应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_1081_11

多重尺度法应用于变厚度开顶扁球壳在复合载荷下的非线性稳定问题

康盛亮

(同济大学 应用数学系, 上海 200092)

(林宗池推荐)

摘要: 利用改进多重尺度法研究了大几何参数的变厚度的具有刚性中心的开顶扁球壳, 在复合载荷作用下的非线性稳定问题 求得了扁壳几何参数 k 值较大时, 本问题的一致有效的渐近解, 并进行了余项误差估计

关 键 词: 变厚度扁壳; 非线性稳定性; 改进多重尺度法
中图分类号: O302 文献标识码: A

引 言

在近代建筑工程和精密仪器工程中, 为了更合理地利用材料和使造型轻便美观, 已出现了变厚度超薄型的轻型结构 这样, 在工程实际中, 就要经常使用非均匀厚度的大几何参数的柔韧壳体 按照设计要求, 需要研究其稳定性, 从理论上导出尽量精确可靠的计算公式或图表

由于变厚度扁球壳屈曲问题的基本方程是较复杂的非线性方程, 求出这些方程的精确解在数学上存在很大困难 所以, 多年来人们大都采用某种近似方法讨论几何参数 k 值较小时变厚度扁球壳的稳定性问题[1], 而对于几何参数 k 值较大的变厚度开顶扁球壳的非线性稳定问题的讨论却很少见, 作者曾在文[2] 中首先利用改进多重尺度法研究了单一载荷作用下大几何参数的变厚度开顶扁球壳的非线性稳定问题

本文利用改进多重尺度法, 研究当壳体几何参数 k 值较大时, 具有硬中心、外边缘固定夹紧的变厚度开顶扁球壳, 在均布载荷和集中载荷共同作用下的非线性弯曲问题 克服了在内、外边缘同时出现边界层现象的困难, 导出了此边值问题的一致有效渐近解, 进行了余项误差估计, 为决定临界载荷提供了较精确可靠的计算公式

1 基本方程和边界条件

考虑具有硬中心, 外边缘固定, 变厚度的开顶扁球壳

设壳体厚度为 $h(r)$, 中曲面半径为 R, 跨度为 $2a$, 内缘半径为 b, 在均布载荷 q 和集中载荷 p 的共同作用下, 轴对称变厚度圆底扁球壳大挠度理论的基本方程为[1,3]

收稿日期: 1999_10_25; 修订日期: 2001_04_27
作者简介: 康盛亮(1937) , 男, 教授.

$$
\begin{cases}
D\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)\right)+\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\quad}{r}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)-N_r\left(\dfrac{r}{R}+\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)= \\
\qquad \dfrac{1}{2\ r}[p+\quad q(r^2-\ b^2)], \\
\dfrac{1}{Eh}r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2N_r)\right)+\dfrac{r}{R}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)^2= \\
\qquad \dfrac{1}{Eh^2}\left[\dfrac{\mathrm{d}(r^2N_r)}{\mathrm{d}r}-(1+\quad)rN_r\right]\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}
\end{cases}
\tag{1}
$$

假定球壳外边缘固定夹紧, 而内边缘固定在可上、下移动的无变形的硬中心上, 则挠度 w 和径向内力 N_r 满足下列边界条件:

$$
\begin{cases}
\text{当 } r=\ a \text{ 时}, \ w=0,\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=0,\ (1-\quad)N_r+r\dfrac{\mathrm{d}N_r}{\mathrm{d}r}=0, \\
\text{当 } r=\ b \text{ 时}, \ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}=0,\ (1-\quad)N_r+r\dfrac{\mathrm{d}N_r}{\mathrm{d}r}=0
\end{cases}
\tag{2}
$$

设壳体的厚度函数为

$$
h(r)=h_0\left[1+\quad\left(\frac{r^2-\ b^2}{a^2}\right)\right],
\tag{3}
$$

其中, h_0 为硬中心处的壳厚, 为变厚度参数

为了简化计算, 我们引进无量纲量:

$$
\begin{cases}
\ =\dfrac{r^2}{a^2},\quad =\dfrac{b^2}{a^2},\ y=\sqrt{3(1-\ ^2)}\dfrac{w}{h_0},\quad =\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\ },\quad =\dfrac{1}{2}(1+\quad), \\
S=\dfrac{3(1-\ ^2)a^2}{Eh_0^3}N_r,\quad Q=[3(1-\ ^2)]^{3/2}\dfrac{a^2p}{2\ Eh_0^4}, \\
Q=[3(1-\ ^2)]^{3/2}\dfrac{qa^4}{2\ Eh_0^4},\quad k=\dfrac{a^2\sqrt{3(1-\ ^2)}}{2Rh_0}
\end{cases}
\tag{4}
$$

