应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 09_0891_07

二维流体力学变分通用公式*

何吉欢

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委何吉欢来稿)

摘要: 推导得到了二维流体力学变分通用公式, 该公式适用于任何二维守恒型流体力学方程, 得到的泛函受约于所谓的参数约束方程(控制方程中各参数间的相互关系式)• 消除参数约束, 我们可以十分方便地从通用公式导得广义变分原理• 几个实例证明这种方法是有效的、简单的, 并具有普遍的意义•

关 键 词: 流体力学; 变分原理

中图分类号: O351 文献标识码: A

引 言

在 50 年代, 固体力学变分原理的发展非常神速, 并出现了 Hu_Washizu 广义变分原理[1], 这是固体力学变分原理的里程碑; 于此同时, 流体力学变分原理中也出现了林家翘约束理论[2], 这是流体力学变分原理的里程碑• 80 年代初钱伟长应用高阶拉氏乘子法导出了弹性力学中最一般的广义变分原理[1,3], 这又是一次质的飞跃• 在流体力学方面, 钱伟长应用权余法和拉氏乘子法, 推导得到了粘性流体力学的广义变分原理[4], 而刘高联提出了建立流体变分原理的系统性方法[5], 这都是很大的成就•

诚然, 流体力学变分原理的研究工作目前还远远落后于固体力学变分原理的研究工作[6], 这表现在下二方面: 1) 没有统一的广义变分原理; 2) 目前流体力学有限元计算基本上以 Galerkin 加权余数法为基础, 这一现象正体现了建立流体力学变分原理的难度之大, 因而发展落后于固体力学• 在 50—60 年代, 许多学者曾企图借助固体力学中的 Hamilton 原理, 来建立流体力学的变分原理, 其中 Herivel 的工作引起广泛的关注[7], 但是 Herivel 的变分原理只适合一类特殊的流体[8~10], 并不适合所有的理想流体• 为了使 Herivel 变分原理适合于所有的理想流体, 必须加三个林家翘约束[2], 相应地需要引入三个拉氏乘子, 这样就额外引入 6 个人工变量, 从而使问题变得复杂• 关于流体力学中的 Hamilton 原理的详细阐述, 可参考文献[10~12]•

由于 Hamilton 原理不能直接应用于流体力学, 所以如何寻求流体力学的变分原理得到广

* 收稿日期: 2000_06_22; 修订日期: 2001_04_08
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(973 项目) 资助项目(1998020318)
作者简介: 何吉欢(1965—) , 男, 浙江诸暨人, 上海大学博士, 乌克兰科学院名誉教授, 已发表论文 100 多篇, 1998 年获得英国 Literati 奖, 现在担任 International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation 杂志主编, 同时担任 International Journal of Turbo & Jet_Engines 等 5 种国际杂志的编委.

大学者的普遍关注. 1990 年刘高联详细论述了流体力学变分原理的建立与变换的系统途径. 刘的系统途径可分为三大部分[5]: 1) 反推法, 2) 拉氏乘子法. 这二条路线基本上同钱伟长教授的权余法和拉氏乘子法, 并都可以建立相应的变分原理(VP), 亚广义变分原理(SGVP)及广义变分原理(GVP), 再通过 3) 线性组合的方法可以十分简捷地构造广义变分原理的普遍形式(GGVP). 刘的第一条路线和钱伟长的反推法没有本质的区别.

然而对于具体的流体力学问题, 反推法一般需要特殊的技巧, 有时甚至不大可能. 在这种情况下宜采用刘的第二条路线, 但识别拉氏乘子也并非易事. 在钱伟长和刘高联方法的基础上, 何吉欢提出了一种建立广义变分原理的半反推方法[13], 这种方法不仅可以应用于流体力学[14~16], 也可以应用于弹性力学[17], 应用该方法, 我们还得到了压电力学的耦合变分原理[18,19]及一些微极流体[20]和微极弹性力学的广义变分原理[21].

本文结合钱伟长的权余法和刘高联的线性组合法, 成功推导得到了一个建立广义变分原理的通用公式.

