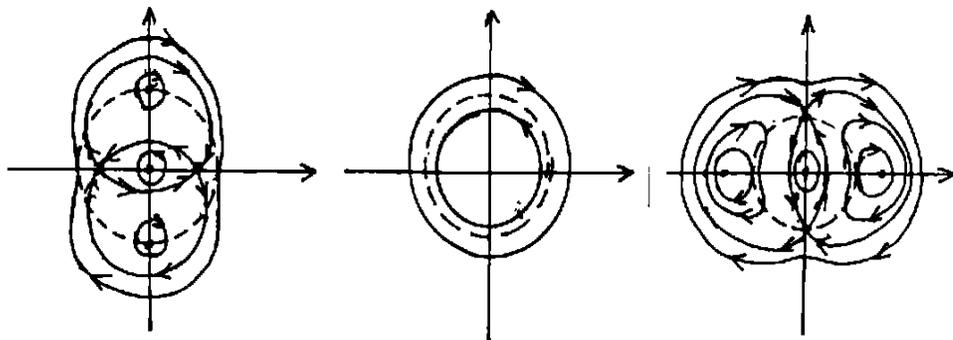
通过计算平衡点的指标, 并利用微分方程定性理论的知识, 我们在  $(b, c)$  参数平面上得到如图1与图2所示的相图的分支.



(1)  $b+c \geq 0, c \geq 0$

(2)  $b+c < 0, c \geq 0$

(3)  $b+c \geq 0, c < 0$



(4)  $b+c < 0, c < 0, b > 0$

(5)  $b+c < 0, c < 0, b = 0$

(6)  $b+c < 0, c < 0, b < 0$

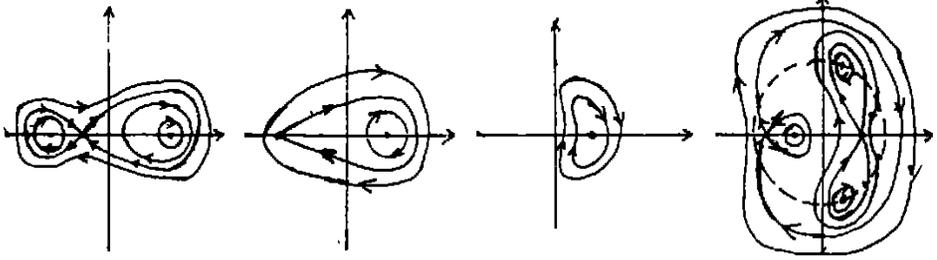
图1  $y = 1, g = 0$

由图1与图2, 显然有以下结论:

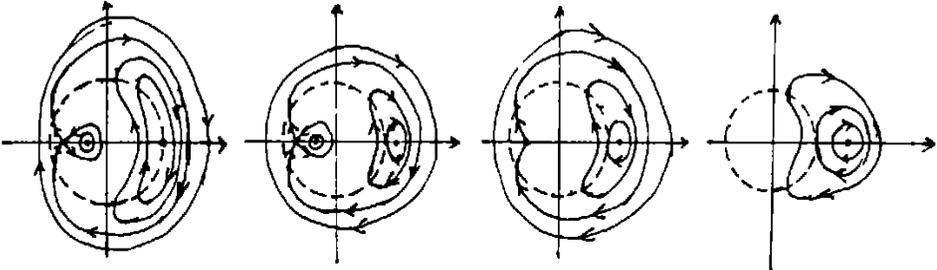
命题1 设  $c \geq 0$ , 则

i) 当  $g = 0$  时, 系统(6)存在两种不同的拓扑相图.

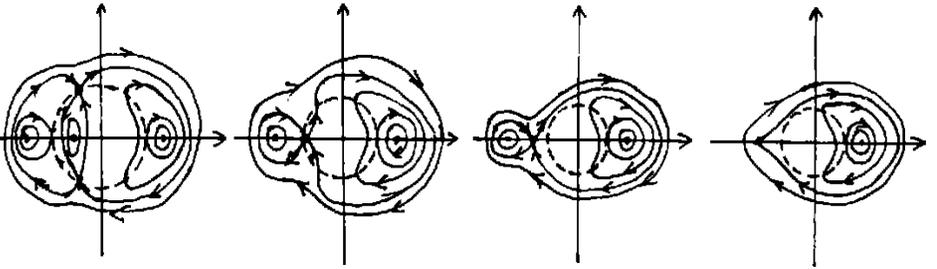
ii) 当  $g < 0$  时, 若  $b+c < 0$ , 则系统(6)存在三种不同的拓扑相图; 若  $b+c > 0$ , 系统