将方程(1)及边界条件(2)化为无量纲边值问题

$$
\begin{cases}
\ ^2[1+\quad(\ -\ )]^3\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ ^2}(\quad)+3\ ^2[1+\quad(\ -\ )]^2\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}+\quad\right)- \\
\qquad \ ^2S\ -S+\ ^2Q[(\ -\ \ ^2)^{-1}+\quad]=0, \\
\ ^2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\ ^2}(\ S)+\dfrac{1}{2}\ ^2[1+\quad(\ -\ )]\ ^2+[1+\quad(\ -\ )]\ +\\
\qquad \dfrac{\ ^2}{1+\quad(\ -\ )}\dfrac{\mathrm{d}(\ S)}{\mathrm{d}}-\dfrac{\ ^2S}{1+\quad(\ -\ )}=0
\end{cases}
\tag{5}
$$

$$
\begin{cases}
\text{当 }\ =1\text{ 时},\ y=0,\quad =0,\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}}+(1-\quad)S=0, \\
\text{当 }\ =\quad\text{ 时},\quad =0,\quad \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}}+(1-\quad)S=0
\end{cases}
\tag{6}
$$

其中

$$
\ ^2=\frac{2Rh_0}{a^2\sqrt{3(1-\ ^2)}}
$$

这样, 我们的问题就化为在边界条件(6)下求解带小参数 $\ >0$ 的变系数的非线性微分方程组(5)

2 非线性摄动问题的求解

2.1 外部解

假设边值问题(5)和(6)的解的外部展开式为

$$^{o} = \sum_{n=0} {}^{n}{}_{n}(\ ),\quad S^{o} = \sum_{n=0} {}^{n}S_{n}(\ ),\tag{7}$$

把(7)代入方程(5)，令 的各次幂系数为零，得到 $_{n}(\ )$、$S_{n}(\ )(n = 0, 1, 2, \ )$ 的递推方程 从而容易求得外部解为

$$\begin{cases} S^{o} = {}^{2}Q[(\ -\ ^{2})^{-1} + \ ] + O(^{5}), \\ {}^{o} = {}^{4}Q\ (\ -1)[(\ -\ ^{2})^{-2} + 2\ ][1 + \ (\ -\ )]^{-2} + O(^{5}) \end{cases}\tag{8}$$

显然，(8)不满足两端边界条件(6)，故在 $= 1$ 及 $=$ 近旁出现边界层 下面应用 两变量展开 程序在 $= 1$ 及 $=$ 的邻域内构造边界层校正项

2.2 边界层项

在 $= 1$ 的邻域内引进两变量

$$= \frac{u(\ )}{},\quad =$$

将关于 的导数换成 、 的偏导数

$$— = {}^{-1}(\ _{1,0} + \ _{1,1}),\quad \frac{^{2}}{^{2}} = {}^{-2}(\ _{2,0} + \ _{2,1} + \ ^{2}\ _{2,2}),$$

其中

$$_{1,0} = u\ —,\quad _{1,1} = —,\quad _{2,0} = (u\ )^{2}\frac{^{2}}{^{2}},$$

$$_{2,1} = 2u\ \frac{^{2}}{} + u\ —,\quad _{2,2} = \frac{^{2}}{^{2}}$$

把(5)所对应的齐次方程组变换成

$$\begin{cases} (D_{0} + \ D_{1} + \ ^{2}D_{2})\ -\ ^{2}\ S - \ S = 0, \\ (D_{3} + \ D_{4} + \ ^{2}D_{5})S + [1 + \ (\ -\ )]^{2}\ + \\ \qquad \frac{1}{2}\ ^{2}[1 + \ (\ -\ )]^{2}\ ^{2} = 0, \end{cases}\tag{9}$$

其中

$$D_{0} = \ [1 + \ (\ -\ )]^{3}\ _{2,0},$$

$$D_{1} = \ [1 + \ (\ -\ )]^{3}\ _{2,1} + \ [1 + \ (\ -\ )]^{2}\left\{2[1 + \ (\ -\ )] + 3\ \right\}_{1,0},$$

$$D_{2} = \ [1 + \ (\ -\ )]^{3}\ _{2,2} + \ [1 + \ (\ -\ )]^{2}\left\{2[1 + \ (\ -\ )] + 3\ \right\}_{1,1} + 3\ ,$$

$$D_{3} = \ [1 + \ (\ -\ )]\ _{2,0},$$

$$D_{4} = \ [1 + \ (\ -\ )]\ _{2,1} + \left\{\ + 2[1 + \ (\ -\ )]\right\}_{1,0},$$

$$D_{5} = \ [1 + \ (\ -\ )]\ _{2,2} + \left\{\ + 2[1 + \ (\ -\ )]\right\}_{1,1} + (1 - \ )$$

