 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_1022_07

复合 g_收缩映射不动点定理及其应用*

云天铨

(华南理工大学 工程力学系, 广州 510641)

(我刊编委云天铨来稿)

摘要: 任一几何平均收缩比率小于 1(简称 g_收缩映射) 的由完备的非空度量空间 M 到 M 的复合序列映射, 复合周期映射有在 M 中的唯一的不动点• 文中给出定理应用于一组非线性微分方程以及扁壳轴对称弯曲的耦合的积分方程的解的存在和唯一性证明的应用例子•

关 键 词: 收缩映射; g_收缩映射; Banach 收缩映射定理; 泛函分析; 迭代法; 微分方程; 积分方程; 扁壳

中图分类号: O177.91; O343 文献标识码: A

引 言

收缩映射已有许多研究工作, 例如 Rhoades 在 1977 年比较了完备度量空间中各种不同定义的收缩映射(从 25 种基本型式变化而得的超过 100 多种型式) [1]• 至今这类研究仍在进行, 例如[2]• 本文研究基于 Banach 型的序列复合映射, 周期复合映射• 复合映射可以看作是下述许多情况的抽象描述: 如在一个过程或一个程序中不同阶段(时期) 用不同的规律(函数或映射) , 又如在解耦合的微分或积分或积分微分方程的迭代过程, 等等• 本文的主要结果是: 任一几何平均收缩比率小于 1(即 g_收缩映射) 的由完备的非空度量空间 M 到 M 的复合序列映射, 复合周期映射在 M 中有唯一的不动点• 这结果表明: 不管个别(部分) 的映射的收缩比率大小, 只要(总体的) 几何平均收缩比率小于 1, 不动点的存在和唯一性就可确保• 因此对收缩比率的限制松于 Banach 收缩映射定理对每一个映射(小于 1) 的要求•

本文给出两个应用本文定理的例: 一个是带初始条件的轮换的非线性微分方程组, 另一个是回转扁壳轴对称弯曲的耦合的积分方程•

虽然, 带初始条件的非线性微分方程

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(t,x), \quad x(a) = b, \tag{1}$$

如 f 连续并对 x 满足 Lipschitz 条件, 解的存在和唯一性已在许多教科书中作了证明(如[3] 用“Cauchy_Lipschitz 定理”, [4] 用“ Picard 定理”, 或[5]) , 但本文推广至一组“ 轮换型” 的带初始条件的非线性微分方程组

$$\mathrm{d}x_{i+1}/\mathrm{d}t = f_i(t, x_i), \quad x_i(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k;\ k+1 = 1)• \tag{2}$$

至于圆板和旋转扁壳非线性轴对称弯曲亦有大量的研究工作• 将问题转化为积分方程也

---

* 收稿日期: 2000_05_26; 修订日期: 2001_05_16
作者简介: 云天铨(1936—) , 男, 海南文昌人, 教授, 在数学、力学、证券、工程等领域发表论文 90 多篇; 3 次获省厅级自然科学奖、科技进步奖.

是一种解法。如[6]所述很难准确说谁是首先这样做，似乎Keller和Reiss[7]在圆板，Reissner[8]在扁壳较早地将问题转化为积分方程。虽然他们也用迭代法求解，并发现在$p_0 < 68.3$迭代过程收敛[7]，但理论的证明仍欠缺。本文应用本文定理，对回转扁壳由Marguerre理论导出的一组两个二阶常微分方程[8]，应用Green函数转化为耦合的积分方程[6,8]，证明积分方程有唯一解。

1 主要结果

下文研究序列映射$\{T_i\}$，$i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$。其中$T_i$映射$X_i$到$X_{i+1}$，$\forall X_i \subset M$，$M$是一完备的非空度量空间。

定义1.1 若一序列映射$\{T_i\}$，对每一$i \in \mathbf{N}$满足

$$T_i: X_i \to X_{i+1} \text{ 或 } x_{i+1} = T_i x_i, \qquad (x_i \in X_i \subset M), \tag{3}$$