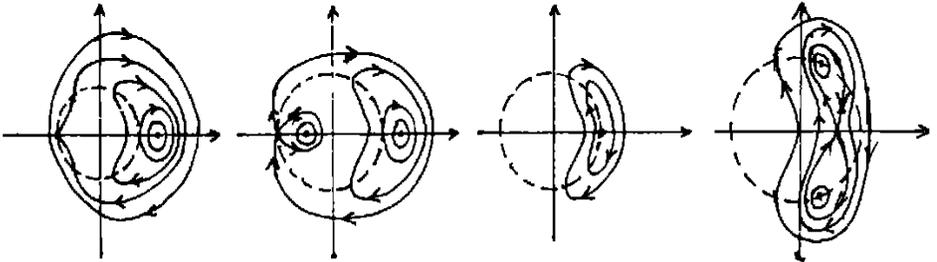
- (7)  $b+c < 0, c > 0, -\bar{g}_0 < g < 0$   
 (8)  $b+c < 0, c > 0, g = -\bar{g}_0$   
 (9) ①  $b+c < 0, c > 0, g < -\bar{g}_0$   
 ②  $b+c \geq 0, c \geq 0$   
 (10)  $b+c < 0, c < 0, b > 0, -\bar{g}_0 < g < 0$



- (11)  $b+c < 0, c < 0, b > 0, g = \bar{g}_0$   
 (12) ①  $b+c < 0, c < 0, b > 0, -\bar{g}_0 < g < -\bar{g}_0 - \bar{g}_0$   
 ②  $b+c < 0, c < 0, b = 0$   
 ③  $b+c < 0, c < 0, b < 0, 2c < b, -\bar{g}_0 < g < -\bar{g}_0$   
 (13) ①  $b+c < 0, c < 0, b > 0, g = -\bar{g}_0$   
 ②  $b+c < 0, c < 0, b < 0, 2c < b, g = -\bar{g}_0$   
 (14) ①  $b+c < 0, c < 0, b > 0, g < -\bar{g}_0$   
 ②  $b+c < 0, c < 0, b < 0, g < -\bar{g}_0$   
 ③  $b+c \geq 0, c < 0, g > -\bar{g}_0$



- (15) ①  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b < 2c, g > -\bar{g}_0$   
 ②  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b = 2c, g > -\bar{g}_0$   
 ③  $b+c < 0, b < 0, c < 0, 2c < b, g > -\bar{g}_0$   
 (16)  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b < 2c, g = -\bar{g}_0$   
 (17)  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b < 2c, -\bar{g}_0 < g < -\bar{g}_0$   
 (18)  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b < 2c, g = -\bar{g}_0$



- (19)  $b+c < 0, b < 0, c < 0, b = 2c, g = -\bar{g}_0 = -\bar{g}_0$   
 (20)  $b+c < 0, b < 0, c < 0, 2c < b, g = -\bar{g}_0$   
 (21)  $b+c \geq 0, c < 0, g = -\bar{g}_0$   
 (22)  $b+c \geq 0, c < 0, g < -\bar{g}_0$

图2  $\gamma = 1, g < 0$

(6) 仅存在一种拓扑相图.

命题 2 设  $c < 0$ , 则

- i) 当  $g = 0$  时, 系统(6) 存在 4 种不同的拓扑相图;  
 ii) 当  $g < 0$  时, 系统(6) 存在 13 种不同的拓扑相图.

## 2 $\gamma = -1$ 时方程(5) 的相图

当  $\gamma = -1$  时, 方程(5) 变为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = y(-u^2 + y^2 - 2c) = U(u, y), \\ \frac{dy}{d\tau} = -[u(u^2 - y^2 + 2(b+c)) + g] = -[-uy^2 + f(u)] = Y(u, y), \end{cases} \quad (9)$$

其中  $f(u) \equiv u^3 + 2(b+c)u + g$ , 系统(9) 是平面 Hamilton 系统, 其 Hamilton 量为

$$H_-(u, y) = \frac{1}{4}(u^2 - y^2)^2 + (b+c)u^2 - cy^2 + gu. \quad (10)$$

与系统(6) 不同, 在  $(b, c, g)$ - 三参数空间中, 系统(9) 并不总是存在周期环域(因而对应的系统(1) 并不总有周期行波解). 由于我们的兴趣仍在于研究数学物理方程(1) 的周期与孤立行波解, 故仍只考虑存在包围中心的周期环域的相图. 因此, 如果系统(9) 不存在中心型奇点, 我们将不给出其相图.