设在 $= 1$ 的邻域内边界层校正项的 N 阶近似式为

$$V^{(1)}(\ ,\ ;\ ) = \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1}v_{n}(\ ,\ ),\quad {}^{(1)} = \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1}h_{n}(\ ,\ ),\tag{10}$$

其中, v_n 和 h_n 是在 $= 1$ 的邻域内的待求的边界层型函数

将(10) 代入(9) 得

$$\begin{cases} (D_0 + \quad D_1 + \quad {}^2 D_2) \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1} h_n - \sum_{n=2}^{2N} \sum_{k=0}^{n-2} {}^{n+2} v_k h_{n-2-k} - \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1} v_n = 0, \\ (D_3 + \quad D_4 + \quad {}^2 D_5) \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1} v_n + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 \sum_{n=0}^{N} {}^{n+1} h_n + \\ \qquad \frac{1}{2} [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 \sum_{n=2}^{2N} {}^{(n+2)} \sum_{k=0}^{n-2} h_k h_{n-2-k} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

在上式中逐次地比较 的同次幂的系数, 得到 v_n、h_n 的递推方程:

$$D_0 h_0 - \quad v_0 = 0, \tag{12}$$

$$D_0 h_1 - \quad v_1 + D_1 h_0 = 0, \tag{13}$$

$$D_0 h_2 - \quad v_2 + D_1 h_1 + D_2 h_0 = 0, \tag{14}$$

,

$$D_0 h_{n-1} - \quad v_{n-1} + D_1 h_{n-2} + D_2 h_{n-3} - \sum_{k=0}^{n-4} v_k h_{n-4-k} = 0 \qquad (n = 4, 5, 6, \quad), \tag{15}$$

$$D_3 v_0 + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_0 = 0, \tag{16}$$

$$D_3 v_1 + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_1 + D_4 v_0 = 0, \tag{17}$$

$$D_3 v_2 + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_2 + D_4 v_1 + D_5 v_0 = 0, \tag{18}$$

,

$$D_3 v_{n-1} + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_{n-1} + D_4 v_{n-2} + D_5 v_{n-3} + \frac{1}{2} [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 \sum_{k=0}^{n-4} h_k h_{n-4-k} = 0 \qquad (n = 4, 5, 6, \quad) \tag{19}$$

由(12) 和(16) 得

$$D_0 h_0 - \quad v_0 = 0, \quad D_3 v_0 + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_0 = 0, \tag{20}$$

则有

$$(u \quad)^4 \quad [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 \frac{{}^4 v_0}{{}^4} + \quad v_0 = 0 \tag{21}$$

在方程(21) 中, 若取 $u \quad = \left\{ \quad [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 \right\}^{-1/4}$, 即取

$$u(\quad) = \int^{1} \left\{ t [1 + \quad (t - \quad)]^2 \right\}^{-1/4} \mathrm{d}t, \tag{22}$$

则得

$$\frac{{}^4 v_0}{{}^4} + \quad v_0 = 0 \tag{23}$$

容易求得(23) 具有边界层性质的解为

$$v_0 = C_0(\quad) \exp\left[- \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \mathrm{i}) \quad \right] + \mathrm{CC.}, \tag{24}$$

其中, CC. 表示前面表达式的复共轭量

把(24) 代入(20) 第二式可得

$$h_0 = \mathrm{i} C_0(\quad) \quad {}^{1/2} \exp\left[- \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \mathrm{i}) \quad \right] + \mathrm{CC.} \tag{25}$$

将(24) 和(25) 代入(13) 和(17), 并由消除 h_1、v_1 中的长期项, 可得 $C_0 = 0$, 从而得

$$v_0 = 0,\quad h_0 = 0, \tag{26}$$

于是, 关于 h_1、v_1 的方程化为

$$D_0 h_1 - \quad v_1 = 0,\quad D_3 v_1 + [1 + \quad (\quad - \quad)]^2 h_1 = 0 \tag{27}$$

再由以后导出的关于 v_i、h_i 的边界条件, 可逐步求得 v_i、h_i $(i = 1, 2, \quad , N)$

类似地, 在 $\quad = \quad$ 的邻域内引进两变量

$$= \frac{u(\quad)}{\quad},\quad G = \quad Q,$$

可以把(5) 对应的齐次方程变换成

$$\begin{cases} (D_0 + ED_1 + E^2 D_2) H - E^2 GSH - GS = 0, \\ (D_3 + ED_4 + E^2 D_5) S + [1 + B(G - A)]^2 H + \\ \qquad \frac{1}{2} E^2 [1 + B(G - A)]^2 H^2 = 0, \end{cases} \tag{28}$$