1 理论基础

为了能清晰地阐明本文的思想和实质, 并说明其普遍适用性, 设流体力学的控制方程具有下面守恒形式:

$$\partial A/\partial x + \partial B/\partial y = 0, \tag{1}$$

$$\partial C/\partial x - \partial D/\partial y = 0. \tag{2}$$

由方程(1)和(2)定义二通用函数 Ψ 和 Φ:

$$\partial \Psi/\partial x = B, \partial \Psi/\partial y = -A, \tag{3}$$

$$\partial \Phi/\partial x = D, \partial \Phi/\partial y = C, \tag{4}$$

于是方程(1)和(2)自动满足.

以(1)式作为 Euler 方程, (4)式作为约束, 应用反推法, 设存在一泛函 $I'_1(\Phi)$, 使下式成立:

$$\delta I'_1(\Phi) = -\iint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\delta\Phi \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5}$$

应用分部积分及(4)式得,

$$\delta I'_1(\Phi) = \iint(A\delta D + B\delta C)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \delta I_{b1}, \tag{6}$$

式中 δI_{b1} 为积分边界项.

同理以(2)式作为 Euler 方程, (3)式作为约束, 应用反推法, 设存在一泛函 $I'_2(\Psi)$, 使下式成立:

$$\delta I'_2(\Psi) = -\iint\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y}\right)\delta\Psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint(C\delta B + D\delta A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \delta I_{b2}, \tag{7}$$

式中 δI_{b2} 为积分边界项.

一般来讲反推法求泛函 $I'_1(\Phi)$ 和 $I'_2(\Psi)$ 是比较困难的, 具体可参考本文例 3. 为了寻求建立流体力学变分原理的新途径, 作者深受文献[5] 线性组合的基本思想的影响, 其方法简捷明了. 本文企图在未建立独立的泛函 $I'_1(\Phi)$ 和 $I'_2(\Psi)$ 之前, 应用线性组合方法来建立变分原理.

设存在一泛函 $I'(\Phi, \Psi)$, 是 $I'_1(\Phi)$ 和 $I'_2(\Psi)$ 的线性组合:

$$I'(\Phi, \Psi) = I'_1(\Omega) + I'_2(\Psi). \tag{8}$$

对上式取变分得:

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = \iint (A\delta D + B\delta C)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint (C\delta B + D\delta A)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \delta I_n =$$

$$\delta\iint (AD + BC)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \delta I_b, \tag{9}$$

式中 $\delta I_b = \delta I_{b1} + \delta I_{b2}$• 于是我们得

$$I = \iint (AD + BC)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{10}$$

或

$$I = \iint \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{11}$$

或

$$I = \iint \left(A\frac{\partial \Phi}{\partial x} + B\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12}$$

或

$$I = \iint \left(-D\frac{\partial \Psi}{\partial y} + C\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y• \tag{13}$$

经验算, 泛函(10) ~ (13) 都为临界变分[1,22~24] 因此我们必须对上述方程进行适当改造, 以消除临界变分•

对(12) 和(13) 进行线性组合得限制变分原理:

$$J_3(\Phi, \Psi) = \iint \left(C\frac{\partial \Psi}{\partial x} - D\frac{\partial \Psi}{\partial y} + A\frac{\partial \Phi}{\partial x} + B\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{14}$$

式中 A, B, C, D 为限制变量, $\delta A = \delta B = \delta C = \delta D = 0$• 其欧拉方程为(1) 和(2) 式•

对上式进行适当改造可得到以下泛函:

$$J_4(\Phi, \Psi, A, B, C, D) = \iint \left\{ -(AD + BC) - D\frac{\partial \Psi}{\partial y} + C\frac{\partial \Psi}{\partial x} + A\frac{\partial \Phi}{\partial x} + B\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y• \tag{15}$$

对上式取变分得:

$$\delta J_4(\Phi, \Psi, A, B, C, D) = \iint \left\{ -\delta(AD + BC) - \delta D\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial y}\delta\Psi + \delta C\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial x}\delta\Psi + \right.$$

$$\left. \delta A\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\delta\Phi + \delta B\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial y}\delta\Phi \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \delta J_b =$$

$$\iint \left\{ \left(-D + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)\delta A + \left(-C + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)\delta B + \left(-B + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)\delta C + \left(-A - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)\delta D + \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x} \right)\delta\Psi - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right)\delta\Phi \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \delta I_b•$$