类似于上一节的讨论, 我们只研究  $g \leq 0$  情形下(9) 的相图.

首先, 当  $b \neq 0$  时, 若  $2c + \frac{g^2}{4b^2} > 0$ , 由  $C_V: u^2 - y^2 + 2c = 0$  与  $Y(u, y) = 0$  可确定系统(9) 的两奇点  $B_{1,2} \left[ -\frac{g}{2b}, \pm \sqrt{2c + \frac{g^2}{4b^2}} \right]$  (当  $2c + \frac{g^2}{4b^2} = 0$  时仅一奇点  $B_{12} \left[ -\frac{g}{2b}, 0 \right]$ , 当  $2c + \frac{g^2}{4b^2} < 0$  时,  $B_1, B_2$  均不存在).

其次, 无论  $c$  取何值, 系统(9) 所定义的向量场都存在两条竖直等倾线  $y = 0$  ( $u$  轴) 和  $C_V: u^2 - y^2 + 2c = 0$  (双曲线或直线). 同时, 系统(9) 的水平等倾线(仍记为  $C_H$ ) 方程可表示为

$$C_H: y^2 = \frac{f(u)}{u} = \frac{u^3 + 2(b+c)u + g}{u}. \quad (11)$$

因此, 当且仅当  $uf(u) \geq 0$  时, 在相平面上才出现曲线  $C_H$  的实分支. 在条件  $uf(u) \geq 0$  下, 系统(9) 在  $u$  轴上的奇点的坐标满足三次方程  $f(u) = 0$ , 由于  $f'(u) = 3u^2 + 2(b+c)$ , 故当  $b+c \geq 0$  时, 函数  $f(u)$  是单调增加的, 方程组(9) 只有一个位于正  $u$  轴上的奇点  $A_3(u_3, 0)$ , 即  $C_H$  只有一个开实分支, 不存在闭分支. 当  $b+c < 0$  时, 由判别式  $\Delta = \left[ \frac{g}{2} \right]^2 + \left[ \frac{2}{3}(b+c) \right]^3$  可知, 当  $g^2 = g_0^2 = -\frac{32}{27}(b+c)^3$  时, 方程组(9) 在正  $u$  轴上有一个简单奇点  $A_3$ , 在负  $u$  轴上有一个二重奇点  $A_{12} \left[ -\frac{g}{2b}, 0 \right]$ , 即  $C_H$  有两个实分支. 当  $g^2 < g_0^2$  时, 系统(9) 在负  $u$  轴上有两个简单奇点  $A_1(u_1, 0), A_2(u_2, 0)$ , 在正  $u$  轴上有一个简单奇点  $A_3(u_3, 0)$ , 即  $C_H$  有三个实分支, 并且这些实分支都不是闭的.

注意到以下事实成立:

- 1) 若  $b < 0, c < 0$ , 则  $g_0^2 = -8b^2c$  和  $g_0^2 \equiv -\frac{32}{27}(b+c)^3$  满足  $g_0^2 \leq g_0^2$ , 等号仅当  $b = 2c$

时成立·

2) 若  $c < 0, b > 0, b + c < 0$ , 则当  $c < -4b$  时有  $g_0^2 > g^2$ ; 当  $c = -4b$  时有  $g_0^2 = g^2$ ; 当  $c > -4b$  时有  $g_0^2 < g^2$

综合以上讨论, 我们得到:

i) 系统(9)在  $u$  轴上至多存在三个平衡点  $A_1, A_2$  与  $A_3$ ·

ii) 当  $c < 0$  时, 若曲线  $C_H$  与  $C_V$  有交点, 则当  $2c + \frac{g^2}{4b^2} > 0$  (即  $g_0^2 \geq g^2$ ) 时, 系统(9)在  $C_V$  上有两个平衡点  $B_{1,2} \left[ -\frac{g}{2b}, \pm \sqrt{2c - \frac{g^2}{4b^2}} \right]$ ; 当  $g^2 = g_0^2$  时, 系统(9)在  $C_V$  上有一个二重平衡点  $B_{1,2} \left[ -\frac{g}{2b}, 0 \right]$ , 且  $B_{1,2}$  必与  $A_1, A_2, A_3$  中的某一个重合·

