

文章编号: 1000-0887(2001) 10-1058-09

# I 型平面应力裂纹弹塑性场在裂纹线附近匹配方程的一般形式\*

易志坚<sup>1</sup>, 严波<sup>2</sup>

(1. 重庆交通学院 桥梁及结构工程系, 重庆 400074; 2. 重庆大学 工程力学系, 重庆 400044)

(吴承平推荐)

摘要: 裂纹线场分析方法目前已发展成为裂纹弹塑性分析的一种独立方法, 这一方法极大地简化了裂纹弹塑性问题的复杂性和数学上的困难, 可求出各型裂纹的弹塑性场在裂纹线附近足够精确的解答。但是, 以前采用这一方法求解时, 均是针对一些具体问题进行的, 没有给出裂纹线附近弹塑性分析的一般步骤和匹配方程的一般形式。该文针对理想弹塑性 I 型平面应力裂纹问题, 按线场分析方法, 给出了裂纹线附近弹塑性分析一般步骤, 并针对一具体问题, 给出了求解的过程和结果。

关键词: 裂纹; 弹塑性; 线场分析方法; 裂纹线; 平面应力

中图分类号: O346.1 文献标识码: A

## 引 言

裂纹线场分析方法是最早由 Achenbach 和 Li<sup>[1]</sup> 提出, Guo 和 Li<sup>[2]</sup> 对这一方法进行了进一步研究。但是, 这种早期的线场分析方法是将裂纹线附近塑性场的某一特解与弹性奇异  $K$  场在裂纹线附近匹配进行求解, 求解过程不得不采用传统小范围屈服条件, 这就极大地限制了解的适用范围, 并且, 由于求解过程中采用的塑性场的特解可能并非真实的塑性场, 因此, 即使在小范围屈服条件下, 其解也不一定是真实的。

作者在 [1]、[2] 的基础上, 从根本上放弃了传统的小范围屈服条件, 提出了一种全新意义下的线场分析方法。这一方法的基本思路是: 求出塑性场在裂纹线附近的幂级数形式的通解, 并将裂纹体弹性场的精确解在裂纹线附近按幂级数形式展开, 将塑性场的通解与弹性场的精确解在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 从而完全放弃小范围屈服条件, 求出裂纹线附近足够精的不受屈服范围大小限制的弹塑性场。对于象有限宽裂纹板这种难于求出弹性场精确解的问题, 可在裂纹线附近构造出合理的弹性场, 从而与塑性场的精确解在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配求解。因此, 采用作者提出的这种新的意义下的线场分析方法, 不仅适用于无限宽裂纹板, 而且也适用于更具工程实际意义但过去一直难以有效解决的有限宽裂纹板的弹塑性分析。作者已采用这种新的线场分析方法解决了大量问题, 一些典型的问题可参阅文献

\* 收稿日期: 2000-11-21

基金项目: 交通部重点项目资助课题(95-04-06-14)

作者简介: 易志坚(1963—), 男, 重庆人, 教授, 硕士, 国家突出贡献专家。

[3~ 7]•

但是, 以前采用线场分析方法进行求解时, 均是针对一些具体问题进行的, 没有给出按线场分析方法进行弹塑性分析的一般步骤和匹配方程的一般形式• 本文针对 I 型平面应力裂纹问题, 按线场分析方法, 给出了裂纹线附近弹塑性解的一般形式, 并针对一具体的问题, 给出了求解的过程和结果•

## 1 裂纹线附近弹塑性匹配方程的一般形式

由于裂纹弹塑性问题的复杂性和数学上的困难, 人们试图求出这一问题封闭式弹塑性全场解的种种努力均未成功• 人们只能寻求各种近似解• 通常, 已有的解均是将塑性场的某一特解与裂纹尖端弹性奇异场(  $K$  场) 匹配<sup>[1,2]</sup>, 其解受小范围屈服条件限制, 且其解的正确性值得商榷•