递推并定义

$$x_{i+1} = T_i \circ T_{i-1} \circ \cdots \circ T_1 x_1 \equiv T^i x_1, \tag{4}$$

式中

$$T^i \equiv T_i \circ T^{i-1}, \ T^1 \equiv T_1 . \tag{5}$$

称T^i为复合序列映射，记号$F \circ G$表示映射F和G的复合。

定义1.2 我们称r_i为T_i的收缩比率，

$$r_i = \sup_{x, y \in X_i} [d(T^i x, T^i y) / d(T^{i-1} x, T^{i-1} y)] \geqslant 0, \tag{6}$$

式中$d(x, y)$表示x、y在M中距离，$T^0 \equiv 1$。显然

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant r_1 r_2 \cdots r_n d(x, y) \qquad (\forall x, y \in M). \tag{7}$$

定义1.3 我们称复合序列映射T^i为g_收缩映射，若存在一常数G使得对每一个$i \in \mathbf{N}$，其几何平均收缩比率G_i满足

$$0 \leqslant G_i = (r_1 r_2 \cdots r_i)^{1/i} < G < 1 \qquad (\forall i \in \mathbf{N}). \tag{8}$$

定理1 任一由完备的非空度量空间M到M的复合序列g_收缩映射在M中有唯一的不动点。

证明 设T^i为满足(8)式的复合序列映射。在M中任选一点y，令$x = T^1 y$，由(7)式，点$\{T^n y\}$的序列，满足

$$d(T^{n+1} y, T^n y) \leqslant G_n^n d(T_1 y, y) \qquad (n > 0).$$

由三角不等式，当$m \geqslant n$时，有

$$d(T^m y, T^n y) \leqslant d(T^m y, T^{m-1} y) + d(T^{m-1} y, T^{m-2} y) + \cdots + d(T^{n+1} y, T^n y) \leqslant$$
$$(G_{m-1}^{m-1} + G_{m-2}^{m-2} + \cdots + G_n^n) d(T_1 y, y).$$

由(8)式，得

$$d(T^m y, T^n y) \leqslant (G^{m-1} + G^{m-2} + \cdots + G^n) d(T_1 y, y),$$
$$\lim_{m, n \to \infty} d(T^m y, T^n y) \leqslant [G^n / (1 - G)] d(T_1 y, y) = 0.$$

因M完备，序列$\{T^n y\}$在M中有一极限点z。显然，z是T^n的不动点，即$T^n z = z$。这一不动点是唯一的。因为如果有两个不动点z和w，即$T^n z = z$及$T^n w = w$，则$d(z, w) = d(T^n z, T^n w) \leqslant G^n d(z, w) \to 0 (n \to \infty)$，即$z$唯一。 (证毕)

显然这定理允许$\{r_n\}$序列中部分的映射的收缩比率$r_i \geqslant 1$只要(8)式成立；而Banach收

缩映射定理要求每一映射的收缩比率小于 1。所以, 本定理更一般。当 $T_i = T$, 对 $\forall i \in \mathbf{N}$ 时, 映射 T^i 变成普通映射, 定理 1 变为 Banach 收缩映射定理。

在实际应用上重要的一类复合序列映射是复合周期映射。

定义 1.4　在复合序列映射 T^i 中如有

$$T_{k+i} = T_i \qquad i \in \mathbf{N}, \tag{9}$$

则称为周期为 k 的复合周期映射, 记作 P_j^n。其中右上标 n 代表周期(循环) 次数, 下标 $j \in K = (1, 2, \cdots, k)$ 代表映射对应空间 X_j, 有

$$P_j^n = P_j \circ P_j^{n-1}, \tag{10}$$

$$P_j = T_{k-j} \circ T_{k-j-1} \circ T_{k-j-2} \circ \cdots \circ T_{j+1} \circ T_j, \tag{11}$$

