应用数学和力学, 第 22 卷 第 10 期(2001 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_1029_08

H_度量空间中的广义 KKM 定理及其应用*

丁协平, 夏福全

(四川师范大学 数学系, 成都 610066)

(我刊编委丁协平来稿)

摘要: 定义了一个新的空间 —— H_度量空间并在H_度量空间中, 得到了具有有限度量紧闭(开)值的广义H_KKM 映象的广义H_KKM 定理• 这些定理推广了 Khamsi 和 Yuan 最近一系列结果• 作为应用, 还得到有限度量紧闭(开)覆盖的 Ky Fan 型匹配定理, 不动点定理和极小极大不等式• 这些结果统一和推广了近期的许多结果•

关 键 词: 超凸空间; H_度量空间; 存限度量紧闭(开)集; 广义 H_KKM 映象; 容许集
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

引 言

在 1996 年, Khamsi[1] 在超凸空间中建立了 Fan_KKM 原理• Yuan[2, 3] 在超凸空间中得到了 KKM 原理的特性, 并应用 KKM 原理得到了不动点定理和关于开覆盖和闭覆盖的匹配定理• 文[1~ 3] 在超凸空间内的研究表明: 超凸形式的 Fan_KKM 原理将成为超凸空间中的非线性理论的发展的另一个有用工具• 因此, 促使我们建立比文[1~ 3] 更为广泛的超凸形式的 Fan_KKM 原理并且对它进行应用•

本文中, 我们首先介绍了 H_度量空间的概念及广义H_KKM 映象, 并且在 H_度量空间中得到了具有有限度量紧开(闭) 值的广义H_KKM 映象的广义H_KKM 型定理• 作为H_KKM 型定理的应用, 得到了关于有限度量紧闭(开) 覆盖的Ky Fan 型匹配定理、不动点定理以及极小极大不等式• 这些结果统一和推广了近期许多文献中的相应结果•

1 预 备 知 识

设X 是非空集, 2^X 和$\mathscr{F}(X)$ 分别表示X 的所有非空子集和X 的所有非空有限子集族• 我们首先介绍下面的记号和基本事实•

定义 1.1[4] 度量空间 (M, d) 被称为是超凸空间, 若任意$\left\{x_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda} \subset M$, 任意$\left\{r_\alpha \geqslant 0\right\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathbf{R}$(其中 Λ 是指示集), 当满足 $d(x_\alpha, x_\beta) \leqslant r_\alpha + r_\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ 时, 都有 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \varnothing$, 其中$B(x, r)$ 表示以$x \in M$ 为心, r 为半径的闭球•

定义 1.2 设(M, d) 是度量空间, $A \subset M$ 是有界集• 我们给出下面的记号:

* 收稿日期: 2000_03_03; 修订日期: 2001_03_20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871059)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授.

1) $\mathrm{co}(A) = \bigcap\{B \subset M: A \subset B$ 且 B 是闭球$\}$,

2) $\mathscr{A}(M) = \{A \subset M: A = \mathrm{co}(A)\}$•

我们称任意的 $A \in \mathscr{A}(M)$ 为 M 的容许集• 注意到, 若 M 是超凸空间, 则 M 的每一个容许集也是超凸空间•

定义 1.3[5] 称拓扑空间 (M, Γ) 为 $H_$空间, 若存在集值映象 $\Gamma: \mathscr{F}(M) \to 2^M$ 满足

1) $\forall A \in \mathscr{F}(M)$, $\Gamma(A)$ 都是 M 的非空可缩集;

2) $\forall A, B \in \mathscr{F}(M)$, 当 $A \subset B$ 时必有 $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$•

称 $H_$空间 (M, Γ) 的子集 D 是 $H_$凸的, 若 $\forall A \in \mathscr{F}(D)$ 都有 $\Gamma(A) \subset D$•

定义 1.4 称度量空间 (M, d, Γ) 是 $H_$度量空间, 若 (M, d, Γ) 是 $H_$空间且满足: $\forall A \in \mathscr{F}(M)$ 都有 $\Gamma(A) \subset \mathrm{co}(A)$•