采用线场分析方法, 可求出完全放弃小范围屈服条件的在裂纹线附近足够精确的弹塑性解, 其一般步骤是: 求出塑性应力场在裂纹线附近的幂级数形式通解, 然后将塑性应力场的这一通解与弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配• 以下, 我们将按照这一步骤进行分析, 给出裂纹线附近弹塑性匹配方程的一般形式•

### 1.1 塑性应力场在裂纹线附近的幂级数形式的通解

对理想弹塑性 I 型平面应力裂纹问题, 不为零的应力分量为  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$ • 平衡微分方程为

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} = 0 \quad (1a, b)$$

文献[8]报道, Tresca 屈服条件比 Mises 屈服条件更符合 I 型平面应力裂纹的实际• 本文将采用 Tresca 屈服条件, Tresca 屈服条件要求  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ , 所以有

$$\frac{\alpha_x + \alpha_y}{2} + \sqrt{\left[ \frac{\alpha_x - \alpha_y}{2} \right]^2 + \alpha_{xy}^2} = 2k, \quad (2)$$

式中  $k$  为剪切屈服应力, 剪切屈服应力  $k$  与拉伸屈服应力  $\alpha_Y$  具有关系

$$k = \alpha_Y/2 \quad (3)$$

裂纹线是指裂纹的延长线(图 1)• 应力分量  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  对于裂纹线是连续的, 也就是  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  在通过裂纹线  $y = 0, x \geq 0$  (或  $\theta = 0$ ) 时连续• 根据连续函数的性质,  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  可在裂纹线附近按 Taylor 级数展开• 当受载对称于裂纹线时,  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  可表示为

$$\alpha_x = p_0^{(p)}(x) + p_2^{(p)}(x)y^2 + p_4^{(p)}(x)y^4 + O(y^6), \quad (4a)$$

$$\alpha_y = q_0^{(p)}(x) + q_2^{(p)}(x)y^2 + q_4^{(p)}(x)y^4 + O(y^6), \quad (4b)$$

$$\alpha_{xy} = s_1^{(p)}(x)y + s_3^{(p)}(x)y^3 + O(y^5), \quad (4c)$$

式中的上标(p)表示塑性• 这里我们已经考虑了  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$  关于裂纹线  $y = 0, x \geq 0$  (或  $\theta = 0$ ) 的对称性和  $\alpha_{xy}$  关于裂纹线的反对称性•

显然, 式(4)是应力场  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  在裂纹线附近的一般形式, 若能够精确求出(4)中的待定项, 则塑性区应力场的通解在裂纹线附近的幂级数形式即可求得•

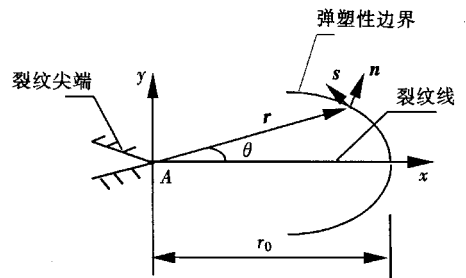


图 1 裂纹线附近的弹塑性边界

一般情况下,要求解塑性区应力场  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$ , 需求解偏微分方程组(1)和(2), 这样的解是难以求得的。但是, 在裂纹线附近的塑性区内, 在利用了对称性后, 其解可用 Taylor 级数表示为(4)。如将(4)代入平衡微分方程(1)和屈服条件(2), 即可将求解  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  的偏微分方程的问题转化为求解  $p_0, p_2, \dots, q_0, q_2, \dots, s_1, s_3, \dots$  的常微分方程组。略去  $y^4$  以上的高阶无穷小项, 可精确解得

$$p_0^{(p)} = \frac{A}{x+L} + 2k, \quad p_2^{(p)} = \frac{C}{(x+L)^3} + \frac{D}{(x+L)^4}; \quad (5a, b)$$

$$q_0^{(p)} = 2k, \quad q_2^{(p)} = \frac{A}{(x+L)^3}; \quad (6a, b)$$

$$s_1^{(p)} = \frac{A}{(x+L)^2}, \quad s_3^{(p)} = \frac{C}{(x+L)^4} + \frac{4}{3} \frac{D}{(x+L)^5}. \quad (7a, b)$$