其中, $D_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, $D_j (i = 1, 2; j = 0, 1, 2)$ 与(9) 式相应的记号类同#

假设在 $Q = A$ 的邻域内的边界层项具有下列形式的N 阶近似式

$$\begin{cases} V^{(A)}(N, G; E) = \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} v_n(N, G), \\ H^{(A)}(N, G; E) = \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} h_n(N, G), \end{cases} \tag{29}$$

其中, v_n 和h_n 是在$Q = A$ 的邻域内待求的边界层型函数#

与前面讨论的步骤相同, 可得关于 v_n、h_n $(n = 1, 2, \ , \ )$ 的递推方程# 而且, 若取 $uc = \left\{ G[1 + B(G - A)]^2 \right\}^{-1/4}$, 即取

$$u(G) = \int_{QA}^{G} \left\{ t[1 + B(t - A)]^2 \right\}^{-1/4} \mathrm{d}t,$$

则可逐次求出上述递推方程的具有边界层型函数的解为

$$\begin{cases} v_0 = C_0(G) \exp\left[- \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}) N \right] + \mathrm{CC.}, \\ h_0 = \mathrm{i} \sqrt{G} C_0(G) \exp\left[- \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}) N \right] + \mathrm{CC.}\# \end{cases} \tag{30}$$

由取 $C_0 = 0$, 可得

$$v_0 = 0,\quad h_0 = 0\# \tag{31}$$

而 v_1 和 h_1 由下列方程

$$D_0 h_1 - Gv_1 = 0,\quad D_3 v_1 + [1 + B(G - A)]^2 h_1 = 0 \tag{32}$$

和以后导出的关于 v_1、h_1 的边界条件确定# 类似地, 可以逐步求得 v_i、h_i $(i = 1, 2, \ , \ , N)$#

假设边值问题(5) 和(6) 的解 S、H 的N 阶近似式为

$$\begin{cases} S_N = \sum_{n=0}^{N} E^n S_n(Q) + \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} v_n(N, G) + \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} v_n(N, G), \\ H_N = \sum_{n=0}^{N} E^n H_n(Q) + \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} h_n(N, G) + \sum_{n=0}^{N} E^{n+1} h_n(N, G), \end{cases} \tag{33}$$

其中, S_n、H_n、v_n、h_n、v_n 和 h_n 分别由前述相应的递推方程所确定#

将(33) 式代入边界条件(6), 考虑到 $v_n(v_n)$ 和 $h_n(h_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ , \ , N)$ 的边界层的性质, 得到关系式

$$\mathop{}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n H_n(1) + \mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^{n+1} h_n(N, G)\Big|_{G=1} = 0, \tag{34}$$

$$\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n S_n^C(1) + (1- K)\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n S_n(1) + \mathop{E}\limits_{n=0}^{N} (D_{1,0} + ED_{1,1}) E^n v_n\Big|_{G=1} +$$

$$(1- K)\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^{n+1} v_n\Big|_{G=1} = 0, \tag{35}$$

$$\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n H_n(A) + \mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^{n+1} h_n(N, G)\Big|_{G=A} = 0, \tag{36}$$

$$\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n S_n^C(A) + (1- K)\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^n S_n(A) + A\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} (D_{1,0} + ED_{1,1}) E^n v_n\Big|_{G=A} +$$

$$(1- K)\mathop{E}\limits_{n=0}^{N} \mathrm{E}^{n+1} v_n\Big|_{G=A} = 0\# \tag{37}$$

从关于 v_1、h_1 的方程(27) 和边界条件(34)、(35) (取 $n = 1$)

$$h_1 | _{G=1} = 0, \quad \frac{5 v_1}{5 N}\Big|_{G=1} = 0 \tag{38}$$

解得

$$h_1 = 0, \quad v_1 = 0\# \tag{39}$$

代入(14) 和(18) 以及边界条件(34)、(35) (取 $n = 2$) 得

$$\begin{cases} D_0 h_2 - G v_2 = 0, \quad D_3 v_2 + [1+ B(G- A)]^2 h_2 = 0, \\ h_2 | _{G=1} = 0, \quad \dfrac{5 v_2}{5 N}\Big|_{G=1} = Q C^* A^{-1}, \end{cases} \tag{40}$$

其中 $C^* = B(K- 3) + (1+ K)(A- BA^2)\#$

容易求得(40) 具有边界层性质的解为

$$\begin{cases} v_2 = C_2(G)\exp\left[- \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1- \mathrm{i}) N\right] + \mathrm{CC.}, \\ h_2 = \mathrm{i} C_2(G)\sqrt{G}\exp\left[- \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1- \mathrm{i}) N\right] + \mathrm{CC.}\# \end{cases} \tag{41}$$