注 1.1 (1) Horvath[6] 证明了任意 $A \subset \mathscr{F}(M)$, 集 $\mathrm{co}(A)$ 是可缩的• 由 $H_$度量空间的定义易知: 在超凸空间中, 若令 $\Gamma(A) = \mathrm{co}(A)$, $\forall A \in \mathscr{F}(M)$, 则超凸空间即为 $H_$度量空间, 反之不成立•

(2) 由 $H_$度量空间的定义我们还可得到如下事实: (a) $\Gamma(\{x\}) = \{x\}$, $\forall x \in M$; (b) $\forall A \in \mathscr{F}(M)$, 集 $\mathrm{co}(A)$ 是 $H_$凸的• 事实上, 对任意 $B \in \mathscr{F}(\mathrm{co}(A))$, 都有 $\Gamma(B) \subset \mathrm{co}(B) \subset \mathrm{co}(A)$•

2 GHKKM 映象的性质

设 (M, d) 是度量空间• 称 $S \subset M$ 是紧闭(开)的, 若对 M 的任意紧子集 K 都有 $S \cap K$ 是 K 中的闭(开)子集; 称 $S \subset M$ 是有限度量闭(开)的, 若 $\forall A \in \mathscr{F}(M)$, 集 $\mathrm{co}(A) \cap S$ 是 $\mathrm{co}(A)$ 中的闭(开)子集; 称 $S \subset M$ 是有限度量紧闭(开)的, 若 $\forall A \in \mathscr{F}(M)$, 集 $S \cap \mathrm{co}(A)$ 是 $\mathrm{co}(A)$ 中的紧闭(开)子集• 显然, 若 $S \subset M$ 是 M 的闭(开)子集, 则 S 是有限度量闭(开)的; 若 $S \subset M$ 是有限度量闭(开)子集, 则 S 是有限度量紧闭(开)的• 反之不成立•

定义 2.1[2] 设 X 是非空集, (M, d) 是度量空间• 称集值映象 $G: X \to 2^M$ 是广义度量 KKM 映象(GMKKM), 若 $\forall\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$, 存在 $\{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(M)$(不必相异), 对任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset \{y_0, \cdots, y_n\}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, 都有 $\mathrm{co}\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$•

定义 2.2[7] 设 X 是非空集, (M, Γ) 是 $H_$空间• 称集值映象 $G: X \to 2^M$ 是广义 $H_$KKM 映象(GHKKM), 若 $\forall\{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$, 存在 $\{y_0, \cdots, y_n\} \subset \mathscr{F}(M)$(不必相异), 对任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset \{y_0, \cdots, y_n\}$ 都有 $\Gamma(\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\}) \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$•

注 2.1 从上述两定义可以看出, 在 $H_$度量空间中, GMKKM 映象一定是 GHKKM 映象, 反之不成立•

引理 2.1[7] 设 (M, Γ) 是 $H_$空间, $M_0, \cdots, M_n$ 是 M 的紧闭子集且 $\bigcup_{i=0}^{n} M_i = M$, 则对任意 $\{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(M)$(不必相异), 都存在 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subset \{x_0, \cdots, x_n\}$ 使得

$$\Gamma(\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\}) \cap (\bigcap_{j=0}^{k} M_{i_j}) \neq \varnothing•$$

设 Δ_n 表示顶点为 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 的 n 维标准单型• 若 $\varnothing \neq J \subset \{0, 1, \cdots, n\}$, 则 Δ_J 表示顶点 $\{e_j: j \in J\}$ 的凸包•

下面引理的证明包含在 Horvath[8] 的定理 1 的证明中(也可参见 Ding 和 Tan 的[9])•

引理 2.2 设 M 是拓扑空间, J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的任意非空子集• 设 $\Gamma(J)$ 是 M 的可缩子集• 若对任意 $J \subset J'$ 都有 $\Gamma(J) \subset \Gamma(J')$, 则存在连续映象 $f: \Delta_n \to M$ 满足 $f(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$,

任意 $J\subset\{0,1\dots,n\}$.