对于系统(9), 我们分别得到  $g = 0$  和  $g < 0$  时  $(b, c)$  参数平面上的相图分支如图3和图4所示·

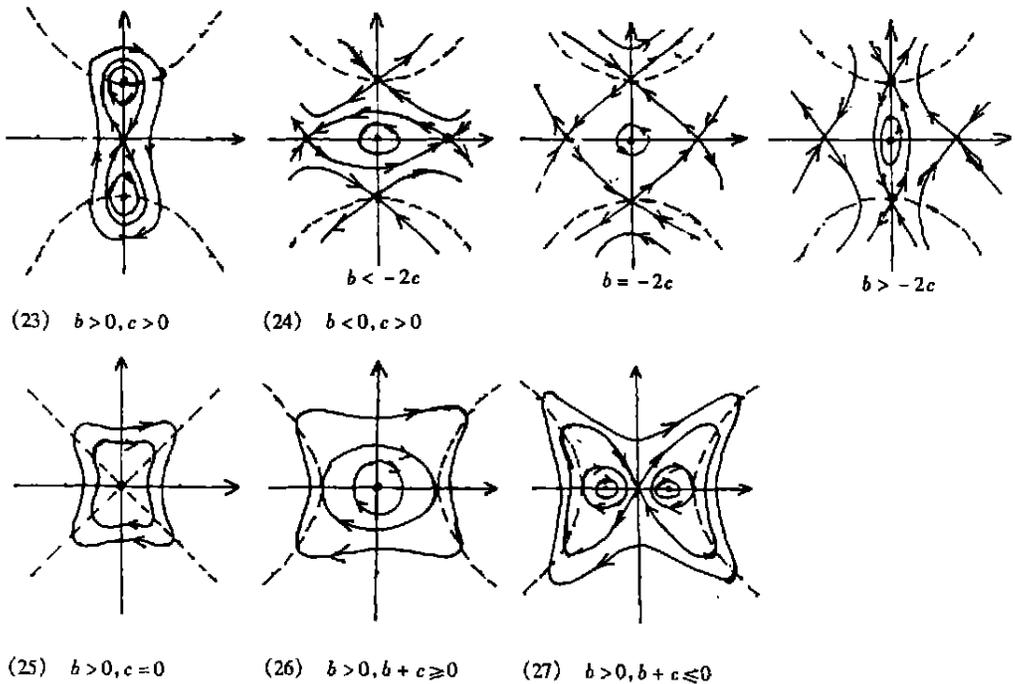


图3  $y = 1, g = 0$

由图3与图4, 我们显然可得到下述结论:

命题3 设  $c > 0$ , 则

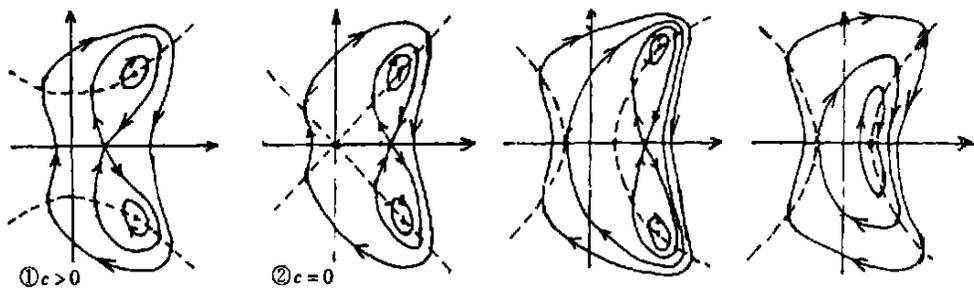
i) 当  $g = 0$  时, 系统(9)存在两种不同的拓扑相图·

ii) 当  $g < 0$  时, 若  $b + c < 0$ , 则系统(9)仅存在一种拓扑相图; 若  $b + c > 0$ , 系统(9)仅存在一种拓扑相图·