上面各式中  $A, C, D, L$  为待定积分常数。将(5)、(6)、(7)代入(4) 即得塑性应力场在裂纹线附近的级数形式通解为

$$\alpha_x = \left[ \frac{A}{x+L} + 2k \right] + \left[ \frac{C}{(x+L)^3} + \frac{D}{(x+L)^4} \right] y^2 + O(y^4), \quad (8a)$$

$$\alpha_y = 2k + \left[ \frac{A}{(x+L)^3} \right] y^2 + O(y^4), \quad (8b)$$

$$\alpha_{xy} = \left[ \frac{A}{(x+L)^2} \right] y + \left[ \frac{C}{(x+L)^4} + \frac{4}{3} \frac{D}{(x+L)^5} \right] y^3 + O(y^5). \quad (8c)$$

在图 1 所示的极坐标下,  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , (8) 式可表示为

$$\alpha_x = \left[ \frac{A}{r+L} + 2k \right] + \left[ \frac{Ar}{2(r+L)^2} + \frac{Cr^2}{(r+L)^3} + \frac{Dr^2}{(r+L)^4} \right] \theta^2 + O(\theta^4), \quad (9a)$$

$$\alpha_y = 2k + \left[ \frac{Ar^2}{(r+L)^3} \right] \theta^2 + O(\theta^4), \quad (9b)$$

$$\alpha_{xy} = \left[ \frac{Ar}{(r+L)^2} \right] \theta + \left[ \frac{Ar^2}{(r+L)^3} - \frac{Ar}{6(r+L)^2} + \frac{Cr^3}{(r+L)^4} + \frac{4}{3} \frac{Dr^3}{(r+L)^5} \right] \theta^3 + O(\theta^5), \quad (9c)$$

只要是理想弹塑性 I 型平面应力裂纹问题, 不管何种加载形式, 塑性区应力场在裂纹线附近的幂级数形式通解均可表示为(8)或(9)。式(8)或(9)在塑性区无限接近于裂纹线的邻域内是足够精确的。

文[1]、[2]尽管也采用线场分析方法对这一问题进行了分析, 但采用 Mises 屈服条件进行求解时, 作了假定, 其塑性解仅为—特解。作者<sup>[9]</sup>也采用线场分析方法对此问题作过分析, 但由于作者当时仅对  $y^2$  (或  $\theta^2$ ) 及其以下的低阶幂次项进行了分析, 在求解时仍作了假定, 其结果仍是近似的。可以证明, 一旦对  $y^3$  (或  $\theta^3$ ) 及其以上项进行分析求解, 塑性应力场幂级数形式的通解可以精确求解, 直至  $y$  (或  $\theta$ ) 的任意高阶幂次项, 也就是说, 塑性应力场在裂纹线附近的幂级数形式通解可以精确求出。本文忽略了  $y^4$  (或  $\theta^4$ ) 及其以上的高阶项。

## 1.2 弹性应力场的解在裂纹附近的幂级数形式

弹性区应力分量  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  对于裂纹线也是连续的,  $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_{xy}$  可在裂纹线附近按 Taylor 级数展开, 在图 1 所示的极坐标表示下

$$\alpha_x = p_0^{(e)}(x) + p_2^{(e)}(x)y^2 + O(y^4), \quad (10a)$$

$$\alpha_y = q_0^{(e)}(x) + q_2^{(e)}(x)y^2 + O(y^4), \quad (10b)$$

$$\alpha_{xy} = s_1^{(e)}(x)y + s_3^{(e)}(x)y^3 + O(y^5), \quad (10c)$$

式中的上标(e)表示弹性。

尽管将弹性应力场(10)代入平衡微分方程(1)也可将求解偏微分方程的问题转化为求解常微分方程,但与塑性区应力场所不同的是,塑性应力场(8)或(9)必须同时满足平衡微分方程(1)和屈服条件(2)。由此得出的常微分方程组中,方程数总等于未知数,因此其幂级数形式的通解可以精确求解。而弹性应力场(10)仅要求满足平衡微分方程(1),所以常微分方程组中方程的数目将少于未知量的数目,其幂级数形式的通解不能求出具体的表达式。