定理 2.1 设 X 是非空集,(M,d,Γ) 是 H_度量空间,$G:X\to 2^M$ 是具有有限度量紧闭值的映象. 则$\{G(x):x\in X\}$具有有限交性质当且仅当 G 是 GHKKM 映象.

证明 必要性. 设$\{G(x):x\in X\}$具有有限交性质. 则对任意$\{x_0,\dots,x_n\}\in\mathscr{F}(X)$,$\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)\neq\emptyset$. 取$x^*\in\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)$,设 $y_i=x^*$,$i=0,1,\dots,n$;则任意 $0\leqslant k\leqslant n$ 及$\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\}\subset\{y_0,\dots,y_n\}$都有 $\Gamma(\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\})=\Gamma(\{x^*\})=\{x^*\}\subset\bigcup_{j=0}^{k}G(x_{i_j})$. 则 G 是 GHKKM 映象.

充分性. 假设$\{G(x):x\in X\}$不具有有限交性质,则存在 $A=\{x_0,\dots,x_n\}\in\mathscr{F}(X)$ 使得 $\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)=\emptyset$. 从而有

$$M=M\setminus\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)=\bigcup_{i=0}^{n}(M\setminus G(x_i)).\tag{1}$$

因 G 是 GHKKM 映象,则存在 $B=\{y_0,\dots,y_n\}\in\mathscr{F}(M)$ 使得对任意$\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\}\subset\{y_0,\dots,y_n\}$都有

$$\Gamma(\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\})\subset\bigcup_{j=0}^{k}G(x_{i_j}).$$

因 (M,d,Γ) 是 H_度量空间,由引理 2.2 知,存在连续映象 $\phi_B:\Delta_n\to\Gamma(B)\subset M$ 使得 $\phi_B(\Delta_k)\subset\Gamma(\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\})$,$\forall\{y_{i_j}:j=0,\dots,k\}\subset\{y_0,\dots,y_n\}$. 因为 (M,d,Γ) 是 H_度量空间,则 $\phi_B(\Delta_n)\subset\Gamma(B)\subset\mathrm{co}(B)$,故 $\phi_B(\Delta_n)$ 是 $\mathrm{co}(B)$ 中的紧子集. 又由 G 是具有有限度量紧闭值的集值映象,则对每一 $x\in X$,$\phi_B(\Delta_n)\cap\mathrm{co}(B)\cap G(x)$ 是 $\phi_B(\Delta_n)$ 中的闭子集. 由(1)式可得

$$\phi_B(\Delta_n)=\bigcup_{i=0}^{n}[\phi_B(\Delta_n)\setminus(\phi_B(\Delta_n)\cap\mathrm{co}(B)\cap G(x_i))].$$

显然$\{\phi_B(\Delta_n)\setminus(\phi_B(\Delta_n)\cap\mathrm{co}(B)\cap G(x_i))\}_{i=0}^{n}$是 $\phi_B(\Delta_n)$ 的开覆盖. 设$\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$是从属于此开覆盖的连续单位分解,则

$$\psi_i(y)\neq 0\Leftrightarrow y\in\phi_B(\Delta_n)\setminus(\phi_B(\Delta_n)\cap\mathrm{co}(B)\cap G(x_i)),$$
$$\forall y\in\phi_B(\Delta_n),\ i\in\{0,\dots,n\}.\tag{2}$$

定义 $\psi\circ\phi_B:(\Delta_n)\to\Delta_n$ 如下:

$$\psi(y)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i(y)e_i,\qquad\forall y\in\phi_B(\Delta_n).\tag{3}$$