命题4 设  $c = 0$ , 则

i) 当  $g = 0$  时, 系统(9)仅存在一种拓扑相图;

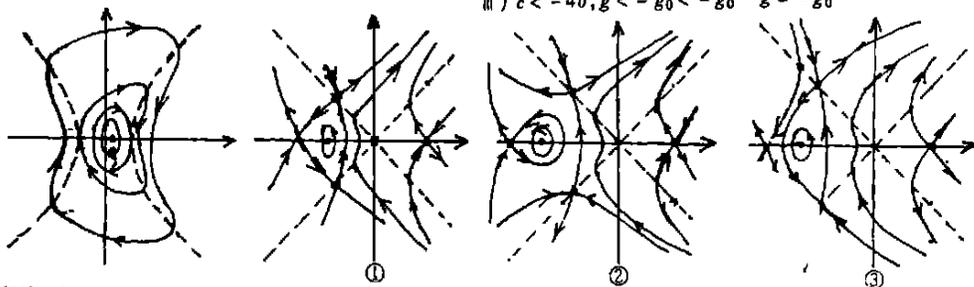
ii) 当  $g < 0$  时, 考虑到系统(9)的轨道与竖直等倾线  $y = \pm u$  的相互关系, 系统(9)当  $b + c > 0$  时和  $b + c < 0$  各存在两种不同的拓扑相图·



①  $c > 0$   
(28)  $b + c > 0, b > 0$

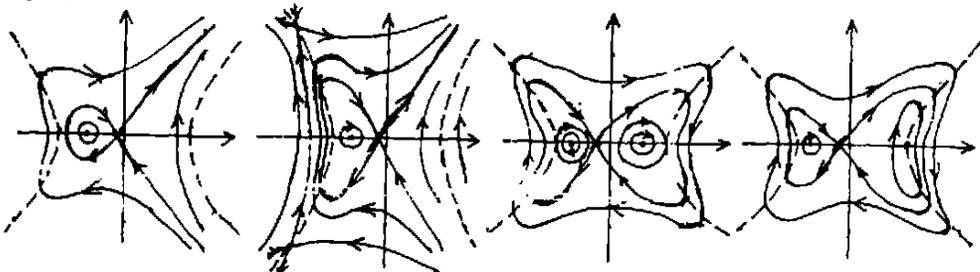
②  $c = 0$

(29) ①  $b + c \geq 0, b > 0, c < 0, g < -\bar{g}_0$   
②  $b + c < 0, b > 0, c < 0,$   
i)  $c > -4b, g < -\bar{g}_0 < -g_0, g = -\bar{g}_0$   
ii)  $c = -4b, g < -\bar{g}_0 = g_0$   
iii)  $c < -4b, g < -\bar{g}_0 < -g_0, g = -\bar{g}_0$   
(30) ①  $b + c > 0, b > 0, c < 0, g = -\bar{g}_0$   
②  $b + c < 0, b > 0, c < 0,$



(31)  $b + c \geq 0, b > 0, c < 0, -\bar{g}_0 < g < 0$   
②  $b + c < 0, b > 0, c < 0, -\bar{g}_0 < g < -g_0$

(32) ①  $b + c < 0, b < 0, c > 0, g < -g_0 < 0,$   
②  $b + c < 0, b < 0, c = 0, -g_0 < g < 0$

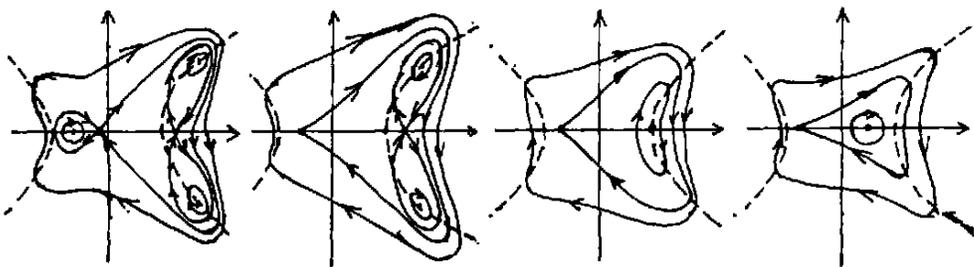


(33)  $b + c < 0, b = 0, c < 0, -g_0 < g < 0$

(34)  $b + c < 0, b < 0, c < 0, b \neq 2c, -g_0 < g < -\bar{g}_0$

(35) ①  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c < -4b, g < -\bar{g}_0$   
②  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c \geq -4b, g > -g_0$