因此,只要是对 I 型平面应力裂纹问题,其塑性应力场均为统一的形式(8)或(9),应力随载荷的不同仅通过式中积分常数的不同取值反映。而对弹性应力场,没有一个解的统一的形式,随着载荷的不同,其解的具体函数表达式也根本不同。

对无限宽裂纹板,裂纹线附近的弹性应力场可由相应的、已求得的无限宽裂纹板的精确解按 Taylor 级数展开在裂纹线附近,得出(10)中各项的具体形式。而对有限宽裂纹板,也可按一定方法在裂纹线附近构造幂级数解的具体形式(10)。也就是说,弹性应力场在裂纹线附近总可表示为(10)的一般形式,但对不同的问题,式(10)中各项的具体形式不同。尽管如此,我们这里的弹性应力场是指在裂纹线附近是足够精确的场,而不是仅在裂纹尖端邻域成立的裂尖弹性奇异场( $K$ 场),这是与小范围屈服分析的根本不同之处。

### 1.3 塑性应力场与弹性应力场在裂纹线附近弹塑性边界上的匹配方程

经典的小范围屈服理论除了假定裂纹前缘塑性区外的弹性场是  $K$  场外,还假定塑性区的存在使裂纹的弹性奇异  $K$  场沿裂纹线移动了一段距离,如文[1]、[2]。作者<sup>[4]</sup>对小范围屈服分析为何必须作出弹性奇异  $K$  场沿裂纹线移动一段距离的假定进行了分析和讨论,并说明,这一假定将导致解的较大误差。

裂纹线附近的弹塑性边界  $r = r_p(\theta)$  对称于裂纹线  $y = 0$  (或  $\theta = 0$ ) 且关于裂纹线连续,如图 1 所示。与文[1]、[2]的分析根本不同的是,我们这里已经放弃了弹性场沿裂纹线移动了一距离的假定。弹塑性边界  $r = r_p(\theta)$  在裂纹线附近的幂级数展式为

$$r_p(\theta) = r_0 + r_2\theta^2 + O(\theta^4), \quad (11)$$

式中  $r_0$  为裂纹线上塑性区的长度。

由(11)可求得裂纹线附近弹塑性边界上任一点的单位法向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  为

$$n_x = 1 - \frac{1}{2}B_1\theta^2 + O(\theta^4), \quad (12a)$$

$$n_y = B_1\theta + B_3\theta^3 + O(\theta^5), \quad (12b)$$

其中:

$$B_1 = 1 - 2\frac{r_2}{r_0}. \quad (13)$$

在  $O(y^4)$  或  $O(\theta^4)$  的近似下,式中  $B_3$  不是一个独立的未知量。

为了将塑性应力场与弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配,必须给出塑性应力场和弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的取值。将(11)代入(9)即可得出塑性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的值为

$$\alpha_x = \alpha_{x0}^{(p)} + \alpha_{x2}^{(p)}\theta^2 + O(\theta^4), \quad (14a)$$

$$\alpha_y = \alpha_{y0}^{(p)} + \alpha_{y2}^{(p)}\theta^2 + O(\theta^4), \quad (14b)$$

$$\alpha_{xy} = \alpha_{xy1}^{(p)}\theta + \alpha_{xy3}^{(p)}\theta^3 + O(\theta^5), \quad (14c)$$

其中

$$\sigma_{x0}^{(p)} = \frac{A}{r_0 + L} + 2k, \quad (15a)$$

$$\sigma_{x2}^{(p)} = \frac{Cr_0^2}{(r_0 + L)^3} + \frac{Dr_0^2}{(r_0 + L)^4} - \frac{Ar_0}{(r_0 + L)^2} \left[ \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right], \quad (15b)$$

$$\sigma_{y0}^{(p)} = 2k, \quad (15c)$$

$$\sigma_{y2}^{(p)} = \frac{Ar_0^2}{(r_0 + L)^3}, \quad (15d)$$

$$\sigma_{xy1}^{(p)} = \frac{Ar_0}{(r_0 + L)^2}, \quad (15e)$$

$$\sigma_{xy3}^{(p)} = \frac{Cr_0^3}{(r_0 + L)^4} + \frac{4}{3} \frac{Dr_0^3}{(r_0 + L)^5} - 2 \frac{Ar_0^2}{(r_0 + L)^3} \left[ \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right] + \frac{Ar_0}{(r_0 + L)^2} \left[ \frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{6} \right]. \quad (15f)$$