显然,$\psi\circ\phi_B:\Delta_n\to\Delta_n$ 为连续映象. 由 Brouwer 不动点定理,存在 $z_0\in\Delta_n$ 使得 $z_0=\psi\circ\phi_B(z_0)$. 令 $u_0=\phi_B(z_0)$,则有

$$u_0=\phi_B(z_0)=\phi_B\circ\psi\circ\phi_B(z_0)=\phi_B\circ\psi(u_0).\tag{4}$$

由(3)式可得

$$\psi(u_0)=\sum_{j\in J(u_0)}\psi_j(u_0)e_j\in\Delta_{J(u_0)},\tag{5}$$

其中 $J(u_0)=\{j\in\{0,1,\dots,n\}:\psi_j(u_0)\neq 0\}$. 由(2)式知

$$u_0\in\phi_B(\Delta_n)\setminus(\phi_B(\Delta_n)\cap\mathrm{co}(B)\cap G(x_j)),\qquad\forall j\in J(u_0).$$

则
$$u_0\notin G(x_j),\qquad\forall j\in J(u_0).\tag{6}$$

另一方面,由(4)、(5)式可得

$$u_0 = \phi_B \circ \psi(u_0) \subset \phi_B(\Delta_{J(u_0)}) \subset \Gamma(\{y_j : j \in J(u_0)\}) \subset \bigcup_{j \in J(u_0)} G(x_j).$$

因而存在 $j_0 \in J(u_0)$ 使得 $u_0 \in G(x_{j_0})$，这与(6) 式相矛盾，故$\{G(x) : x \in X\}$具有有限交性质.

注 2.2 定理 2.1 推广了 Khamsi[1] 中的定理 3 和 Yuan[2] 中的定理 2.1：(a) 把空间从超凸空间推广到了 H_度量空间；(b) 把映象从 GMKKM 映象推广到 GHKKM 映象；(c) 把映象值从有限度量闭推广到有限度量紧闭.

定理 2.2 设 X 是非空集，(M, d, Γ) 是 H_度量空间，$G : X \to 2^M$ 是具有有限度量紧开值的映象. 则$\{G(x) : x \in X\}$具有有限交性质当且仅当 G 是 GHKKM 映象.

证明 必要性的证明与定理 2.1 中相同.

充分性. 若$\{G(x) : x \in X\}$不具有有限交性质，则存在$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$ 使得 $\bigcap_{i=0}^{n} G(x_i) = \varnothing$. 因 G 是 GHKKM 映象，则存在 $A = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(M)$ 使得对任意 $\{y_{i_0}, \cdots, y_{i_k}\} \subset A$，$0 \leqslant k \leqslant n$，都有

$$\Gamma(\{y_{i_0}, y_{i_1}, \cdots, y_{i_k}\}) \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j}). \tag{7}$$

由 $\bigcap_{i=0}^{n} G(x_i) = \varnothing$ 可得 $\bigcap_{i=0}^{n} (G(x_i) \cap \mathrm{co}(A)) = \varnothing$. 设 $F(x) = \mathrm{co}(A) \setminus (G(x) \cap \mathrm{co}(A))$，$\forall x \in X$. 因 G 具有有限度量紧开值，故 $G(x) \cap \mathrm{co}(A)$ 在 $\mathrm{co}(A)$ 中是紧开的，则 $F(x)$ 在 $\mathrm{co}(A)$ 中是紧闭的. 故 $F(x_0)$，$F(x_1)$，$\cdots$，$F(x_n)$ 是 $\mathrm{co}(A)$ 中的紧闭子集且

$$\bigcup_{i=0}^{n} F(x_i) = \mathrm{co}(A) \setminus \bigcap_{i=0}^{n} (G(x_i) \cap \mathrm{co}(A)) = \mathrm{co}(A).$$

注意到 $\mathrm{co}(A)$ 是 M 空间中的 H_凸集，由引理 2.1 知，存在$\{y_{i_j} : j = 0, 1, \cdots, k\} \subset \{y_0, \cdots, y_n\} \subset \mathrm{co}(A)$ 使得

$$\Gamma(\{y_{i_j} : j = 0, 1, \cdots, k\}) \cap \left(\bigcap_{j=0}^{k} F(x_{i_j})\right) \neq \varnothing. \tag{8}$$