把(26)、(39)、(41) 代入(15)、(19) (取 $n = 4$) 得

$$\begin{cases} D_0 h_3 - G v_3 = - D_1 h_2, \\ D_3 v_3 + [1+ B(G- A)]^2 h_3 = - D_4 v_2\# \end{cases} \tag{42}$$

由消除(42) 的解 v_3、h_3 中出现长期项和(40) 中的边界条件可定出

$$C_2(G) = - \frac{\sqrt{2} Q \mathrm{e}^{1- G} C^*}{A^3 \sqrt{A} G^{3/8}[1+ B(G- A)]^{5/4}}\# \tag{43}$$

将(43) 代入(41) 得

$$\begin{cases} v_2 = - \dfrac{2\sqrt{2}\mathrm{e} Q \cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}N}{A^3 \sqrt{A} G^{3/8}[1+ B(G- A)]^{5/4}} C^* \exp\left[- \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}N + G\right)\right], \\ h_2 = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt[8]{G}\,\mathrm{e} Q \sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}N}{A^3 \sqrt{A}[1+ B(G- A)]^{5/4}} C^* \exp\left[- \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}N + G\right)\right], \end{cases} \tag{44}$$

其中 $A = [1+ B(1- A)]^{-1/2}\#$

再从关于 v_1 和 h_1 的方程(32) 以及边界条件(36)、(37) (取 $n = 1$) 得

$$h_1 \mid_{G= A} = 0, \quad \left.\frac{5 v_1}{5 N}\right|_{G= A} = 0\# \tag{45}$$

解得

$$h_1 = 0, \quad v_1 = 0\# \tag{46}$$

把(31)、(46)代入递推方程及边界条件(36)、(37)(取 $n = 2$)得

$$\begin{cases} D_0 h_2 - G v_2 = 0, \quad h_2 \mid_{G= A} = 0, \\ D_3 v_2 + [1 + B(G - A)]^2 h_2 = 0, \quad \left.\frac{5 v_2}{5 N}\right|_{G= A} = B^*, \end{cases} \tag{47}$$

其中 $B^* = A^{-11/4} Q[A - 2BA^2 - (1 - K) AA]\#$

容易求得(47)具有边界层性质的解为

$$\begin{cases} v_2 = C_2(G)\exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}) N\right] + \mathrm{CC.}, \\ h_2 = \mathrm{i} C_2(G)\sqrt{G}\exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i}) N\right] + \mathrm{CC.}\# \end{cases} \tag{48}$$

类似地,可以定出

$$C_2(G) = -\sqrt{2} B^* \left(\frac{A}{G}\right)^{3/8} [1 + B(G - A)]^{-5/4} \mathrm{e}^{A - G}\#$$

从而得

$$\begin{cases} v_2 = -2\sqrt{2} B^* A^{3/8} G^{-3/8} \mathrm{e}^{A}[1 + B(G - A)]^{-5/4} \cos\frac{\sqrt{2}}{2} N \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} N + G\right)\right], \\ h_2 = 2\sqrt{2} B^* A^{3/8} \mathrm{e}^{A} \sqrt[8]{G}[1 + B(G - A)]^{-5/4} \sin\frac{\sqrt{2}}{2} N \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} N + G\right)\right]\# \end{cases} \tag{49}$$

于是,可得(5)和(6)的解的 N 阶渐近似式为:

$$\begin{aligned} S_N = {} & E^2 Q[(A - BA^2) Q^{-1} + BQ] - 2\sqrt{2} E^3 Q^{-3/8} [1 + B(Q - A)]^{-5/4} @ \\ & \left\{ \mathrm{e} A^{-7/2} C^* Q \cos\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} + Q\right)\right] + \right. \\ & \left. A^{3/8} \mathrm{e}^{A} B^* \cos\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} + Q\right)\right] \right\} + O(E^4), \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} H_N = {} & 2\sqrt{2} E^3 \sqrt[8]{Q} [1 + B(Q - A)]^{-5/4} \left\{ \mathrm{e} A^{-7/2} C^* Q \sin\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} @ \right. \\ & \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} + Q\right)\right] + B^* \mathrm{e}^{A} A^{3/8} \sin\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} @ \\ & \left. \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2} u(Q)}{2E} + Q\right)\right] \right\} + O(E^4)\# \end{aligned} \tag{51}$$

213 余项估计

我们以 R_N、Z_N 分别表示边值问题(5)和(6)的真解 H_E、S_E 与形式渐近解 H_N、S_N 的余项,即 $R_N = H_E - H_N$, $Z_N = S_E - S_N\#$

