应用数学和力学, 第 22 卷 第 9 期(2001 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 09_0898_07

Banach 空间中具增生映象的变分包含解的存在性和逼近问题*

张石生[1,2]

(1. 云南师范大学数学系, 昆明 650092; 2. 四川大学数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 研究了 Banach 空间中一类增生型变分包含解的存在性及其迭代逼近问题· 所得结果改进和推广了一些人的最新成果·

关 键 词: 变分包含; 增生映象; 具误差的 Mann(Ishikawa) 迭代序列
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

本文处处假定 X 是一实 Banach 空间, X^* 是 X 的对偶空间, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是 X 与 X^* 间的配对, $D(T)$ 和 $R(T)$ 分别表映象 T 的定义域和值域·

设 $T, A: X \to X$, $g: X \to X^*$ 是三个映象, $\varphi: X^* \to R \cup \{+\infty\}$ 是一真凸下半连续函数·

1999 年, 在文献[1] 中作者引入和研究了下面一类增生型变分包含解的存在性及其逼近问题:

对任给的 $f \in X$, 求 $u \in X$ 使得

$$\begin{cases} g(u) \in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu - Au - f, v - g(u)\rangle \geqslant \varphi(g(u)) - \varphi(v) \qquad (\forall v \in X^*), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\partial\varphi$ 表 φ 的次微分·

本文的目的是进一步研究微分包含(1) 解的存在性、唯一性及逼近问题· 本文结果不仅是文[1] 的改进和推广, 同时也是文[2~ 13] 中相应结果的改进和推广·

1 预 备 知 识

首先我们追述某些定义和结论·

由下式定义的是映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{f \in X^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|f\| = \|x\|\right\} \qquad (x \in X)·$$

定义 1.1 映象 $T: D(T) \subset X \to X$ 称为增生的, 如果对任意的 $x, y \in D(T)$, 存在 $j(x$

* 收稿日期: 2000_10_13; 修订日期: 2001_05_20
基金项目: 国家自然科学基金资助课题(19771058)
作者简介: 张石生(1934—) , 男, 教授, 已发表论文 300 余篇, 获省部级奖 6 项.

$-y)\in J(x-y)$ 使得:

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle \geqslant 0;$$

增生映象 $T: D(T)\subset X\to X$ 称为m_增生的, 如果对任一 $\lambda>0$(等价于对某一 $\lambda>0$) 使得 $R(T+\lambda I)=X$•

命题 1.1[14] 如果 T 是一连续的增生映象, 且 $D(T)=X$, 则 T 是m_增生的•

引理 1.1[7] 设 X 是一实 Banach 空间, 则对任意的 $x, y\in X$, 下面的不等式成立:

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y, j(x+y)\rangle \qquad (\forall j(x+y)\in J(x+y))\bullet$$

引理 1.2[15] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是三个非负数列且满足条件: 存在 n_0 使得

$$a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_n+c_n \qquad (\forall n\geqslant n_0),$$

其中

$$t_n\in[0,1],\ \sum_{n=0}^{\infty}t_n=+\infty,\ b_n=o(t_n),\ \sum_{n=0}^{\infty}c_n<+\infty\bullet$$

则 $a_n\to 0\quad(n\to+\infty)$•

关于变分包含(1) 解的性质, 有下面的结果•

引理 1.3 设 X 是一实 Banach 空间, $\partial\varphi\circ g$ 是 $X\to 2^X$ 的映象, 则下面的结论等价:

i) $x^*\in X$ 是变分包含(1) 的解;

ii) $x^*\in X$ 是映象 $S: X\to 2^X$ 的不动点, 其中

$$S(x)=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x;$$

iii) x^* 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解•

证 i) ⇒ iii)• 设 $x^*\in X$ 是变分包含(1) 的解, 故 $g(x^*)\in D(\partial\varphi)$, 而且

$$\langle Tx^*-Ax^*-f, v-g(x^*)\rangle\geqslant\varphi(g(x^*))-\varphi(v)\qquad(\forall v\in X^*)\bullet$$