由(7) 式有 $\Gamma(\{y_{i_j} : j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$. 又由于

$$\Gamma(\{y_{i_j} : j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset \Gamma(\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}) \subset \mathrm{co}(A),$$

故

$$\Gamma(\{y_{i_j} : j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset \bigcup_{j=0}^{k} (G(x_{i_j}) \cap \mathrm{co}(A)) = \mathrm{co}(A) \setminus \bigcap_{j=0}^{k} F(x_{i_j}).$$

这与(8) 式相矛盾，故$\{G(x) : x \in X\}$具有有限交性质.

注 2.3 定理 2.2 从以下几方面推广了 Yuan[2] 中的定理 2.2 和 Yuan[3] 中的定理 2.11.18：(a) 空间从超凸空间推广到 H_度量空间；(b) 映象从 GMKKM 映象推广到 GHKKM 映象；(c) 映象的值从有限度量开推广到有限度量紧开；(d) $\forall A \in \mathscr{F}(M)$，去掉了 $\mathrm{co}(A)$ 的紧性假设.

定理 2.3 设 X 是非空集，(M, d, Γ) 是 H_度量空间. $G : X \to 2^M$ 是具有紧闭值的映象且存在 $x_0 \in X$ 使得 $G(x_0)$ 是紧的. 则 $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \varnothing$ 当且仅当 G 是 GHKKM 映象.

证明 必要性. 因 $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \varnothing$，则$\{G(x) : x \in X\}$具有有限交性质. 又由于 M 的每一紧闭子集也是 M 的有限度量紧闭子集，故由定理 2.1，G 是 GHKKM 映象.

充分性. 因 G 是 GHKKM 映象，由定理 2.1 知，$\{G(x) : x \in X\}$具有有限交性质. 考察

$\{G(x_0) \cap G(x): x \in X\}$，因 $G(x_0)$ 是紧的，故

$$\bigcap_{x \in X} G(x) = \bigcap_{x \in X} (G(x_0) \cap G(x)) \neq \emptyset.$$

注 2.4 定理 2.3 推广了 Yuan[3] 中的定理 2.11.8 和 Khamsi[1] 中的定理 4.

3 匹配定理和不动点定理

在这一节中，利用上一节所得的 GHKKM 原理，得到一些新的匹配定理和不动点定理.

定理 3.1 设 X 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的 H_凸子集，$\{A_i\}_{i=0}^n$ 是 X 的一族有限度量紧闭子集且满足 $\bigcup_{i=0}^n A_i = X$，$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 是 X 中的 $n+1$ 个点（不必相异），则存在 $\{x_{i_0}, \cdots, x_{i_k}\} \subset \{x_0, \cdots, x_n\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ 使得

$$\Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^k A_{i_j}) \neq \emptyset.$$

证明 设 $X_0 = \{x_0, \cdots, x_n\}$，定义 $G: X_0 \to 2^{\mathrm{co}(X_0)}$ 如下：$G(x_i) = \mathrm{co}(X_0) \setminus (A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$，$i = 0, 1, \cdots, n$. 因 A_i 是有限度量紧闭的，则 $A_i \cap \mathrm{co}(X_0)$ 是 $\mathrm{co}(X_0)$ 中的紧闭子集. 故 $G(x_i)$ 是 $\mathrm{co}(X_0)$ 中的紧开子集. 假设结论不成立，则对任意的 $B = \{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset X_0$ 都有 $\Gamma(B) \cap (\bigcap_{j=0}^k A_{i_j}) = \emptyset$，故 $\Gamma(B) \cap (\bigcap_{j=0}^k (A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0))) = \emptyset$. 又由于 M 是 H_度量空间，故 $\Gamma(B) \subset \mathrm{co}(B) \subset \mathrm{co}(X_0)$，$\forall B \subset X_0$，所以

$$\Gamma(B) \subset \mathrm{co}(X_0) \setminus \bigcap_{j=0}^k (A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0)) = \bigcup_{j=0}^k (\mathrm{co}(X_0) \setminus (A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0))) = \bigcup_{j=0}^k G(x_{i_j}),$$