且记

$$R_N = E^{N+1} R^N, \quad Z_N = E^{N+1} Z^N,$$

$$a(Q) = E^2\left[\frac{2}{Q} - \frac{3B}{1 + B(Q - A)}\right], \quad b(Q) = E^2\left[\frac{2}{Q} + \frac{B}{1 + B(Q - A)}\right],$$

$$f(Q, H, S) = E^2 Q^{-1} [1 + B(Q - A)]^{-3} \left\{ -3BK[1 + B(Q - A)]^2 H + \right.$$

$$SH+E^{2}S-Q[(A-BA^{2})Q^{-1}+BQ],$$

$$g(Q,H,S)=E^{2}Q^{-1}[1+B(Q-A)]^{-1}\left\{\frac{1}{2}[1+B(Q-A)]^{3}H^{2}Q-(1-K)BS\right\}-[1+B(Q-A)]HQ^{-1}\#$$

将 $H_E=H_N+E^{N+1}R^{N}$, $S_E=S_N+E^{N+1}Z^{N}$ 代入边值问题(5) 和(6) 得到 R^{N}、Z^{N} 满足下列边值问题

$$\begin{cases} E^{2}\dfrac{d^{2}R^{N}}{dQ^{2}}+a(Q)\dfrac{dR^{N}}{dQ}=F(R^{N},Z^{N})+p(Q,E), \\ E^{2}\dfrac{d^{2}Z^{N}}{dQ^{2}}+b(Q)\dfrac{dZ^{N}}{dQ}=G(R^{N},Z^{N})+q(Q,E), \\ R^{N}\mid_{Q=A,1}=O(1),\quad \left[Q\dfrac{dZ^{N}}{dQ}+(1-K)Z^{N}\right]\Big|_{Q=A,1}=O((1), \end{cases} \tag{52}$$

其中

$$F(R^{N},Z^{N})=E^{-(N+1)}[f(Q,H_N+E^{N+1}R^{N},S_N+E^{N+1}Z^{N})-f(Q,H_N,Z_N)],$$

$$G(R^{N},Z^{N})=E^{-(N+1)}[g(Q,H_N+E^{N+1}R^{N},S_N+E^{N+1}Z^{N})-g(Q,H_N,Z_N)],$$

$$p(Q,E)=O(1+E^{-1}\exp[-ku(Q)/E])\qquad(\text{对 } k>0),$$

$$q(Q,E)=O(1+E^{-1}\exp[-ku(Q)/E])\qquad(\text{对 } k>0)\#$$

为了估计余项 R^{N} 和 Z^{N}, 我们把边值问题(52) 化为以下积分方程组# 下面为了简便起见省去了 R^{N} 和 Z^{N} 的上角标#

$$\begin{cases} R(Q,E)=R_0(Q,E)+E^{-2}\int_Q^1\left\{\int_u^1 v^{-2}[1+B(v-A)]^{-3}dv\right\}u^{2}[1+ \\ \qquad B(u-A)]^{3}F(R(u),Z(u))du+\int_A^1 B(Q,u,E)F(R(u),Z(u))du, \\ Z(Q,E)=Z_0(Q,E)+E^{-2}\int_Q^1\left\{\int_u^1 v^{-2}[1+B(v-A)]dv\right\}u^{2}[1+ \\ \qquad B(u-A)]G(R(u),Z(u))du+\int_A^1 B(Q,u,E)G(R(u),Z(u))du, \end{cases} \tag{53}$$

其中

$$R_0(Q,E)=(R(1,E)+E^{2}R_Q(1,E))-E^{2}R_Q(A,E)\left\{\exp\left[-\frac{1}{E^{2}}\int_A^1 a(t)dt\right]+\frac{1}{E^{2}}\int_Q^1\exp\left[\frac{-1}{E^{2}}\int_A^v a(t)dt\right]dv\right\}-\int_A^1\exp\left\{\frac{-1}{E^{2}}\int_u^1 a(t)dt\right\}p(u,E)du-\frac{1}{E^{2}}\int_Q^1\int_A^v\exp\left\{-\frac{1}{E^{2}}\int_u^v a(t)dt\right\}p(u,E)dudv,$$

$$Z_0(Q,E)=(S(1,E)+E^{2}S_Q(1,E))-E^{2}S_Q(A,E)\left\{\exp\left[\frac{-1}{E^{2}}\int_A^1 b(t)dt\right]+\frac{1}{E^{2}}\int_Q^1\exp\left[\frac{-1}{E^{2}}\int_A^v b(t)dt\right]dv\right\}-\int_A^1\exp\left\{\frac{-1}{E^{2}}\int_u^1 b(t)dt\right\}q(u,E)du-\frac{1}{E^{2}}\int_Q^1\int_A^v\exp\left\{\frac{-1}{E^{2}}\int_u^v b(t)dt\right\}q(u,E)dudv\#$$