由 φ 的次微分的定义, 由上式即得

$$f+Ax^*-Tx^*\in\partial\varphi(g(x^*))\bullet\tag{2}$$

上式表明 x^* 是方程 $f\in Tx-Ax+\partial\varphi(g(x))$ 的解•

iii) ⇒ ii)• 在(2) 式两端加 x^*, 即得

$$x^*\in f-(Tx^*-Ax^*+\partial\varphi(g(x^*)))+x^*=Sx^*,\tag{3}$$

即 x^* 是 S 在 X 中的不动点•

ii) ⇒ i)• 由(3) 有 $f-(Tx^*-Ax^*)\in\partial\varphi(g(x^*))$ 再由 $\partial\varphi$ 的定义, 即得

$$\varphi(v)-\varphi(g(x^*))\geqslant\langle f-(Tx^*-Ax^*), v-g(x^*)\rangle\qquad(\forall v\in X^*),$$

即

$$\langle Tx^*-Ax^*-f, v-g(x^*)\rangle\geqslant\varphi(g(x^*))-\varphi(v)\qquad(\forall v\in X^*)\bullet$$

故 x^* 是变分包含(1) 的解• 定理证毕•

引理 1.4[16] 设 X 是一实 Banach 空间, $T: D(T)\subset X\to X$ 是一m_增生映象, 则对任给的 $f\in X$, 方程 $x+Tx=f$ 在 $D(T)$ 中有唯一解•

2 主要结果

定理 2.1 设 X 是一实 Banach 空间, $T, A: X\to X$ 是两个一致连续的映象, $g: X\to X^*$ 是一连续映象, $\varphi: X^*\to R\cup\{+\infty\}$ 是一具有连续的 Gâteaux 微分 $\partial\varphi$ 的函数, 再设下列条件满足:

i) $T-A+\partial\varphi\circ g-I:X\to X$ 是增生的;

ii) $\partial\varphi\circ g:X\to X$ 是一致连续的;

设$\{u_n\}$,$\{v_n\}$是X中的两个序列,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的两个数列,满足条件:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;

2) $\beta_n\to 0$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$.

对任给的$f\in X$,定义映象$S:X\to X$如下:

$$Sx=f-(Tx-Ax+\partial\varphi(g(x)))+x.$$

对任给的$x_0\in X$,定义具误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$如下:

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n+u_n,\\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n+v_n.\end{aligned}\right\}(n=0,1,2,\cdots). \tag{4}$$

则I) 变分包含(1)有唯一解$x^*\in X$;

II) 具误差的 Ishikwaw 迭代序列$\{x_n\}$,强收敛于变分包括(1)的唯一解$x^*\in X$,当而且仅当$\{Sx_n\}$和$\{Sy_n\}$均是有界的.

证

I) 首先证明变分包含(1)存在唯一解.

由条件i), ii)知映象$T-A+\partial\varphi\circ g-I:X\to X$是连续和增生的. 由命题1.1知其为$m$_增生的. 于是由引理1.4,对任给的$f\in X$,方程

$$f=x+(T-A+\partial\varphi\circ g-I)(x) \tag{5}$$

在X中有唯一解x^*,故由引理1.3,x^*是变分包含(1)的唯一解,从而x^*也是S的唯一的不动点,即

$$x^*=Sx^*.$$

II) 现证具误差的Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$强收敛于变分包含(1)的唯一解x^*的充分必要条件是$\{Sx_n\}$和$\{Sy_n\}$为有界列.

设$\{x_n\}$强收敛于x^*,因S连续,故$Sx_n\to Sx^*$. 另由(4)有

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\{(1-\beta_n)x_n+\beta_nSx_n+v_n\}=x^*,$$

故$Sy_n\to Sx^*$. 因而$\{Sx_n\}$和$\{Sy_n\}$都具有界的.

反之,如果$\{Sx_n\}$和$\{Sy_n\}$都是有界的.

$$d=\sup_{n\geqslant 0}\{\|Sx_n-x^*\|,\|Sy_n-x^*\|\}+\|x_0-x^*\|, \tag{6}$$

$$M=d+\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|.$$

现用归纳法证明,对一切$n\geqslant 0$有

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant d+\sum_{j=0}^{n}\|u_j\|\leqslant M. \tag{7}$$

事实上,当$n=0$时,由(6)知$\|x_0-x^*\|\leqslant d\leqslant M$. 现设(7)对$n=k-1$成立,其中$k\geqslant 1$,于是当$n=k$时,有

$$\|x_{k+1}-x^*\|=\|(1-\alpha_k)(x_k-x^*)+\alpha_k(Sy_k-x^*)+u_k\|\leqslant$$

$$(1-\alpha_k)\|x_k-x^*\|+\alpha_k\|Sy_k-x^*\|+\|u_k\|\leqslant$$
$$(1-\alpha_k)\left\{d+\sum_{j=0}^{k-1}\|u_j\|\right\}+\alpha_k d+\|u_k\|=$$
$$d+\sum_{j=0}^{k}\|u_j\|\leqslant M.$$

这就证明(7)成立，从而得知$\{x_n\}$是有界的.