也就是说 $G: X_0 \to 2^{\mathrm{co}(X_0)}$ 是 GHKKM 映象. 又由于 $\mathrm{co}(X_0)$ 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的 H_凸子集，易知 $\mathrm{co}(X_0)$ 也是 H_度量空间. 所以由定理 2.2 知 $\bigcap_{i=0}^n G(x_i) \neq \emptyset$. 从而有 $\mathrm{co}(X_0) \neq \bigcup_{i=0}^n (A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$. 另一方面，由假设 $X = \bigcup_{i=0}^n A_i$ 知 $\mathrm{co}(X_0) = \bigcup_{i=0}^n (A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$，矛盾，故结论成立.

注 3.1 定理 3.1 推广了 Yuan[2] 中的定理 2.7 和 Yuan[3] 中的定理 2.11.19：(a) X 可以不是紧的；(b) A_i 从闭子集推广到了有限度量紧闭子集；(c) 空间从超凸空间推广到了 H_度量空间.

定理 3.2 设 X 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的 H_凸子集. $\{A_i\}_{i=0}^n$ 是 X 中的有限度量紧开子集族且满足 $X = \bigcup_{i=0}^n A_i$. $x_0, x_1, \cdots, x_n$（不必相异）是 X 中的 $n+1$ 个点. 则存在 $\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 使得

$$\Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^k A_{i_j}) \neq \emptyset.$$

证明 设 $X_0 = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，定义 $G: X_0 \to 2^{\mathrm{co}(X_0)}$ 如下：$G(x_i) = \mathrm{co}(X_0) \setminus (A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$，$i = 0, 1, \cdots, n$. 因 A_i 是有限度量紧开集，故 $A_i \cap \mathrm{co}(X_0)$ 是 $\mathrm{co}(X_0)$ 中的紧开子集，进而 $G(x_i)$ 是 $\mathrm{co}(X_0)$ 中的紧闭子集. 假设结论不成立，则对任意 $B = \{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset X_0$，有 $\Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^k A_{i_j}) = \emptyset$. 因此 $\Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^k A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0)) = \emptyset$. 又因为 $\Gamma(B) \subset \mathrm{co}(B) \subset \mathrm{co}(X_0)$，$\forall B \subset X_0$，则

$$\Gamma(B) \subset \mathrm{co}(X_0) \setminus \bigcap_{j=0}^k (A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0)) = \bigcup_{j=0}^k (\mathrm{co}(X_0) \setminus (A_{i_j} \cap \mathrm{co}(X_0))) = \bigcup_{j=0}^k G(x_{i_j}),$$

即是 G 是 GHKKM 映象。又由于 $\mathrm{co}(X_0)$ 是 H_度量空间 M 中的 H_凸子集，故易知 $\mathrm{co}(X_0)$ 也是 H_度量空间。因此，由定理2.1知，$\bigcap_{i=0}^{n} G(x_i) \neq \varnothing$。进而有 $\mathrm{co}(X_0) \neq \bigcup_{i=0}^{n}(A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$。另一方面，由假设条件 $X = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ 知 $\mathrm{co}(X_0) = \bigcup_{i=0}^{n}(A_i \cap \mathrm{co}(X_0))$，矛盾。故结论成立。

注3.2　定理3.2从以下几方面推广了 Yuan[2]中的定理2.8和 Yuan[3]中的定理2.11.20：(a) 空间从超凸空间推广到了 H_度量空间；(b) A_i 从开集推广到有限度量紧开集。

定理3.3　设 X 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的 H_凸子集，$A: X \to 2^X$ 是具有有限度量紧闭值的映象。设存在 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ 使得 $X = \bigcup_{i=0}^{n} A(x_i)$，集 $A^{-1}(y) = \{x \in X: y \in A(x)\}$，$\forall y \in X$ 是容许集，则 A 具有不动点。