$$B(Q,u,E)=-\exp\left[\frac{-1}{E^{2}}\int_u^1 a(t)dt\right]-\frac{1}{E^{2}}G(Q-u)\int_Q^1\exp\left[-\frac{1}{E^{2}}\int_u^v a(t)dt\right]dv,$$

$$(K)=\begin{cases}0 & K<0,\\ 1 & K>0.\end{cases}$$

显然 $\int_{A}^{1} B(Q,u,E)\,\mathrm{d}u = O(E^2).$

现在，我们把(53)式第二项积分中的 F, G 线性化得到

$$R(Q)=R_0(Q,E)+\int_{Q}^{1}K_1(u,E)R(u)\,\mathrm{d}u+\int_{Q}^{1}K_2(u,E)Z(u)\,\mathrm{d}u+\int_{A}^{1}B(Q,u,E)F(R(u),Z(u))\,\mathrm{d}u+E^{N+1}H(Q,R(Q),Z(Q)),\tag{54}$$

$$Z(Q)=Z_0(Q,E)+\int_{Q}^{1}K_3(u,E)R(u)\,\mathrm{d}u+\int_{Q}^{1}K_4(u,E)Z(u)\,\mathrm{d}u+\int_{A}^{1}B(Q,u,E)G(R(u),Z(u))\,\mathrm{d}u+E^{N+1}M(Q,R(Q),Z(Q)),\tag{55}$$

其中

$$(K_1(u,E),K_2(u,E))=-(f_H(u,R_N,Z_N),f_S(u,R_N,Z_N))\cdot\frac{1}{E^2}\int_{u}^{1}\exp\left[\frac{-1}{E^2}\int_{u}^{v}a(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}v,$$

$$(K_3(u,E),K_4(u,E))=-(g_H(u,R_N,Z_N),g_S(u,R_N,Z_N))\cdot\frac{1}{E^2}\int_{u}^{1}\exp\left[\frac{-1}{E^2}\int_{u}^{v}b(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}v.$$

当 R、Z 有界时，H、M 是有界函数.

我们把(54)、(55)写成下列向量形式

$$\mathrm{R}^*=R_0^*+\mathrm{J}_1\mathrm{R}^*+\mathrm{J}_2\mathrm{R}^*,\tag{56}$$

其中

$$\mathrm{R}^*=\begin{pmatrix}R\\ Z\end{pmatrix},\quad R_0^*=\begin{pmatrix}R_0\\ Z_0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{J}_1\mathrm{R}^*=\int_{Q}^{1}\mathrm{K}^*(u,E)R^*(u,E)\,\mathrm{d}u,\quad \mathrm{J}_2\mathrm{R}^*=\int_{A}^{1}\mathrm{M}^*(R^*,Q,u,E)\,\mathrm{d}u,$$

而

$$\mathrm{K}^*=\begin{pmatrix}K_1 & K_2\\ K_3 & K_4\end{pmatrix},\quad M^*=\begin{pmatrix}B & F\\ B & G\end{pmatrix}+E^{N+1}\begin{pmatrix}H\\ M\end{pmatrix}.$$

因为核 K^* 是有界的，所以向量积分算子 J_1 是可逆的，即 $(I-\mathrm{J}_1)^{-1}$ 存在，从而，(56) 可化为

$$\mathrm{R}^*=(I-\mathrm{J}_1)^{-1}\mathrm{R}_0^*+(I-\mathrm{J}_1)^{-1}\mathrm{J}_2\mathrm{R}^*,\tag{57}$$

其中 $(I-\mathrm{J}_1)^{-1}<=<+\int_{Q}^{1}W^*(Q,u,E)<(u)\,\mathrm{d}u.$

对任何 $<$ 和对 K^* 的预解核 $W^*(Q,u,E)$，当 E 充分小时，它在 $A\leq Q,u\leq 1$ 上是有界的(参见文献[4]).