又因

$$\|y_n\|\leqslant\|y_n-x_n\|+\|x_n\|\leqslant\|\beta_n(Sx_n-x_n)\|+\|v_n\|+\|x_n\|\leqslant$$
$$\|Sx_n\|+\|v_n\|+2\|x_n\|,$$

故$\{y_n\}$也是有界的.

另由(4)及引理1.1得知

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-x^*)+u_n\|^2\leqslant$$
$$\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sy_n-x^*)\|^2+2\langle u_n,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle+$$
$$2\langle u_n,j(x_{n+1}-x^*)\rangle,\tag{8}$$

对一切$j(x_{n+1}-x^*)\in J(x_{n+1}-x^*),j(x_{n+1}-x^*-u_n)\in J(x_{n+1}-x^*-u_n)$.

先考察(8)式右端第三项.　我们有

$$2<u_n,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant2\|u_n\|\cdot\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant2\|u_n\|\cdot M.\tag{9}$$

下面我们考察(8)式右端第二项.

由假设条件，映象$T-A+\partial\varphi\circ g-I$是增生，故对任给的$x_{n+1}-u_n$及$x^*$，存在$j(x_{n+1}-u_n-x^*)\in J(x_{n+1}-u_n-x^*)$使得

$$\langle S(x_{n+1}-u_n)-Sx^*,j(x_{n+1}-u_n-x^*)\rangle=$$
$$-\langle(T-A+\partial\varphi\circ g-I)(x_{n+1}-u_n)-$$
$$(T-A+\partial\varphi\circ g-I)(x^*),j(x_{n+1}-u_n-x^*)\rangle\leqslant0.$$

于是有

$$\langle Sy_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle=$$
$$\langle Sy_n-S(x_{n+1}-u_n),j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle+$$
$$\langle S(x_{n+1}-u_n)-Sx^*,j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle\leqslant$$
$$\langle Sy_n-S(x_{n+1}-u_n),j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle.\tag{10}$$

令

$$h_n=|\langle Sy_n-S(x_{n+1}-u_n),j(x_{n+1}-x^*-u_n)\rangle|,$$

则有

$$h_n\leqslant2M\cdot\|Sy_n-S(x_{n+1}-u_n)\|,\tag{11}$$

又有

$$\|x_{n+1}-u_n-y_n\|=\|(1-\alpha_n)(x_n-y_n)+\alpha_n(Sy_n-y_n)\|\leqslant$$
$$\|x_n-y_n\|+\alpha_n\|Sy_n-y_n\|=$$
$$\|\beta_n(Sx_n-x_n)+v_n\|+\alpha_n\|Sy_n-y_n\|\leqslant$$
$$\|\beta_nSx_n\|+\beta_n\|x_n\|+\|v_n\|+\alpha_n(\|Sy_n\|+\|y_n\|)$$

$$\to 0(n \to \infty)\bullet$$

由 S 的一致连续性, 即得

$$h_n \to 0 \quad (n \to \infty)\bullet \tag{12}$$

把(9)~(12)代入(8), 即得

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n)^2 \|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n h_n + 2M\|u_n\| \leqslant$$
$$(1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n h_n + 2M\|u_n\|\bullet$$

令 $a_n = \|x_n - x^*\|^2$, $t_n = \alpha_n \in [0, 1]$, $b_n = 2\alpha_n h = o(\alpha_n)$, $c_n = 2M\|u_n\|\bullet$　由引理1.2得知

$\|x_n - x^*\|^2 \to 0(n \to \infty)$, 即, $x_n \to x^* (n \to \infty)\bullet$

定理2.1证毕•

注2.1　定理2.1改进和推广了[1—13]中的相庆的结果•

在定理2.1中, 如果 $\varphi = 0$, 则有下面的

定理2.2　设 X 是一实 Banach 空间, $g: X \to X^*$ 是一连续映象, $T, A: X \to X$ 是两个一致连续的映象, 使得 $T - A - I: X \to X$ 是增生的•　设 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 是 X 中的二序列, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的二数列, 设下列条件满足