证明　由定理3.1，存在 $\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset \{x_0, \cdots, x_n\}$ 使得 $\Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^{k} A(x_{i_j})) \neq \varnothing$。取 $x^* \in \Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, \cdots, k\}) \cap (\bigcap_{j=0}^{k} A(x_{i_j}))$，则 $x_{i_j} \in A^{-1}(x^*)$，$j = 0, 1, \cdots, k$。因 $A^{-1}(x^*)$ 是容许集，故 $\mathrm{co}(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset A^{-1}(x^*)$。又由于 (M, d, Γ) 是 H_度量空间，则

$$x^* \in \Gamma(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset \mathrm{co}(\{x_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset A^{-1}(x^*).$$

故 $x^* \in X$ 是 A 的不动点。

注3.3　定理3.3从以下几方面推广了 Yuan[2]中的定理3.1和 Yuan[3]中的定理2.11.21：(a) 空间从超凸空间推广到了 H_度量空间；(b) 映象的值从闭值推广到了有限度量紧闭值；(c) 去掉了 X 的紧性假设。

定理3.4　设 X 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的 H_凸子集，$A: X \to 2^X$ 是具有有限度量紧开值的映象。设存在 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ 使得 $X = \bigcup_{i=0}^{n} A(x_i)$ 且 $A^{-1}(y)$ 是容许集，$\forall y \in X$，则 A 在 X 中具有不动点。

证明　与定理3.3的证明类似，利用定理3.2知结论成立。

注3.4　定理3.4推广了 Yuan[2]中定理3.2和 Yuan[3]中的定理2.11.22。

4　极小极大定理

定义4.1　设 X 是非空集，(M, Γ) 是 H_空间，称 $\phi: M \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 关于 $x \in X$ 是广义 γH_对角拟凹的 $(\gamma \in \mathbf{R})$。若任意 $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$，存在 $B = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(M)$ 使得任意 $\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset \{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$ 和任意 $y^* \in \Gamma(\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\})$ 都有

$$\min_{0 \leqslant j \leqslant k} \phi(y^*, x_{i_j}) \leqslant \gamma.$$

引理4.1　设 X 是非空集，(M, Γ) 是 H_空间，$\gamma \in \mathbf{R}$ 是给定的实数。$\phi: M \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ 是泛函，则下列条件等价：

(1) 映象 $x \to G(x) = \{y \in M: \phi(y, x) \leqslant \gamma\}$ 是 GHKKM 映象，$\forall x \in X$。

(2) 泛函 $\phi(y, x)$ 关于 x 是广义 γH_对角拟凹的。

证明　(1) ⇒ (2)。因 G 是 GHKKM 映象，则任意的 $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$，存在 $B = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(M)$ 使得对任意 $\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset B$ 都有 $\Gamma(\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\})$

$\subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$• 因此对任意 $y^* \in \Gamma(\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\})$, 存在 $0 \leqslant m \leqslant k$ 使得 $y^* \in G(x_{i_m})$, 即是 $\phi(y^*, x_{i_m}) \leqslant \gamma$• 故 $\min_{0 \leqslant j \leqslant k} \phi(y^*, x_{i_j}) \leqslant \gamma$, 因而 $\phi(y, x)$ 关于 x 是广义 γ_H_对角拟凹的•

(2) ⇒(1)• 设 $\phi(y, x)$ 关于 x 是广义 γ_H_对角拟凹的, 则对任意 $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \mathscr{F}(X)$, 存在 $B = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \mathscr{F}(M)$ 使得对任意 $\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\} \subset B$ 和任意 $y^* \in \Gamma(\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\})$, 都有 $\min_{0 \leqslant j \leqslant k} \phi(y^*, x_{i_j}) \leqslant \gamma$• 因此存在 $m \in \{0, 1, \cdots, k\}$ 使得 $y^* \in G(x_{i_m})$• 由 y^* 的任意性知 $\Gamma(\{y_{i_j}: j = 0, 1, \cdots, k\}) \subset \bigcup_{j=0}^{k} G(x_{i_j})$, 也就是说 G 是 GHKKM 映象•