引进范数

$$\|\mathrm{R}^*\|=\sup(|R|,|Z|;\ A\leq Q\leq 1,\ 0<E\leq E_0),$$

我们有

$$\left|\int_{A}^{1}B(Q,u,E)(F(R_1(u),Z_1(u))-F(R_2(u),Z_2(u)))\,\mathrm{d}u\right|\leq$$

$$L_1\left(\int_{Q}^{1}{}_{A}B(Q, u, E)\,\mathrm{d}u\right) + R_1^* - R_2^* {}_{+} = O(E^2) + R_1^* - R_2^* {}_{+},$$

同理

$$\left|\int_{Q}^{1}{}_{A}B(Q, u, E)[G(R_1(u), Z_1(u)) - G(R_2(u), Z_2(u))]\,\mathrm{d}u\right[$$

$$L_2\int_{Q}^{1}{}_{A}B(Q, u, E)\,\mathrm{d}u\# + R_1^* - R_2^* {}_{+} = O(E^2) + R_1^* - R_2^* {}_{+}\#$$

又因

$$(I - J_1)^{-1}J_2 R^* = \int_{Q}^{1}{}_{A}M^*(R^*, Q, u, E)\,\mathrm{d}u +$$

$$\int_{Q}^{1}{}_{Q}W(Q, u, E)\int_{Q}^{1}{}_{A}M^*(R^*, u, v, E)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u,$$

由 M^* 的定义, 则有

$$+ (I - J_1)^{-1}(J_2 R_1^* - J_2 R_2^*) + [\ L_3 E^2 {}_{+} R_1^* - R_2^* {}_{+}\#$$

利用 Banach 不动点定理, 可知在 $C[A, 1]\ @\ C[A, 1]$ 上存在唯一不动点, 即对充分小的 E, 在 A [Q [1 上存在唯一的连续函数组 (R, Z) 满足积分方程(53)#

综合上述讨论, 我们有下面的定理#

定理 1 当 E 充分小时, 边值问题(5) 和(6) 在 A [Q [1 上存在唯一解 $(S(Q, E), H(Q, E))$, 且对每个整数 N \ 0 解可表为

$$S(Q, E) = S_N(Q, E) + E^{N+1}Z^N(Q, E),$$

$$H(Q, E) = H_N(Q, E) + E^{N+1}R^N(Q, E),$$

其中, S_N 和 H_N 由(33) 式给出, R^N 和 Z^N 在 A [Q [1 上一致有界# 即问题(5) 和(6) 在 A [Q [1 上一致有效渐近解为

$$S = E^2 Q[(A - BA^2)Q^{-1} + BQ] - 2\sqrt{2}E^3 Q^{-3/8}[1 + B(Q - A)]^{-5/4}\ @$$

$$\left\{A^{-7/2}\mathrm{e}C^*\ Q\cos\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E}\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E} + Q\right)\right] +\right.$$

$$\left.A^{3/8}\mathrm{e}^{A}B^*\ \cos\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E}\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E} + Q\right)\right]\right\} + O(E^4),$$

$$H = 2\sqrt{2}E^3\sqrt[8]{Q}[1 + B(Q - A)]^{-5/4}\left\{\mathrm{e}A^{-7/2}C^*\ Q\sin\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E}\ @\right.$$

$$\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E} + Q\right)\right] + A^{3/8}\mathrm{e}^{A}B^*\ \sin\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E}\ @$$

$$\left.\exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}u(Q)}{2E} + Q\right)\right]\right\} + O(E^4),$$

其中

$$A = [1 + B(1 - A)]^{-1/2},\quad u(Q) = \int_{Q}^{1}{}_{Q}\left\{t[1 + B(t - A)]^2\right\}^{-1/4}\mathrm{d}t,$$

$$u(Q) = \int_{QA}^{Q}\left\{t[1 + B(t - A)]^2\right\}^{-1/4}\mathrm{d}t,$$

$$B^* = Q[A - 2BA^2 - (1 - K)AA]A^{-11/4},$$

$$C^* = B(K - 3) + (1 + K)(A - BA^2)\#$$

[参 考 文 献]

[1] 叶志明. 变厚度圆底扁薄球壳的非线性稳定问题[J]. 力学学报, 1984, 16(6): 634) 638.

[2] 康盛亮. 大几何参数的变厚度开顶扁薄壳的非线性屈曲问题的奇摄动解[J]. 数学物理学报, 1998, 18(2): 206) 216.

[3] Banerjee B. Large deflections of circular plates of variable thickness[J]. J Appl Mech, 1982, 49(1): 243) 245.

[4] 柯朗 R, 希尔伯特 D. 数学物理方法(Ñ)[M]. 钱敏等 译. 北京: 科学出版社, 1958, 96) 118.

The Method of Multiple Scales Applied to the Nonlinear Stability Problem of a Truncated Shallow Spherical Shell of Variable Thickness With the Large Geometrical Parameter

KANG Sheng_liang
(Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, P R China)

Abstract: Using the modified method of multiple scales, the nonlinear stability of a truncated shallow spherical shell of variable thickness with a nondeformable rigid body at the center under compound loads is investigated. When the geometrical parameter k *is larger, the uniformly valid asymptotic solutions of this problem are obtained and the remainder terms are estimated.*

Key words: *shallow shell of variable thickness; nonlinear stability; modified method of multiple scales*