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\|v_n\| \to 0(n \to \infty)$;

2) $\beta_n \to 0$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\alpha_n \to 0(n \to \infty)\bullet$

对任给的 $f \in X$, 定义映象 $S: X \to X$ 如下:

$$Sx = f - (Tx - Ax) + x\bullet$$

对任给的 $x_0 \in X$, 设 $\{x_n\}$ 是由(3.1)式定义的具误差的 Ishikawa 迭代序列•　则

Ⅰ) 下列的变分不等式在 X 中存在唯一解 x^*:

$$\langle Tx - Ax - f, v - g(x)\rangle \geqslant 0 \quad (\forall v \in X^*); \tag{13}$$

Ⅱ) 具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于(13)的唯一解 x^* 当而且仅当序列 $\{Sx_n\}$ 和 $\{Sy_n\}$ 都是有界的•

如果在定理2.1中, $\varphi = 0$, $\beta_n = 0$, $v_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$, 于是 $y_n = x_n$, $\forall n \geqslant 0$, 而且 $x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Sx_n + u_n$, $\forall n \geqslant 0\bullet$　于是有下面的结果•

定理2.3　设 X 是一实 Banach 空间, $T, A: X \to X$, $g: X \to X^*$ 是三个映象, 使得 g 是连续的, $T - A - I$ 是一致连续的增生映象•　设 $\{u_n\}$ 是 X 中的序列, $\{\alpha_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的数列, 满足条件:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\alpha_n \to 0(n \to \infty)\bullet$

对任给的 $f \in X$, 定义映象 $S: X \to X$ 如下:

$$Sx = f - (TX - Ax) + x\bullet$$

对任给的 $x_0 \in X$, 定义具误差的 Mann 迭代序列如下:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S x_n + u_n. \tag{14}$$

则Ⅰ) 变分不等式(13) 在 X 中存在唯一解 x^*;

Ⅱ) 由(14) 所定义的具误差的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于变分不等式(13) 的唯一解, 当而且仅当序列 $\{Sx_n\}$ 是有界的.

[参 考 文 献]

[1] Chang S S. The Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions to variational inclusions with accretive type mappings[J]. Comput Math Appl, 1999, **37**: 17—24.

[2] Hassouni A, Moudafi A. A perturbed algorithms for variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, **185**: 706—721.

[3] Ding X P. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasi_variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **210**: 88—101.

[4] Ding X P. Generalized strongly nonlinear quasi_variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1993, **173**: 577—587.

[5] Chang S S. Set_valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2000, **248**: 438—454.

[6] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et el. Generalized set_valued variational inclusions in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2000, **246**: 409—422.

[7] Chang S S. On Chidume's open questions and approximate solutions for multi_valued strongly accretive mapping equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**: 94—111.

[8] Kazmi K R. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithms for generalized quasivariational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**: 572—584.

[9] Zeng L C. Iterative algirithms for finding approximate solutions for general strongly non_linear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1994, **187**: 352—360.

[10] Noor M A. General variational inequalities[J]. Appl Math Lett, 1998, **1**: 119—122.

[11] Noor M A. An iterative algorithm for variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**: 446—455.

[12] Siddiqi A H, Ansari Q H. General strongly nonlinear variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1992, **166**: 386—392.

[13] Siddiqi A H, Ansari Q H, Kazmi K R. On nonlinear variational inequalities[J]. Indian J Pure Appl Math, 1994, **25**: 969—973.

[14] Martin R H. A global existence theorem for autonomous differential equations in Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1970, **26**: 307—314.

[15] LIU L S, Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Abak Appl, 1995, **194**: 114—125.

[16] Zhu L C. Iterative solution of nonlinear equations involving m_accretive operators in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1994, **188**: 410—415.

Existence and Approximation of Solutions to Variational Inclusions with Accretive Mappings in Banach Spaces

ZHANG Shi_sheng[1,2]

(1. Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, P R China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P R China)

Abstract: The purpose of this paper is to study the existence and approximation problem of solutions for a class of variational inclusions with accretive mappings in Banach spaces. The results extend and improve some recent results.

Key words: variational inclusion; accretive mapping; Mann(Ishikawa) iterative sequence with errors