注 4.1 引理 4.1 推广了 Ding[10] 中的引理 4.1•

定理 4.1 设 X 是 H_度量空间 (M, d, Γ) 中的非空 H_凸子集, $\phi: M \times X \to \mathbf{R} \cup \{\pm \infty\}$ 是泛函且满足

(1) $\phi(y, x)$ 关于 x 是广义 0_H_对角拟凹的,

(2) $\forall x \in X$, 映象 $y \to \phi(y, x)$ 在 M 的每一紧子集上是下半连续的,

(3) 存在 $x_0 \in M$ 使得集 $\{y \in M: \phi(y, x_0) \leqslant 0\}$ 是紧的, 则存在 $y^* \in M$ 使得 $\sup_{x \in X} \phi(y^*, x) \leqslant 0$•

证明 定义集值映象 $G: X \to 2^M$ 如下:

$$G(x) = \{y \in M: \phi(y, x) \leqslant 0\}, \qquad \forall x \in X•$$

由引理 4.1 和条件(1) 知, G 是 GHKKM 映象• 条件(2) 可得出 G 是具有紧闭值的映象, 条件(3) 可知 $G(x_0)$ 是紧的, 故由定理 2.3 知 $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$• 取 $y^* \in \bigcap_{x \in X} G(x)$, 则有

$$\sup_{x \in X} \phi(y^*, x) \leqslant 0•$$

注 4.2 定理 4.1 是 H_度量空间中 Fan 型极小极大不等式原理, 它推广了 Yuan[3] 中的定理 2.11.15•

[参 考 文 献]

[1] Khamsi M A. KKM and Ky Fan theorem in hyperconvex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **204**(2): 298—306.

[2] Yuan X Z. The characterization of generalized metric KKM mappings with open values in hyperconvex metric spaces and some applications[J]. J Math Anal Appl, 1999, **235**(2): 315—325.

[3] Yuan X Z. KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1999.

[4] Aronszajn N, Panitchpakdi P. Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces[J]. Pacific J Math, 1956, **6**: 405—439.

[5] Bardaro C, Ceppitelli R. Some further generalization of the Knaster_Kuratowski_Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1988, **132**(3): 484—490.

[6] Horvath C. Extension and selection theorems in topological spaces with a generalized convexity structure[J]. Ann Fac Sci Toulouse Math, 1993, **2**: 253—269.

[7] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海: 上海科技文献出版社, 1991.

[8] Horvath C. Some result on multivalued mapping and inequalities without convexity[A]. In: Lin, Simons Eds. Nonlinear and Convex Analysis[C]. New York: Marcel Dekker Inc, 1987, 96—106.

[9] Ding X P, Tan K K. Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities without convexity[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1990, **49**(1): 111—128.

[10] DING Xie_ping. Fixed points minimax inequalities and equilibria of noncompact abstract economies [J]. Taiwanese J Math, 1998, **2**(1): 25—55.

Generalized H_KKM Type Theorems in H_Metric Spaces With Applications

DING Xie_ping, XIA Fu_quan

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P R China)

Abstract: The new notions of H_metric spaces and generalized H_KKM mappings were introduced. Some generalized H_KKM type theorems for generalized H_KKM mappings with finitely metrically compactly closed values and finitely metrically compactly open values were established in H_metric spaces. These theorems generalize recent results of Khamsi and Yuan. As applications, some Ky Fan type matching theorems for finitely metrically compactly open covers and finitely metrically compactly closed covers, fixed point theorems and minimax inequality are obtained in H_metric spaces. These results generalize a number of known results in recent literature.

Key words: hyperconvex space; H_metric space; finitely metrically compactly closed (open) set; generalized H_KKM mapping; admissible set