$$P_j: X_j \to X_{j+k} = X_j, \tag{12}$$

或

$$x_{k+j} = P_j x_j \qquad x_j, x_{k+j} \in X_j。 \tag{13}$$

定理 2　任一由完备的非空度量空间 M 到 M 的复合周期 g_收缩映射在 M 中有唯一的一组 k 个互相连系的不动点, 即存在 $x_j^* \in X_j \subset M$, 使

$$P_j x_j^* = x_j^*, \ T_j x_j^* = x_{j+1}^*, \ x_{k+j}^* = x_j^* \qquad j \in K。 \tag{14}$$

证明　对于复合周期 g_收缩映射情形, (7) 式为:

$$d(P_j^n x, P_j^n y) \leqslant \left(\prod_{j=1}^{k} r_j\right)^n d(x, y) = (G_k^k)^n d(x, y), \qquad (\forall x, y \in X_j \subset M), \tag{15}$$

式中　$G_k = \left(\prod_{j=1}^{k} r_j\right)^{1/k} < G < 1$。

与定理 1 的安排一样, 用 $P_j^n (j \in K)$ 代替 T^i, 可以证明 P_j^n 有唯一的不动点 x_j^*, 即 $P_j^n x_j^* = x_j^*$, 于是 $P_j x_j^* = P_j(P_j^n x_j^*) = P_j^{n+1} x_j^* = x_j^*$, $(n \to \infty)$。又 $T_j x_j^* = x_{j+1}^* = T_{j+k} x_{j+k}^* = x_{j+k+1}^*$, 故 $x_{j+k}^* = x_j^*$, $(j \in K)$。　　(证毕)

当 $k = 1$, 定理 2 即为 Banach 收缩映射定理。

2　应　　用

下文给出两个应用例子。

定理 3　设 $f_i(t, x_i)$ 在矩形 $R_i = \{(t, x_i): |t - a_i| \leqslant h_i, |x_i - b_i| \leqslant \lambda_i\}$ 有定义, 连续并对 x_i 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L_i > 0$ 使

$$|f_i(t, u) - f_i(t, v)| \leqslant L_i |u - v| \qquad (t, u), (t, v) \in R_i, \tag{16}$$

则一组"轮换型"非线性微分方程带动初始条件

$$\mathrm{d}x_{i+1}/\mathrm{d}t = f_i(t, x_i), \ x_i(a_i) = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, k; k + 1 = 1) \tag{17}$$

在 h_i 上有唯一解 $x_i^*(t)$。

证明　(17) 式等价于求解积分方程

$$x_{i+1}(t) = \int_{a_{i+1}}^{t} f_i(v, x_i(v))\mathrm{d}v + b_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, k; k + 1 = 1)。 \tag{18}$$

记　$m_i = \sup_{(t, x_i) \in R_i} |f_i(t, x_i)|, \qquad i \in K = (1, 2, \cdots, k)$。

$x_i \in X_i = C[a_i - h_i, a_i + h_i] \subset M$, X_i 为连续函数空间使图象 $(t, x_i(t)) \in R_i$, 且 $x_i(a_i) = b_i$ 的函数 $x_i(t)$ 的全体。

将(18) 式看作映射 $T_i: X_i \to X_{i+1}$, $X_{k+1} = X_1$, 即

$$x_{i+1} = \mathrm{T}_i x_i = \mathrm{T}_i \circ \mathrm{T}_{i-1} \circ \cdots \circ \mathrm{T}_j x_j \qquad (i > j), \tag{19}$$

由于是“轮换型”,即下标 $k+1=1$,因此映射是复合周期映射• (19) 式写成$(i > k)$:

$$x_{nk+j} = \mathrm{P}_j^n x_j \qquad (j \in K) \quad x_j, x_{nk+j} \in X_j• \tag{20}$$