于是可得欧拉方程为(1)、(2)、(3) 及(4) 式• 因此我们可以直接从方程(1) 和(2) 得到一变分原理(15), 结果是令人鼓舞的•

对于通常情况, 参数 A, B 和 C, D 或 Ψ 和 Φ 是相互关联的, 即有下面所谓的参数约束方程•

$$\Phi_x = \Phi_x(\Psi_x, \Psi_y), \quad \Phi_y = \Phi_y(\Psi_x, \Psi_y), \tag{16}$$

或

$$\Psi_x = \Psi_x(\Phi_x, \Phi_y), \quad \Psi_y = \Psi_y(\Phi_x, \Phi_y)• \tag{17}$$

消除参数约束(16) 或(17), 泛函(15) 就变成广义变分原理(GVP), 从广变分原理我们可以方便地导得变分原理(VPs) 及亚广义变分原理(SGVP)• 详细请参阅文献[5]•

2 应　　用

例 1　二维不可压理想流动问题

控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\cdot \tag{19}$$

则所定义的二特殊函数 Φ 和 Ψ 分别表示势函数和流函数• 根据(15) 式, 我们得到以下泛函

$$J_1(\Phi,\Psi,u,v)=\iint\left\{-u^2-v^2-u\frac{\partial\Psi}{\partial y}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot \tag{20}$$

参数约束方程为:

$$f_1=\Psi_x-\Phi_y=0,\quad f_2=\Psi_y+\Phi_x=0\cdot \tag{21}$$

把参数约束方程(4) 代入泛函(3) 消除 Ψ 或 Φ, 则可得到下面两个广义变分原理:

广义变分原理Ⅰ 上述的流体力学问题的解相当于下面的泛函取驻值

$$J_2(\Phi,u,v)=\iint\left\{-u^2-v^2+2u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+2v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot \tag{22}$$

广义变分原理Ⅱ 上述的流体力学问题的解相当于下面的泛函取驻值

$$J_3(\Psi,u,v)=\iint\left\{-u^2-v^2-2u\frac{\partial\Psi}{\partial y}+2v\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot \tag{23}$$

从广义变分原理(22) 或(23) 很容易推导得到亚广义变分原理, 如把方程 $\partial\Psi/\partial x=v$ 代入方程(23), 得下面的亚广义变分原理:

$$J_4(\Psi,u)=\iint\left\{-u^2-2u\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{24}$$

它以 $\partial\Psi/\partial x=v$ 为约束•

例 2 二维有旋流动问题

控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+f=0\cdot \tag{26}$$

用缩项法[25], 设 $f=\partial\xi/\partial y$, 式中 ξ 只是 y 的函数• 于是方程(26) 可改写成下面的形式

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial(u-\xi)}{\partial y}=0, \tag{27}$$

为此我们定义二特殊函数 Φ 和 Ψ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=u-\xi,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=v, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=v,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial y}=-u\cdot \tag{29}$$

特殊函数 Φ 和 Ψ 分别表示赝势函数和流函数•

由(15) 式我们可得下面的一个泛函:

$$\begin{aligned}\tilde{J}_1(\Phi,\Psi,u,v)&=\iint\left\{-u^2-v^2+u\xi-(u-\xi)\frac{\partial\Psi}{\partial y}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\\&\iint\left\{-u^2-v^2+u\xi-u\frac{\partial\Psi}{\partial y}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}-f\Psi+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+J_b\cdot\end{aligned} \tag{30}$$

它受约于参数约束方程:

$$\Psi_x=\Phi_y,\quad \Psi_y+\Phi_x=-\xi\cdot \tag{31}$$

把参数约束方程(31) 代入泛函(30) 式消除 Ψ 或 Φ, 则可得以下两个广义变分原理:

广义变分原理Ⅰ：上述的流体力学问题的解相当于下面的泛函取驻值:

$$\mathcal{J}_2(\Phi, u, v) = \iint\left\{-(u-\xi)^2 - v^2 + (2u-\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + 2v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{32}$$

广义变分原理Ⅱ: 上述的流体力学问题的解相当于下面的泛函取驻值:

$$\mathcal{J}_3(\Psi, u, v) = \iint\left\{-u^2 - v^2 + 2u\frac{\partial\Psi}{\partial y} + 2v\frac{\partial\Psi}{\partial x} - f\Psi\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{33}$$

亚广义变分原理的推导同例 1.

上面得到的结果与文献[5] 的结果完全一致.

例 3 非等截面弹性管中一维非定常可压缩均熵流动.