另一方面, 将(11)代入(10), 可得出弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的一般形式为

$$\alpha_x = \sigma_{x0}^{(e)} + \sigma_{x2}^{(e)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (16a)$$

$$\alpha_y = \sigma_{y0}^{(e)} + \sigma_{y2}^{(e)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (16b)$$

$$\alpha_{xy} = \sigma_{xy1}^{(e)} y + \sigma_{xy3}^{(e)} \theta^3 + O(\theta^5). \quad (16c)$$

在  $O(\theta^4)$  的近似下, (16) 式中含有  $r_0, r_2$  两个未知量, 尽管我们这里还不能给出(16) 式中各项的具体表达式。

弹性场与塑性场在裂纹线附近弹塑性边界上的匹配条件为: 在弹塑性边界上, 应力要满足连续条件, 即: 弹性应力场和塑性应力场沿边界上任一点的法向分量相等, 切向分量也相等, 即

$$\sigma_{nm}^e = \sigma_{nm}^p, \quad \sigma_{ns}^e = \sigma_{ns}^p, \quad (17a, b)$$

而

$$\sigma_{nm} = \alpha_x n_x^2 + \alpha_y n_y^2 + 2\sigma_{xy} n_x n_y, \quad (18a)$$

$$\sigma_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) \alpha_{xy} + (\alpha_y - \alpha_x) n_x n_y. \quad (18b)$$

将(14)、(16) 分别代入(17) 并利用(18), 比较等式两端的  $\theta^0, \theta^1, \theta^2, \theta^3$  项的系数得

$$\sigma_{x0}^{(e)} = \sigma_{x0}^{(p)}, \quad (19)$$

$$\sigma_{xy1}^{(e)} + (\sigma_{y0}^{(e)} - \sigma_{x0}^{(e)}) B_1 = \sigma_{xy1}^{(p)} + (\sigma_{y0}^{(p)} - \sigma_{x0}^{(p)}) B_1, \quad (20)$$

$$\sigma_{x2}^{(e)} + (\sigma_{y0}^{(e)} - \sigma_{x0}^{(e)}) B_1^2 + 2\sigma_{xy1}^{(e)} B_1 = \sigma_{x2}^{(p)} + (\sigma_{y0}^{(p)} - \sigma_{x0}^{(p)}) B_1^2 + 2\sigma_{xy1}^{(p)} B_1, \quad (21)$$

$$\sigma_{xy3}^{(e)} - 2\sigma_{xy1}^{(e)} B_1^2 + (\sigma_{y0}^{(e)} - \sigma_{x0}^{(e)}) B_3 + (\sigma_{y2}^{(e)} - \sigma_{x2}^{(e)}) B_1 = \sigma_{xy3}^{(p)} - 2\sigma_{xy1}^{(p)} B_1^2 + (\sigma_{y0}^{(p)} - \sigma_{x0}^{(p)}) B_3 + (\sigma_{y2}^{(p)} - \sigma_{x2}^{(p)}) B_1. \quad (22)$$

这里我们忽略了  $\theta^4$  及其以上的高阶无穷小项。

公式(19) ~ (22) 中, 有  $A, C, D, L, r_0, r_2$  共 6 个未知数, 而目前独立的方程数仅有(19) ~ (22) 共 4 个。因此, 必须补充匹配方程数才能求解。此时, 我们假定: 弹性应力场在弹塑性边界上满足屈服条件, 将(16) 代入(2) 并比较等式两端的  $\theta^0, \theta^2$  项的系数得

$$\sigma_{y0}^{(e)} = 2k = \sigma_{y0}^{(p)}, \quad (23)$$

$$(\sigma_{y0}^{(e)} - \sigma_{x0}^{(e)}) \sigma_{y2}^{(e)} + (\sigma_{xy1}^{(e)})^2 = 0. \quad (24)$$