首先我们证明当 $x_i \in X_i$ 时怎样令 $x_{i+1} \in X_{i+1}$•

$$\begin{aligned} | x_{i+1}(t) + b_{i+1} | = | \mathrm{T}_i x_i - b_{i+1} | = \left| \int_{a_{i+1}}^{t} f_i(v, x_i(v)) \mathrm{d}v \right| \leqslant \\ | t - a_{i+1} | m_i \leqslant h_{i+1} m_i < \lambda_{i+1}, \end{aligned} \tag{21}$$

式中 $h_{i+1} = | t - a_{i+1} | < \dfrac{\lambda_{i+1}}{m_i}$• (22)

若 h_{i+1} 按(22) 式取值,可使

$$(t, x_{i+1}(t)) \in R_{i+1} = \left\{ (t, x_{i+1}): | t - a_{i+1} | \leqslant h_{i+1}, | x_{i+1} - b_{i+1} | \leqslant \lambda_{i+1} \right\}$$

且 $x_{i+1}(a_{i+1}) = b_{i+1}$• 于是

$$x_{i+1}(t) \in X_{i+1} = C[a_{i+1} - h_{i+1}, a_{i+1} + h_{i+1}]•$$

其次,我们来证明当任一 $u, v \in X_j$ 时,怎样才能使复合的周期映射是 g_收缩的•

$$\begin{aligned} d(\mathrm{T}_j u, \mathrm{T}_j v) = \max_{| t - a_{j+1} | \leqslant h_{j+1}} \left| \int_{a_{j+1}}^{t} [f_j(s, u(s)) - f_j(s, v(s))] \mathrm{d}s \right| \leqslant \\ L_j h_{j+1} d(u, v) \qquad u, v \in X_j, \end{aligned} \tag{23}$$

递推,得

$$d(\mathrm{P}_j u, \mathrm{P}_j v) \leqslant \prod_{j=1}^{k} L_j h_{j+1} d(u, v)• \tag{24}$$

令 $G_k^k = \prod\limits_{j=1}^{k} L_j h_{j+1} < G < 1 \qquad (h_{k+1} = h_1)$, (25)

选取 h_j 令(25) 式成立• 其中简单的一种,令

$$h_{j+1} < \frac{G}{L_{j+1}}, \tag{26}$$

结合(22) 式,取

$$h_{j+1} < \min\left(\frac{\lambda_{i+1}}{m_j}, \frac{G}{L_{j+1}} \right), \tag{27}$$

即可使复合周期映射 P_j^n 是 g_收缩的• 据定理 2,存在有唯一不动点 $x_j^* \in X_j (j \in K)$• 即(17) 式在 h_j 上有唯一解 $x_j^*(t)\ (j \in K)$• (证毕)

定理 3 的应用例子•

例　下述微分方程解的例子•

$$\left. \begin{aligned} \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t &= f_1(t, x_1) = x_1^2, \\ \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t &= f_2(t, x_2) = \sqrt{x_2}, \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

$$x_1(a_1) = b_1, \quad x_2(a_2) = b_2• \tag{29}$$

定理 3 是个存在性定理,并未涉及如何求解• 若满足其条件,解保证存在• (28) 式的解为:

$$x_1 = A\exp(2ct), \quad x_2 = B\exp(4ct), \quad c = (1/16)^{1/3}, \tag{30}$$

常数 A、B 由初始条件(29) 式定出为:

$$A = b_1 \exp(-2ca_1), \quad B = b_2 \exp(-4ca_2)• \tag{31}$$

这个解的存在范围 h_1、h_2, 依赖于初始条件•

$$\lambda_1 = | x_1 - b_1 | = | b_1(e^{2c(t-a_1)} - 1) |,$$

$$\lambda_2 = | x_2 - b_2 | = | b_2(e^{4c(t-a_2)} - 1) | \cdot$$

若 $b_1 = b_2 = 0$, 则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 按(27)式, $h_1 = h_2 = 0$, 即仅 $t = a_1$ 和 $t = a_2$ 时解才存在•可见解的存在范围与初始条件有关•