(36)  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c < -4b, g = -\bar{g}_0$



(37)  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c < -4b, -g_0 < g < -\bar{g}_0$

(38)  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c < -4b, g = -g_0$

(39)  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c = -4b, g = -g_0$

(40)  $b + c < 0, b > 0, c < 0, c > -4b, g = -g_0$

图4  $\gamma = 1, g < 0$

命题5 设  $c < 0$ , 则

- i) 当  $g = 0$  时, 系统(9) 存在两种不同的拓扑相图;  
 ii) 当  $g < 0$  时, 若  $b + c < 0$ , 则系统(9) 存在 9 种不同的拓扑相图; 若  $b + c \geq 0$ , 系统(9) 存在 3 种不同的拓扑相图.

### 3 系统(4)所定义的行波解

由以上讨论可见, 当参数  $b$ , 波速  $c$  和积分常数  $g$  连续地改变时, 微分方程组(6) (或(9)) 所定义的相轨线是多种多样的, 从而偏微分方程(1) 的行波解所对应的常微分方程(4) 的相图也是多种多样的. 本文的目的在于研究偏微分方程(1) 的行波解, 因此, 我们需要回到由“时间变量”  $\xi$  所确定的微分方程组(4). 方程组(4) 与方程组(6) (或(9)) 的不同之处在于, 方程组(4) 的第二个方程的分母中含有二次函数  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma$ , 因此, 当  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  时,  $\frac{dy}{d\xi}$  不连续, 从而方程(6) (或(9)) 的光滑相轨线所对应的连续解曲线  $(u(\xi), y(\xi))$  穿越“奇线”  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  时, 会出现由导数不连续性导致的尖峰波(非光滑波).

我们将用下列引理 1 来描述行波的上述不光滑性. 事实上, 只要不在“奇线”  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  上, (1) 的解轨道与(6) 及(9) 的解轨道完全相同, 仅在“奇线”  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  上,  $\frac{dy}{d\xi}$  不连续. 因此, 在从“时间变量”  $\tau$  变回到“时间变量”  $\xi$  时, 我们必须考虑在上述“奇线” 近旁相图的横坐标  $u(\xi)$  关于  $\xi$  变化的性质. 下面的引理就描述状态  $(u(\xi), y(\xi))$  穿越奇线时  $u(\xi)$  的行为.

引理 1 设相点  $(u(\xi), y(\xi))$  当  $\xi = \xi_0 \neq 0$  时穿越二次曲线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  上的一个点, 则(4) 的解  $(u(\xi), y(\xi))$  的横坐标  $u(\xi)$  在  $\xi = \xi_0$  连续, 但  $u'(\xi)$  过  $\xi_0$  时从  $-\infty$  变为  $\infty$  或从  $\infty$  变为  $-\infty$ . 换言之, 点  $(\xi_0, u(\xi_0))$  在  $u(\xi)$  的波形图上是一个尖点.

证 设  $(u_0, y_0)$  是方程(4) 的常点并满足  $\gamma u_0^2 + y_0^2 + 2c\gamma = 0$ , 则在  $(u_0, y_0)$  近旁(且在  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  的两侧), 方程(4) 可近似地表示为

$$\frac{du}{d\xi} = y, \quad \pm \varepsilon \frac{dy}{d\xi} = -[u_0(u^2 + \gamma y_0^2 + 2(b+c)) + g] + \varepsilon_1 = A_0 + \varepsilon_1$$

由第二个方程可得  $y = \frac{1}{\pm \varepsilon} (A_0 + \varepsilon_1) \xi$ . 注意到在“奇线”  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  上  $A_0 \neq 0$ ,  $\xi_0 \neq 0$ . 因此, 当  $(u, y) \rightarrow (u_0, y_0)$ ,  $\xi \rightarrow \xi_0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow \pm \infty$ , 由第一个方程可知, 当  $\xi \rightarrow \xi_0$  时,  $\frac{du}{d\xi} \rightarrow \pm \infty$ , 这说明在  $u(\xi)$  的波形曲线图上, 点  $(\xi_0, u(\xi_0))$  是尖点.  $\square$

如前所述, 方程(6) (或(9)) 的周期解对应于(2) 的周期行波, 连接鞍点及退化鞍点的同宿轨道对应于(2) 的孤立行波. 因此, 按照前两节的讨论(命题 1~5), 只要相轨线是同一基本情形, 其对应的波形图的结构都是相同的(只有振幅、周期、初值、不光滑点位置和孤立波的开口方向等的不同). 于是, 我们可按参数空间的不同, 将周期行波和孤立行波分类如下.