将(19)~(24)化简、解耦得

$$\sigma_{x0}^{(e)} = \sigma_{x0}^{(p)}, \tag{25a}$$

$$\sigma_{y0}^{(e)} = \sigma_{y0}^{(p)} = 2k, \tag{25b}$$

$$\sigma_{xy1}^{(e)} = \sigma_{xy1}^{(p)}, \tag{25c}$$

$$\sigma_{x2}^{(e)} = \sigma_{x2}^{(p)}, \tag{25d}$$

$$\sigma_{y2}^{(e)} = \sigma_{y2}^{(p)}, \tag{25e}$$

$$\sigma_{xy3}^{(e)} = \sigma_{xy3}^{(p)}. \tag{25f}$$

方程(25a)~(25f)即为按裂纹线场分析方法求解时,匹配方程在裂纹线附近的一般形式。由于(25a)~(25f)中等式的右端的具体形式已求出,见(15a)~(15f)式,因此,按线场分析方法进行求解时,关键是求出弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的具体形式,即求(25a)~(25f)中等式左端各项。一旦求得了(25a)~(25f)中等式左端各项,即可由匹配方程(25a)~(25f)求出决定塑性区长度及弹塑性边界单位法向量的关键未知量  $r_0$ 、 $r_2$  以及塑性区应力场中的待定量  $L$ 、 $A$ 、 $C$ 、 $D$ 。

下面我们针对一具体问题给出分析的一般过程及结果。

## 2 单向受拉的中心裂纹无限板在裂纹线附近的弹塑性场及弹塑性边界

从前面的分析可知,只要是理想弹塑性I型平面应力裂纹,只要加载关于裂纹线对称,其在裂纹线附近塑性应力场幂级数形式的通解均可表示为(9)。加载形式的不同,可由式中待定常数  $L$ 、 $A$ 、 $C$ 、 $D$  的不同来反映,但并不改变塑性场(9)的一般形式。由于匹配方程(25a)~(25f)中等式右端的各项是塑性应力场(9)在弹塑性边界上的表达式(14)中的项,对本具体问题,其一般形式仍由(15a)~(15f)表示。

现在,关键的问题是求出单向受拉的中心裂纹无限板在裂纹线附近的弹性应力场(10)中各项的具体形式,进而求出其在弹塑性边界上的值(16),再由匹配方程(25)求解。

对图2所示单向受拉的中心裂纹无限板,既满足远场边界条件又满足裂纹面边界条件的弹性应力场的精确解,可采用复变函数解法,由 Westergaard 应力函数  $Z_I(z) = \alpha_z / \sqrt{z^2 - a^2}$  求得。令  $z = a + re^{i\theta}$ , 将此解按  $r \rightarrow 0$  展开到裂纹尖端,即得通常的应力强度因子  $K$  场。但是本文关心的是在整个裂纹线附近均足够精确的量,将所得精确解按  $\theta \rightarrow 0$  展开到裂纹线附近,即得裂纹线附近弹性应力场的精确解为

$$\alpha_x = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ (a+r) - \frac{8a^2r + 7a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] - \sigma + O(\theta^4), \tag{26a}$$

$$\alpha_y = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ (a+r) + \frac{4a^2r + 5a^3}{2(2a+r)^2} \theta^2 \right] + O(\theta^4), \tag{26b}$$