作为定理2的应用的另一例子是均匀、各向同性弹性薄壳轴对称弯曲问题• 依 Marguerre 理论, 问题归结为解无量纲微分方程[6,8]:

$$\left.\begin{aligned} &x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\phi)\right] = \psi(\phi + z_1) + px, \\ &x\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\psi)\right] = -\phi\left(\frac{1}{2}\phi + z_1\right) \cdot \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

边界条件: 如为固端, 有

$$\left.\begin{aligned} &x = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \\ &x = 1, \quad \phi(1) = 0, \quad \nu\psi(1) - \psi_x(1) = 0 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

应用 Green 函数, (32)和(33)归结为下列积分方程[6,8]:

$$\phi(x) = \int_0^1 g_1(x,t)h[\psi(t), \phi(t)]dt + p(x), \tag{34}$$

$$\psi(x) = \int_0^1 g_2(x,t)f[\phi(t)]dt, \tag{35}$$

$$h[\psi(t), \phi(t)] = \psi(t)[\phi(t) + z_1(t)], \tag{36}$$

$$f[\phi(t)] = \phi(t)\left[\frac{1}{2}\phi(t) + z_1(t)\right], \tag{37}$$

$$g_i(x,t) = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\mu_i} - \frac{1}{t}\right)x, \quad 0 < x < t, \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu_i} - \frac{1}{x}\right)t, \quad t < x < 1, \end{aligned}\right\} \qquad i = 1, 2, \tag{38}$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = (1-\nu)/(1+\nu) \cdot$$

ϕ, ψ 分别为与变形和应力有关的函数; $z_1(t)$ 为变形前壳体中面方程; $p(x)$ 为荷载项; ν为泊松比•

记

$$\phi(x) \in X_1 = C[a, b] \subset M, \qquad 0 < a < b < 1,$$

$$\psi(x) \in X_2 = C[c, d] \subset M, \qquad 0 < c < d < 1 \cdot$$

将(34)、(35)写成

$$\phi = H(\psi, \phi), \tag{39}$$

$$\psi = F(\phi), \tag{40}$$

式中

$$H(u, v) = \int_0^1 g_1(x,t)h[u(x), v(t)]dt \qquad u \in X_2, v \in X_1, \tag{41}$$

$$F(v) = \int_0^1 g_2(x,t)f[v(t)]dt \qquad v \in X_1 \cdot \tag{42}$$

将(40)代入(39), 得

$$\phi = H[F(\phi), \phi] = P\phi, \tag{43}$$

式中 $P = H \circ F$ 为复合周期映射. $H: X_1 \times X_2 \to X_1$, $F: X_1 \to X_2$, $P = H \circ F: X_1 \to X_1$.

用迭代法解(43). 给出 ϕ_1, 代入得 ϕ_2, 递推, 得:

$$\phi_{n+1} = P^n \phi_1. \tag{44}$$

下面, 我们证明迭代过程收敛.

$$\begin{aligned} d(Fu, Fv) &= | F[f(u)] - F[f(v)] | = \\ &\left| \int_0^1 g_2(x,t) \left\{ f[u(t)] - f[v(t)] \right\} \mathrm{d}t \right| \leqslant \\ &\left| \int_0^1 g_2(x,t) \mathrm{d}t \right| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | f[u(t)] - f[v(t)] | = \\ &| r_f(x) | \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{1}{2} [u(t) + v(t) + z_1(t)][u(t) - v(t)] \right| \leqslant \\ &| r_f(x) | \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \frac{1}{2} | u(t) + v(t) + z_1(t) | | u(t) - v(t) | \\ &\qquad u, v \in X_1, \end{aligned} \tag{45}$$