#### 1) 光滑周期波与孤立波

如前所述, 除在“奇线”  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  上的点外, 方程组(5) 的拓扑相图与方程组(4) 的拓扑相图是完全相同的. 如果系统(4) 的周期轨道与上述“奇线” 不相交, 则从方程(5) 到(4) 的变换过程中, 自变量  $\tau$  到  $\xi$  的变换不会影响轨道的光滑性. 因此, 根据引理 1 和命题 1 5, 我们有以下结论.

定理 1  $\gamma = 1$  时, 偏微分方程(1) 总有(光滑与非光滑的) 周期与孤立行波解存在, 且当  $c$

$\geq 0$ 时, 所有行波解都是光滑的. 其余情形下, 无论  $\gamma = 1$  还是  $\gamma = -1$ , 方程组(5) 的凡不与竖直等倾线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  相交或相切的周期轨都产生光滑周期波; 方程组(5) 的凡不与竖直等倾线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  相交或相切的同宿轨都产生光滑孤立波.

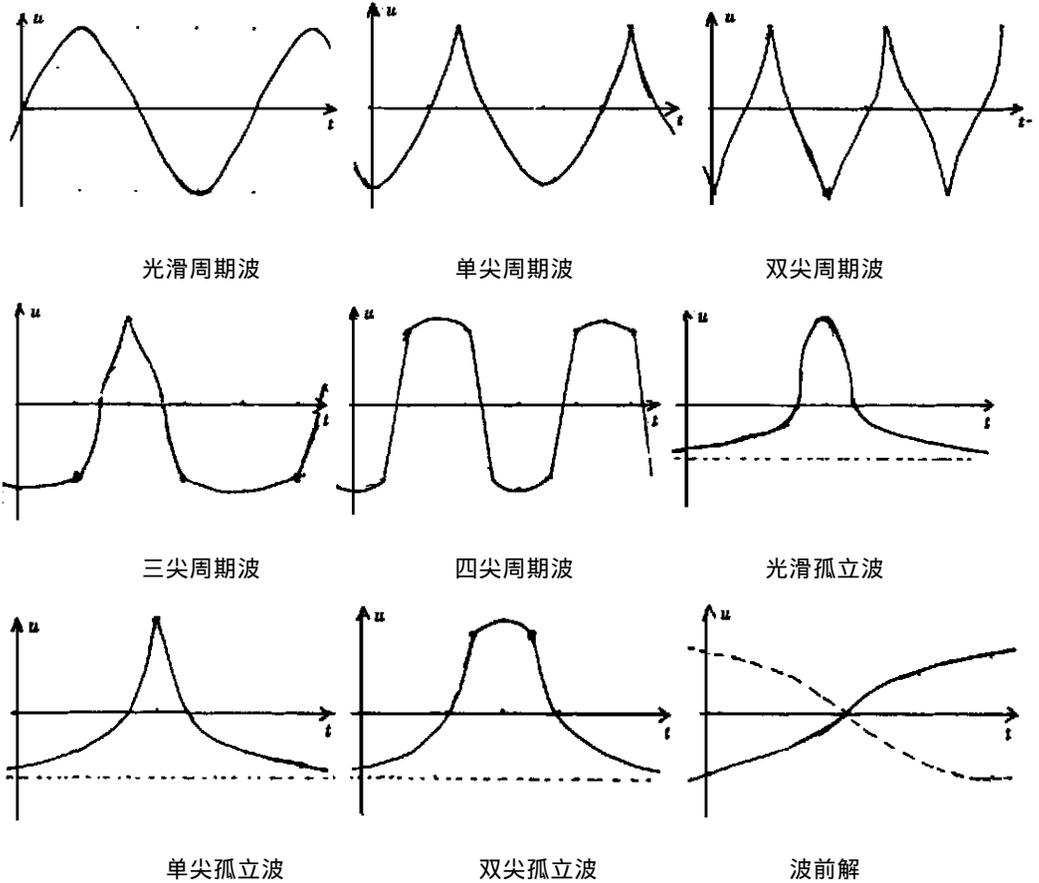


图5 各种波形

## 2) 非光滑周期波和孤立波

当系统(5)的周期轨道和同宿轨道与竖直等倾线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  相切或相交时, 偏微分方程(1) 的行波解  $u(\xi)$  的波形图将产生尖点. 尖点的个数由周期轨道或同宿轨道与该竖直等倾线的交点个数确定. 从第1、2节的讨论可见, 系统(5) 的周期轨道或同宿轨道可能与该竖直等倾线有1~4个交点, 因此, 非线性波动方程(1) 将分别存在单尖、双尖、三尖或四尖的周期波或孤立波.

**定理2** 无论  $\gamma = 1$  还是  $-1$ , 方程组(5) 的凡与竖直等倾线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  相交或相切的周期轨都产生非光滑周期波; 凡与竖直等倾线  $\gamma u^2 + y^2 + 2c\gamma = 0$  相交或相切的同宿轨都产生非光滑孤立波.

例如, 我们有以下结果:

**定理3** 当  $\gamma = 1, g < -g_0 < 0, b + c \geq 0, c < 0$  时, 如果

- 1)  $h$  介于  $H_+(A)$  与  $H_+(\sqrt{-2c}, 0)$  之间, 则方程(1) 存在四尖周期波;
- 2)  $h = H_+(\sqrt{-2c}, 0)$ , 则方程(1) 存在三尖周期波;
- 3)  $h$  介于  $H_+(\sqrt{-2c}, 0)$  与  $H_+(\sqrt{-2c}, 0)$  之间, 或介于  $H_+(B_{1,2})$  与  $H_+(A)$  之间. 则

方程(1) 存在双尖周期波;

4)  $h = H_+(-\sqrt{-2c}, 0)$ , 则方程(1) 存在单尖周期波;

5)  $h$  在  $H_+(-\sqrt{-2c}, 0)$  之外, 则方程(1) 存在光滑周期波;

6)  $h = H_+(A)$ , 则方程(1) 存在两条双尖孤立波。

偏微分方程(1) 的所有可能的波形图如表 5 所示。

致谢 作者谨对李继彬教授给予的建议及帮助表示深深的谢意。

### [参 考 文 献]

- [1] Philip Rosenau. On nonanalytic solitary waves formed by a nonlinear dispersion[J]. Physics Letters A, 1997, 230(5/6): 305—308.