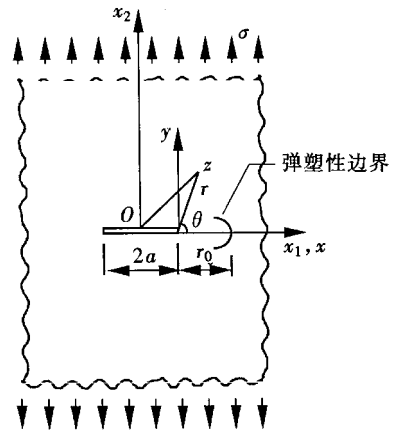


图2 单向受拉的中心裂纹无限板

$$\alpha_{xy} = \frac{\sigma}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[ \frac{a^2}{2a+r} \theta - \frac{31a^4 + 49a^3r + 28a^2r^2}{6(2a+r)^3} \theta^3 \right] + O(\theta^5). \quad (26c)$$

由此可见,对单向受拉的中心裂纹无限板,其弹性应力场的一般形式(10)中的项已表示成了具体形式(26)• 将(11)代入(26),即得弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的表达式为

$$\alpha_x = \sigma_{x0}^{(e)} + \sigma_{x2}^{(e)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (27a)$$

$$\alpha_y = \sigma_{y0}^{(e)} + \sigma_{y2}^{(e)} \theta^2 + O(\theta^4), \quad (27b)$$

$$\alpha_{xy} = \sigma_{xy1}^{(e)} y + \sigma_{xy3}^{(e)} \theta^3 + O(\theta^5). \quad (27c)$$

式(27)中的各项可表达为如下具体形式

$$\sigma_{x0}^{(e)} = \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} (a+r_0) - \sigma, \quad (28a)$$

$$\sigma_{y0}^{(e)} = \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} (a+r_0), \quad (28b)$$

$$\sigma_{xy1}^{(e)} = \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \frac{a^2}{2a+r_0}, \quad (28c)$$

$$\sigma_{x2}^{(e)} = - \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[ \frac{8a^2r_0 + 7a^3}{2(2a+r_0)^2} + \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} \right], \quad (28d)$$

$$\sigma_{y2}^{(e)} = \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[ \frac{4a^2r_0 + 5a^3}{2(2a+r_0)^2} - \frac{r_2}{r_0} \frac{a^2}{2a+r_0} \right], \quad (28e)$$

$$\sigma_{xy3}^{(e)} = - \frac{\sigma}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} \left[ \frac{31a^4 + 49a^3r_0 + 28a^2r_0^2}{6(2a+r_0)^3} + \frac{r_2}{r_0} \frac{a^3 + 2a^2r_0}{(2a+r_0)^2} \right]. \quad (28f)$$

此时,匹配方程(25a)~(25f)中等式左端各项已求出具体形式,将(28a)~(28f)和(15a)~(15f)分别代入匹配方程(25a)~(25f),可解得

$$r_0 = a \left[ \sqrt{\frac{4k^2}{4k^2 - \sigma^2}} - 1 \right] = a \left[ \sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2 - \sigma^2}} - 1 \right], \quad (29)$$

$$\frac{r_2}{r_0} = \frac{5a + 4r_0}{2(2a+r_0)} + \frac{\sigma_Y}{\sigma} \frac{a^2}{(2a+r_0)(a+r_0)}, \quad (30)$$

$$L = -r_0 \left[ \frac{(2a+r_0)}{a^2} \sqrt{r_0(2a+r_0)} + 1 \right], \quad (31)$$

$$A = \sigma \frac{r_0(2a+r_0)}{a^2} \sqrt{r_0(2a+r_0)}. \quad (32)$$

式中  $r_0$  为沿裂纹线塑性区的长度,  $r_2/r_0$  与裂纹线附近弹塑性边界的单位法向量(12)和(13)有关• 推导(29)、(30)式时利用了关系(3)• 式(31)、(32)中的  $L$ 、 $A$  为塑性应力场(8)或(9)中的待定常数• 需要说明,由于另外两个待定常数  $C$ 、 $D$  的表达式过于冗长,我们这里没有给出•

由(29)~(32)给出的结果与文[7]给出的相应的结果完全相同,但过程却简化了,这是因为,对具体问题,只需给出其在裂纹线附近的弹性应力场及其在弹塑性边界上的取值,然后按匹配方程(25a)~(25f)的一般形式即可求解•

### 3 结 论

通过以上分析,我们得出如下结论:

