文章编号: 1000_0887(2001 10_1017_05

Benjamin 方程的 B¾cklund 变换、非线性叠加公式及无穷守恒律*

张鸿庆, 张玉峰

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024

(我刊编委张鸿庆来稿

摘要: 利用屠格式求出了 Benjamin 方程的 B¾cklund 变换、精确孤波解、非线性叠加公式及其无穷守恒律• 这种算法具有普适性•

关 键 词: Benjamin 方程; B¾cklund 变换; 无穷守恒律

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

文献[1] 指出, 一些典型的非线性波动方程具有 5 个共同特点: ①有孤立子解; ②有无穷多守恒律; ③可用散射反演方法求解; ④具有 B¾cklund 变换; ⑤可化为完全可积的 Hamilton 系统• 这几个方面相互联系, 它们都反映了该方程所描述的物理现象的某种稳定性和不变性; 从方程的 B¾cklund 变换入手, 可望提出上述的内在联系• 屠格式是求带参数的 B¾cklund 变换简单而有效的方法, 其基本思想是:

设非线性发展方程

$$w_{tt} = F(w) \tag{1}$$

的 B¾cklund 变换为:

$$u_t = f(u, v, u_x, v_x, \cdots), \quad v_t = g(u, v, u_x, v_x, \cdots)• \tag{2}$$

令 $u = w + w'$, $v = w - w'$, w 和 w' 为方程(1) 的解, 即

$$w_{tt} = F(w), \quad w'_{tt} = F(w')• \tag{3}$$

将(3 式中两式分别相加和相减得:

$$u_{tt} = P(u, v), \quad v_{tt} = Q(u, v), \tag{4}$$

其中 $P(u, v) = F\left(\frac{u+v}{2}\right) + F\left(\frac{u-v}{2}\right), \quad Q(u, v) = F\left(\frac{u+v}{2}\right) - F\left(\frac{u-v}{2}\right)•$

由(2 式求出 u_{tt}、v_{tt} 并与(4) 式比较就引出一组关于 f、g 的非线性偏微分方程组, 由此求出 f 和 g, 即可得到带有参数的 B¾cklund 变换• 下面我们就用屠格式求出著名的 Benjamin 方程的

* 收稿日期: 2000_01_03; 修订日期: 2001_04_20
基金项目: 国家 973 项目资助课题(G1998030600
作者简介: 张鸿庆(1936— ,男, 黑龙江人, 教授, 博士生导师, 现主要从事数学机械化与孤立子理论研究.

带参数的 Bäcklund 变换，由此进一步求出该方程的精确孤波解、非线性叠加公式及无穷守恒律•

1　Benjamin 方程的 Bäcklund 变换

对 Benjamin 方程

$$h_{tt} + q(h^2)_{xx} + r h_{xxxx} = 0, \tag{5}$$

q, r 均为常数•　令 $h = w_x$ 并代入(5) 得:

$$w_{tt} = -2q w_x w_{xx} - r w_{xxxx}• \tag{6}$$

由(4) 知,

$$u_{tt} = -q(u_x u_{xx} + v_x v_{xx}) - r u_{xxxx}, \tag{7}$$

$$v_{tt} = -q(u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) - r v_{xxxx}• \tag{8}$$

令(5) 的 Bäcklund 变换为:

$$u_t = \alpha v_{xx} + f(u, v, u_x), \tag{9a}$$

$$v_t = \beta u_{xx} + g(v, u, v_x), \tag{9b}$$

则

$$\begin{aligned} u_{tt} = {} & \alpha\beta u_{xxxx} + (\alpha f_{u_x} + \alpha g_{v_x}) v_{xxx} + \alpha g_{v_x v_x} v_{xx}^2 + (2\alpha g_{v v_x} v_x + {} \\ & \alpha g_v + 2\alpha g_{u v_x} u_x v_{xx} + \alpha f_u) v_{xx} + (f_{u_x}^2 + \alpha g_u + \beta f_v) u_{xx} + {} \\ & 2\alpha g_{uv} u_x v_x + \alpha g_{uu} u_x^2 + f f_u + g f_v + f_u f_{u_x} u_x + f_{u_x} f_v v_x + \alpha g_{vv} v_x^2• \end{aligned}$$

该式与(7) 右边比较 u_{xxxx}, v_{xxx}, v_{xx}^2, u_{xx}, v_{xx} 的系数分别有

$$\alpha\beta = -r, \tag{10}$$

$$\alpha g_{v_x} + \alpha f_{u_x} = 0, \tag{11a}$$

$$\alpha g_{v_x v_x} = 0, \tag{12a}$$

$$2\alpha g_{v v_x} v_x + \alpha g_v + 2\alpha g_{u v_x} u_x + \alpha f_u = -q v_x, \tag{13a}$$

$$\alpha g_u + \beta f_v + f_{u_x}^2 = -q u_x, \tag{14a}$$

$$2\alpha g_{uv} u_x v_x + \alpha g_{vv} v_x^2 + \alpha g_{uu} u_x^2 + f f_u + g f_v + f_u f_{u_x} u_x + f_{u_x} f_v v_x = 0• \tag{15a}$$