- [2] Fuchssteiner B. The Lie algebra structure of nonlinear evolution equations admitting infinite dimensional abelian symmetry groups[J]. Progr Theoret Phys, 1981, 65(2): 861.
- [3] 李继彬, 李存富. 平面三次 Hamilton 系统与  $(E_3)$  的极限环分布[J]. 数学学报, 1985, 28(4): 510—522.
- [4] Olver P J, Rosenau. Tri\_Hamiltonian duality between solitons and solitary\_wave solutions having compact support[J]. Phys Rev E, 1996, 53(2): 1900—1906.
- [5] 李继彬, 李存富. 非线性微分方程[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1987.
- [6] 张芷芬. 微分方程定性理论(现代数学丛书)[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

## The Smooth and Nonsmooth Travelling Wave Solutions in a Nonlinear Wave Equation

LI Shu\_min

(Institute of Science, Kunming University of Science and  
Technology, Kunming 650093, P R China)

**Abstract:** The travelling wave solutions (TWS) in a class of P. D. E. is studied. The travelling wave equation of this P. D. E. is a planar cubic polynomial system in three parameter space. The study for TWS becomes the topological classifications of bifurcations of phase portraits defined by the planar system. By using the theory of planar dynamical systems to do qualitative analysis, all topological classifications of the cubic polynomial system can be obtained. Returning the results of the phase plane analysis to TWS,  $u(\xi)$ , and considering discontinuity of the right side of the equation of TWS when  $\xi = x - ct$  is varied along a phase orbit and passing through a singular curve, all conditions of existence of smooth and nonsmooth travelling waves are given.

**Key words:** nonlinear wave equation; solitary travelling wave; periodic travelling wave; dissmoothness of wave