(a) 线场分析方法极大地简化了裂纹弹塑性问题的复杂性和数学上的困难,可将求解偏

微分方程的问题转化为求解常微分方程。对理想弹塑性 I 型平面应力裂纹, 只要几何形状、载荷关于裂纹线对称, 裂纹线附近塑性应力场的幂级数形式的通解均可表示为式(8)或(9)。

(b) 裂纹线附近弹塑性应力场在弹塑性边界上的匹配方程的一般形式可表示为(25a)~(25f)。匹配方程(25a)~(25f)中等式右端各项的一般形式由(15a)~(15f)表示。按线场分析方法进行求解时, 关键是求出弹性应力场在裂纹线附近的弹塑性边界上的具体形式, 即求(25a)~(25f)中等式左端各项。求解具体问题时, 需先求得弹性应力场在裂纹线附近的幂级数形式, 再求(25a)~(25f)中等式左端各项。一旦求得(25a)~(25f)中等式左端各项, 即可由匹配方程(25a)~(25f)求出决定塑性区长度及弹塑性边界单位法向量的关键未知量  $r_0, r_2$  以及塑性区应力场中的待定量  $L, A, C, D$ 。本文第2节通过一具体例子说明了这一求解过程。

(c) 本文完全放弃了传统的小范围屈服条件, 即放弃了塑性区外的弹性场为弹性奇异  $K$  场的假定, 并放弃了塑性区的存在使弹性场沿裂纹线向前移动了一距离的假定。按本文的方法求解, 其结果在裂纹线附近足够精确, 不受传统的小范围屈服条件的限制。

### [参 考 文 献]

- [1] Achenbach J D, Li Z L. Plane stress crack line fields for crack growth in an elastic perfectly plastic material[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1984, 20(3): 534—544.
- [2] GUO Quan\_xin, LI Ke\_rong. Plastic deformation ahead of a plane stress tensile crack growth in an elastic perfectly plastic solid[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 28(2): 139—146.
- [3] 易志坚. 理想弹塑性 III型扩展裂纹的全新和精确分析[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(4): 327—333.
- [4] YI Zhi\_jian. The most recent solutions of near crack line fields for mode III cracks[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(1): 147—155.
- [5] YI Zhi\_jian, WANG Shi\_jie, WU Heng\_li. Precise elastic plastic analysis of crack line field for mode II plane strain crack[J]. International Journal of Fracture, 1996, 80: 353—363.
- [6] YI Zhi\_jian, WANG Shi\_jie, WANG Xiang\_jian. Precise solutions of elastic plastic crack line fields for cracked plate loaded by antiplane point forces[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1997, 57(1): 75—83.
- [7] 易志坚. I 型平面应力有限宽裂纹板弹塑性分析[J]. 西南交通大学学报, 1998, 33(1): 82—87.
- [8] Drucker D C, Rice J R. Plastic deformation in brittle and ductile fracture[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1969, 1: 577—602.
- [9] 易志坚, 王士杰. 理想弹塑性 I 型平面应力裂纹线场的精确解[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(4): 335—342.



# General Form of Matching Equation of Elastic\_Plastic Field Near Crack Line for Mode I Crack Under Plane Stress Condition

YI Zhi\_jian<sup>1</sup>, YAN Bo<sup>2</sup>

(1. Department of Bridge and Structure Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P R China;

2. Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing 400044, P R China)

**Abstract:** Crack line field analysis method has become an independent method for crack elastic\_plastic analysis, which greatly simplifies the complexity of crack elastic\_plastic problems and overcomes the corresponding mathematical difficulty. With this method, the precise elastic\_plastic solutions near crack lines for variety of crack problems can be obtained. But up to now all solutions obtained by this method were for different concrete problems, no general steps and no general form of matching equations near crack line are given out. With crack line analysis method, this paper proposes the general steps of elastic\_plastic analysis near crack line for mode I crack in elastic\_perfectly plastic solids under plane stress condition, and in turn given out the solving process and result for a specific problem.

**Key words:** crack; elastic\_plasticity; crack\_line analysis method; crack line; plane stress