同理, 由(9a)、(9b) 计算出 v_{tt} 并与(8) 右端比较得到下列方程组:

$$\beta(f_{u_x} + g_{v_x}) = 0, \tag{11b}$$

$$\beta f_{u_x u_x} = 0, \tag{12b}$$

$$2\beta f_{u u_x} u_x + \beta f_u + 2\beta f_{v u_x} v_x + \beta g_v = -q v_x, \tag{13b}$$

$$\beta f_v + \alpha g_u + g_{v_x}^2 = -q u_x, \tag{14b}$$

$$\beta f_{uu} u_x^2 + 2\beta f_{uv} u_x v_x + \beta f_{vv} v_x^2 + g g_v + f g_u + g_v g_{v_x} v_x + g_{v_x} g_u u_x = 0• \tag{15b}$$

由(12a) 和(12b) 知:

$$g_{v_x v_x} = f_{u_x u_x} = 0•$$

由(11a) 和(11b) 知: $g_{v_x} = -f_{u_x}$, 由此可设

$$f = f_1 + h u_x, \quad g = g_1 - h v_x, \tag{16}$$

f_1、g_1 和 h 均为 u、v 的函数•

将(16) 代入(14a) 得:

$$\alpha g_{1v} + \beta f_{1v} + h^2 = 0, \quad \alpha h_u = 0, \quad \beta h_v = -q, \tag{17}$$

于是 $h = -\dfrac{q}{\beta}v + \gamma$,

γ 为任意常数. 将(16) 代入(13a) 得:

$$-3\alpha h_v = -q,\quad g_{1v} + f_{1v} = 0. \tag{18}$$

将f, g 代入(15a) 并比较得:

$$\alpha g_{1uu} = \alpha g_{1vv} = 2\alpha g_{1uv} = 0, \tag{19}$$

$$2hf_{1u} + g_1 h_v = 0, \tag{20}$$

$$f_1 f_{1u} + f_{1v} g_1 = 0. \tag{21}$$

由(19),假定 $g_1 = \lambda_1 + \lambda_2 u + \lambda_3 v$, 由(18) 知:

$$f_{1u} = -g_{1v} = -\lambda_3,$$

可设$f_1 = -\lambda_3 u + k(v)$. 将$f$、$g$ 代入(15b) 知:

$$\beta f_{1vv} + 2hh_v = 0, \tag{22}$$

$$g_1 h_v + 2hg_{1v} = 0, \tag{23}$$

$$g_1 g_{1v} + g_1 f_1 = 0. \tag{24}$$

由 h, f_1 及(22) 可知:

$$f_1 = \sigma_0 + \sigma_1 v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + \left(\frac{q}{3r}\right)^2 \alpha v^3. \tag{25}$$

将 h, g_1 和f_1 代入(20) 并比较 u, v 的系数知: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, 从而 $g_1 = 0$. (21), (23) 和(24) 式自然成立. 将(25), h 和 $g_1 = 0$ 代入(17) 有:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma^2}{r}\alpha.$$

所以

$$f = \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + \left(\frac{q}{3r}\right)^2 \alpha v^3 + \left(-\frac{q}{\beta}v + \gamma\right)u_x, \tag{26}$$

$$g = -\left(-\frac{q}{\beta}v + \gamma\right)v_x. \tag{27}$$

故方程(6) 的 Bäcklund 变换为:

$$u_t = \alpha v_{xx} + \sigma_0 + \frac{\gamma^2\alpha}{r}v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + \left(\frac{q}{3r}\right)^2 \alpha v^3 + \left(-\frac{q}{\beta}v + \gamma\right)u_x,$$

$$v_t = \left(\beta u_x + \frac{q}{2\beta}v^2 - \gamma v\right)_x.$$

由上述 Bäcklund 变换可求方程(5) 的精确行波解.