控制方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho A v) = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial s}, \tag{35}$$

$$P = \rho^{\kappa}, \tag{36}$$

式中 A 是弹性截面的面积, 它是时间 t 和迹线坐标 s 的函数, 即 $A = A(t, s)$.

由(17) 式, 我们定义一迹函数:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} = \rho A, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\rho A v. \tag{37}$$

为了使方程具有守恒形式, 我们引进一映象平面 (τ, Ψ). 映象平面(τ, Ψ) 和物理面 (t, s) 的转换关系为:

$$\tau = t, \qquad \Psi = \Psi(s, t). \tag{38}$$

于是可得以下守恒形式的方程:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\rho A}\right) - \frac{\partial v}{\partial\Psi} = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{v}{\rho A}\right) + \frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0. \tag{40}$$

定义二新函数 Y 和 Ω:

$$\frac{\partial Y}{\partial\Psi} = \frac{1}{\rho A}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial\tau} = v, \tag{41}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi} = -\frac{v}{\rho A}, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2. \tag{42}$$

因此由(15) 式可得下面的泛函:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1\left(Y, \Omega, \frac{1}{\rho A}, v, \frac{v}{\rho A}, \frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2\right) = \iint\Bigg\{&-\frac{v^2}{\rho A} - \frac{1}{\rho A}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2\right) - \\ &v\frac{\partial\Omega}{\partial\Psi} + \frac{1}{\rho A}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{v}{\rho A}\frac{\partial Y}{\partial\tau} + \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2\right)\frac{\partial Y}{\partial\Psi}\Bigg\}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\Psi.\end{aligned} \tag{43}$$

其参数约束方程为:

$$\Omega_Y = -Y_\Psi Y_\tau, \qquad \Omega_\tau = \frac{\kappa}{\kappa-1}A^{1-\kappa}Y_\Psi^{1-\kappa} - \frac{1}{2}Y_\tau^2. \tag{44}$$

把参数约束方程(44) 代入(43) 消除 Ω, 可得下面的广义变分原理:

广义变分原理: 上述的流体力学问题的解相当于下面的泛函取驻值

$$\mathcal{J}_2(Y, v, \rho) = \iint\Bigg\{-\frac{v^2}{\rho A} - \frac{1}{\rho A}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^2\right) + v\frac{\partial Y}{\partial\Psi}\frac{\partial Y}{\partial\tau} + \frac{1}{\rho A}\Bigg[\frac{\kappa}{\kappa-1}A^{1-\kappa}\left(\frac{\partial Y}{\partial Y}\right)^{1-\kappa} -$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial \tau}\right)^{2}\Bigg] + \frac{v}{\rho A}\frac{\partial Y}{\partial \tau} + \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^{2}\right)\frac{\partial Y}{\partial \Psi}\Bigg\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\Psi \cdot \tag{45}$$

证明: 令 $\delta J_2 = 0$, 我们可得下面的 Euler 方程:

$$\delta v:\quad -\frac{v}{\rho A} + Y_{\Psi}Y_{\tau} + \frac{1}{\rho A}Y_{\tau} - vY_{\Psi} = 0, \tag{46}$$

$$\delta\rho:\quad \frac{1}{\rho^{2}A}\Bigg\{v^{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^{2} - \kappa\rho^{\kappa-1} - \left(\frac{\kappa}{\kappa-1}A^{1-\kappa}Y_{Y}^{1-\kappa} - \frac{1}{2}Y_{\tau}^{2}\right) - vY_{\tau} + \kappa\rho^{k}AY_{\Psi}\Bigg\} = 0, \tag{47}$$

$$\delta Y:\quad \left[\frac{\partial v}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{\rho A}\right)\right]\frac{d\Omega}{dY} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{v}{\rho A}\right) - \frac{\partial}{\partial \Psi}\left(\frac{\kappa}{\kappa-1}\rho^{\kappa-1} - \frac{1}{2}v^{2}\right) = 0 \cdot \tag{48}$$

由上述 Euler 方程, 我们可以推导得到方程(40)和(41)•

3 结　论

本文继承和发展了钱伟长教授的权余法和刘高联教授的线性组合法, 对于二维守恒型方程我们可以十分方便地得到变分原理(15)式• 这一方法对于研究各种流体力学的变分问题将起十分重要的作用• 并且可以方便地把此法推广到固体力学和三维流体力学问题, 具体将在以后的论文里论述•

[参 考 文 献]

[1] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 北京: 知识出版社, 1985.