式中
$$r_f(x) = \int_0^1 g_2(x,t) \mathrm{d}t = \frac{x}{2} [\nu/(1-\nu) + \ln x]. \tag{46}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上连续函数 u、v 必有最大值, 设其最大值为 m, ($z_1(t)$ 项很小略去), 则 (45) 式写成:

$$d(Fu, Fv) \leqslant | r_f(x) | m d(u, v) \qquad u, v \in X_1. \tag{47}$$

又看

$$\begin{aligned} d(Hw, Hy) &= | H[w(x), u(x)] - H[y(x), u(x)] | = \\ &\left| \int_0^1 g_1(x,t) \left\{ h[w(t), u(t)] - h[y(t), u(t)] \right\} \mathrm{d}t \right| \leqslant \\ &\left| \int_0^1 g_1(x,t) \mathrm{d}t \right| \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | h[w(t), u(t)] - h[y(t), u(t)] | \leqslant \\ &| r_h(x) | \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | [u(t) + z_1(t)] | | w(t) - y(t) | \leqslant \\ &| r_h(x) | m d(w, y) \qquad w, y \in X_2, u \in X_1, \end{aligned} \tag{48}$$

式中

$$r_h(x) = \int_0^1 g_1(x,t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} x \ln x. \tag{49}$$

由于 $H: X_1 \times X_2 \to X_1$, $F: X_1 \to X_2$, 记

$$\left. \begin{aligned} d(u_2, v_2) &= d(Hw, Hy), \\ d(w, y) &= d(Fu_1, Fv_1), \end{aligned} \right\} \qquad \begin{aligned} &u_1, v_1, u_2, v_2 \in X_1, \\ &w, y \in X_2, \end{aligned}$$

于是由(45)~(49), 得

$$d(u_2, v_2) = d(Pu_1, Pv_1) \leqslant | r_h(x) | | r_f(x) | m^2 d(u_1, v_1). \tag{50}$$

选取 x 足够小, 如 $x \leqslant x_L$, 使

$$| r_h(x_L) | | r_f(x_L) | m^2 \leqslant G < 1, \tag{51}$$

则类似定理 1 的证明, 有

$$\lim_{m, n \to \infty} d(P^m u, P^n u) \leqslant [G^n/(1-G)] d(Pu, u) = 0, \qquad \forall u \in X_1$$

即迭代过程收敛. 亦即(43) 式有唯一解 $\phi(x)$, $(0 < x \leqslant x_L)$. (证毕)

[参 考 文 献]

[1] Rhoades B E. A comparison of various definitions of contractive mappings[J]. Transactions of the Amer Math Soc, 1977, **226**(2): 257—290.

[2] LOU Ben_dong. Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications[J]. Proceedings of Amer Math Soc, 1999, **127**(8): 2259—2264.

[3] Smart D R. Fixed Point Theorems[M]. Brooke Crutchley: Cambridge Univ Press, 1974, 78—79.

[4] Cronin J. Differential Equations, Introduction and Qualitative Theory[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1980, 74—76.

[5] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 等. 实变函数论与泛函分析, 下册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 74—77.

[6] 云天铨. 积分方程及其在力学中的应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1990, 389—396.

[7] Keller H B, Reiss E L. Iterative solutions for the non_linear bending of circular plates[J]. Comm Pure Appl Math, 1958, **9**: 273—292.

[8] Reissner E. Symmetric bending of shallow shells of revolution[J]. J Math Mech, 1958, **7**(2): 121—140.

Fixed Point Theorem of Composition g_Contraction Mapping and Its Applications

YUN Tian_quan

(Department of Mechanics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P R China)

Abstract: Any composition sequential mapping, periodic composition mapping of a complete non_empty metric space M into M with geometric mean contraction ratio less than 1(simplifying as "g_contraction mapping") has a unique fixed point in M. Applications of the theorem to the proof of existence and uniqueness of the solutions of a set of non_linear differential equations and a coupled integral equations of symmetric bending of shallow shell of revolution are given.

Key words: contraction mapping; g_contraction mapping; Banach contraction mapping theorem; functional analysis; differential equation; integral equation; shallow shell