令 $w' = 0$, 则 $u = v = w$, (26) ~ (27) 变为:

$$w_t = \alpha w_{xx} + \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha w + \frac{q\gamma}{3r}w^2 + \left(\frac{q}{3r}\right)^2 \alpha w^3 + \left(-\frac{q}{\beta}w + \gamma\right)w_x,$$

$$w_t = \beta w_{xx} - \left(-\frac{q}{\beta}w + \gamma\right)w_x.$$

令(6) 的行波解为 $w = f(z)$, $z = x + ct$, c 为行波速度, 代入上式的第二式并取 $\gamma = c$, 积分常数为 β^2, 于是有 $f' = \beta^2 - \dfrac{q}{6r}f^2$. 积分之得:

$$f = \beta\sqrt{\frac{6r}{q}}\tanh\left(\frac{x+ct}{2}\right).$$

所以方程(5) 的钟状孤波解为:

$$h = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{6r}{q}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x+\gamma t}{2}\right).$$

利用上述的 Bäcklund 变换也可得到 Benjamin 方程的非线性叠加公式.

记 $w_0 \xrightarrow{\gamma} w_1$ 表示解 w_1 由带参数 γ 的 Bäcklund 变换作用于解 w_0 得来, 设 $w_0 \xrightarrow{\gamma_1} w_1 \xrightarrow{\gamma_2} w_3$, $w_0 \xrightarrow{\gamma_2} w_2 \xrightarrow{\gamma_1} w_3$, 利用 Bäcklund 变换的可换性知:

$$(w_1 - w_0)_t = \left[\beta(w_1 + w_0)_x + \frac{q}{2\beta}(w_1 - w_0)^2 - \gamma_1(w_1 - w_0)\right]_x,$$

$$(w_2 - w_0)_t = \left[\beta(w_2 + w_0)_x + \frac{q}{2\beta}(w_2 - w_0)^2 - \gamma_2(w_2 - w_0)\right]_x,$$

$$(w_3 - w_1)_t = \left[\beta(w_3 + w_1)_x + \frac{q}{2\beta}(w_3 - w_1)^2 - \gamma_2(w_3 - w_1)\right]_x,$$

$$(w_3 - w_2)_t = \left[\beta(w_3 + w_2)_x + \frac{q}{2\beta}(w_3 - w_2)^2 - \gamma_1(w_3 - w_1)\right]_x.$$

分别将前二式与后二式相减, 然后将所得结果相加即得所求的叠加公式:

$$w_3 = \frac{1}{\frac{q}{\beta}(w_2 - w_1) + \gamma_1 - \gamma_2}\Big[2\beta(w_2 - w_1)_x + \left(\gamma_2 + \frac{q}{\beta}(w_1 - w_2)\right)(w_0 - w_1 - w_2) + \gamma_1(2w_1 - w_0) + D(t)\Big],$$

其中 $D(t)$ 为关于 t 的任意函数.

2 Benjamin 方程的无穷守恒律

将 $u = 2w - v$ 代入 Bäcklund 变换得:

$$v_t = \left[-\beta v_x + \frac{q}{2\beta}v^2 - \gamma v + 2\beta w_x\right]_x, \tag{28}$$

$$2w_t = \alpha v_{xx} + \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + \left(\frac{q}{3r}\right)^2\alpha v^3 + \left(-\frac{q}{\beta}v + \gamma\right)u_x + v_t, \tag{29}$$

令
$$v = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \gamma^{-n}$$

并代入(28 且比较 γ 的各幂次的系数得:

$$f_{1t} = (-\beta f_{1x} - f_2)_x \qquad (n = 1),$$

$$f_{nt} = \left[-\beta f_{nx} + \frac{q}{2\beta}\sum_{i+j=n} f_i f_j - f_{n+1}\right]_x \qquad (n \geqslant 2).$$

将其代入(29 即可得到 f_i $(i = 1, 2, \dots)$ 的递推公式.

[参 考 文 献]

[1] 屠规彰. Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换与守恒律[J]. 应用数学学报, 1981, **4**(1): 63—68.

[2] LU Hong_jun, WANG Ming_xin. Exact soliton solutions of some nonlinear physical models[J]. Physics Letters A, 1999, (255): 249—252.

[3] LIU Chun_ping, ZHOU Ru_guang, ZHOU Ming_ru. A simple method to construct the traveling wave solutions to nonlinear evolution equations[J]. Physics Letters A, 1998, (246): 113—116.

[4] Kaup David J, Newell A C. An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation[J]. J Math Phys, 1978, **19**(4): 798—800.

[5] ZHANG Jie_fang. Multiple soliton solutions of the dispersive long_wave equation[J]. Chin Phys Lett, 1999, **16**(1): 4—5.

B¾cklund Transformation, Nonlinear Superposition Formulae and Infinite Conserved Laws of Benjamin Equation

ZHANG Hong_qing, ZHANG Yu_feng

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P R China

Abstract: B¾cklund transformation, exact solitary wave solutions, nonlinear supperposition formulae and infinite conserved laws are presented by using TU_pattern. The algorithm involves wide applications for nonlinear evolution equations.

Key words: Benjamin equation; B¾cklund transformation; infinite conserved law