[2] Lin C C. Hydrodynamics of liquid helium, Ⅱ: Liquid helium[A]. In: G Careri Ed. Proceedings of International School of Pysics[C]. course XXI, New York: Academic Press, 1963, 93—146.

[3] 钱伟长. 高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理[J]. 应用数学和力学, 1983, **4**(2): 137—150.

[4] 钱伟长. 粘性流体力学的变分原理和广义变原理[J]. 应用数学和力学, 1984, **5**(3): 305—323.

[5] 刘高联. 流体力学变分原理的建立与变换的系统途径[J]. 工程热物理学报, 1990, **11**(2): 136—142.

[6] 刘高联. 流体力学变分原理及有限元法研究的进展[J]. 上海力学, 1989, **10**(3): 73—80.

[7] Herivel J W. The derivation of the equations of motion of an ideal fluid by Hamilton's principle[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1955, **51**: 344—349.

[8] 何吉欢. 简论林家翘约束[A]. 见庄逢甘主编. 现代力学与科技进步[C]. 北京: 清华大学出版社, 1997, 603—604.

[9] 何吉欢. 流体力学变分原理建立的新途径及林家翘约束[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 1997.

[10] 何吉欢. 流体力学广义变分原理[M]. 上海: 上海大学出版社, 2000.

[11] Bretherton F P. A note on Hamilton's principle for perfect fluids[J]. J Fluid Mech, 1970, **44**(1): 19—31.

[12] Salmon R. Hamiltoinian fluid mechanics[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1988, **20**: 225—256.

[13] HE Ji_huan. Semi_inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbomachinery aerodynamics[J]. Int J Turbo &Jet_Engines, 1997, **14**(1): 23—28.

[14] HE Ji_huan. A family of variational principles for compressible rotational blade_to_blade flow using semi_inverse method[J]. Int J Turbo &Jet_Engines, 1998, **15**(2): 95—100.

[15] HE Ji_huan. Hybrid problems of determining unknown shape of bladings in compressible S2_flow in mixed_flow turbomachinery via variational technique[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 1999, **71**(2): 154—159.

[16] HE Ji_huan. Inverse problems of determining the unknown shape of oscillating airfoils in compressible 2D unsteady flow via variational technique[J]. Aircraft Engineering and Aerospce Technology, 2000, **72**(1): 18—24.

[17] HE Ji_huan. Generalized Hellinger_Reissner principle[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2000, **67**(2): 326—331.

[18] HE Ji_huan. A variational principle for thermopiezoelectricity based on Chandrasekha_raiah's generalized linear theory[J]. J University of Shanghai for Science and Technology, 1999, **21**(4): 356—365.

[19] HE Ji_huan. Coupled variational principles of piezoelectricity[J]. Int J Engineering Science, 2000, **39**(3): 323—341.

[20] HE Ji_huan. A variational model for micropolar fluids in lubrication journal bearing[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000, **1**(2): 139—141.

[21] HE Ji_huan. Classical variational model for the micropolar elastodynamics[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2000, **1**(2): 133—138.

[22] 何吉欢. 论弹性力学广义变分原理的临界变分现象[J]. 上海理工大学学报, 1999, **21**(2): 127—130.

[23] 何吉欢. 流体力学中的临界变分现象及其消除方法[J]. 上海理工大学学报, 1999, **21**(1): 29—35.

[24] 何吉欢. 弹性理论中的临界变分及消除方法[J]. 上海力学, 1997, **18**(4): 305—310.

[25] LIU Gao_lian. A term_condensing method and generalized potential, stream & path functions for 3_D compressible viscous flow[A]. In: Proceeding Second Asian Congress of Fluid Mechanics[C]. Beijing: Science Press, 1983, 698—704.

A Universal Variational Formulation for Two Dimensional Fluid Mechanics

HE Ji_huan

(Shanghai Insititute of Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: A universal variational formulation for two dimensional fluid mechanics is obtained, which is subject to the so_called parameter_constrained equations (the relationship between paramters in two governing equations). By eliminating the constraints, the generalied variational principle (GVPs) can be readily derived from the formulation. The formulation can be applied to any conditions in case the governing equations can be converted into conservative forms. Some illustrative examples are given to testify the effectiveness and simplicity of the method.

Key words: fluid mechanics; variational theory