文章编号: 1000_0887(2001) 09_0952_08

用于积分方程解的广义逆函数值 Padé 逼近的计算公式*

顾传青[1], 李春景[2]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200436; 2. 同济大学 数学系, 上海 200331)

(刘宇陆推荐)

摘要: 首次建立了广义逆函数值 Padé 逼近的完整的计算公式: 函数值分子多项式和数量分母多项式的行列式公式。一个有用的存在条件借助于行列式形式得以给出。

关 键 词: Padé 逼近; 行列式公式; 存在性; 积分方程
中图分类号: O241.83 文献标识码: A

引 言

文[1]引入了解积分方程的广义逆函数值 Padé 逼近方法。

设$f(x,\lambda)$ 是一个给定的具有函数值系数的幂级数

$$f(x,\lambda)=c_0(x)+c_1(x)\lambda+c_2(x)\lambda^2+\cdots+c_n(x)\lambda^n+\cdots,\tag{1}$$

其中 $c_j(x)$ 是一个定义在区间(a,b) 上关于 x 的实函数或复函数。假定$f(x,\lambda)$ 作为 λ 的函数在 $\lambda=0$ 是解析的。

长久以来, 为了获得难于处理的积分方程的解, 尤其当积分方程具有形如(1)的发生函数时, 人们对 Padé 逼近方法产生了兴趣。这是因为 Padé 逼近方法易于计算, 同时它对具有有限秩的积分方程的逼近最终是精确的。事实上, Chishiolm 在文[2]已经表明具有秩为 n 核为K 的积分方程的精确解可以用关于扰动级数的 Padé 逼近的前 $2n$ 项来表示。Graves_Morris 在文[1]利用广义逆函数值 Padé 逼近方法来加速幂级数(1)的收敛性和估计积分方程的特征值。本文在第 1 节建立广义逆函数值 Padé 逼近的计算公式: 函数值分子多项式和数量分母多项式的行列式公式。一个有用的存在条件借助于行列式形式在第 2 节给出。最后讨论广义函数值 Padé 逼近对积分方程的解的应用。

定义 1 关于给定幂级数(1), 型为$[n/2k]$ 的广义逆函数值 Padé 逼近(GIPA) 是如下的有理函数

$$R(x,\lambda)=P(x,\lambda)/Q(\lambda),\tag{2}$$

定义 $P(x,\lambda)$ 是函数值多项式, $Q(\lambda)$ 是关于 λ 的数量多项式, 满足下列条件:

i) $\deg\{P(x,\lambda)\}\leqslant n,\ \deg\{Q(\lambda)\}=2k,\tag{3}$

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2001_04_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871054)
作者简介: 顾传青(1955—), 男, 江苏江都人, 教授, 博士生导师.

ii) $Q(\lambda) | \|P(x,\lambda)\|^2$, (4)

iii) $Q(\lambda)f(x,\lambda) - P(x,\lambda) = O(\lambda^{n+1})$, (5)

其中 λ是实数,

$$\|P(x,\lambda)\|^2 = \int_a^b |P(x,\lambda)|^2 \mathrm{d}x. \tag{6}$$

下面用 $[n/2k]_f$ 表示关于给定幂级数(1),型为$[n/2k]$ 的广义逆函数值 Pad 逼近.

1 GIPA 的行列式公式

定理 1 设 $R(x,\lambda) = P(x,\lambda)/Q(\lambda)$ 是一个$[n/2k]_f$,则成立

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0,2k-1} & L_{0,2k} \\ L_{10} & 0 & L_{12} & \cdots & L_{1,2k-1} & L_{1,2k} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & \cdots & L_{2,2k-1} & L_{2,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{2k-1,0} & L_{2k-1,1} & L_{2k-1,2} & \cdots & 0 & L_{2k-1,2k} \\ \lambda^{2k} & \lambda^{2k-1} & \lambda^{2k-2} & \cdots & \lambda & 1 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

和

$$P(x,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0,n-1} & L_{0,n} \\ L_{10} & 0 & L_{12} & \cdots & L_{1,n-1} & L_{1,n} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & \cdots & L_{2,n-1} & L_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{n-1,0} & L_{n-1,1} & L_{n-1,2} & \cdots & 0 & L_{n-1,n} \\ c_0(x)\lambda^n & \sum_{i=0}^{1} c_i(x)\lambda^{i+n-1} & \sum_{i=0}^{2} c_i(x)\lambda^{i+n-2} & \cdots & \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x)\lambda^{i+1} & \sum_{i=0}^{n} c_i(x)\lambda^i \end{vmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$L_{ij} = \sum_{l=0}^{j-i-1}\int_a^b c_{l+i+n-2k+1}(x)\, c^*_{j-l+n-2k}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (L_{ij} = -L_{ji}, j < i), \tag{9}$$

这里 $c_l^*(x)$ 是关于 $c_l(x)$ 的共轭复函数.

证明 i) 设 $n = 2k$. 将$(P(x,\lambda), Q(\lambda))$ 分别表示为

$$Q(\lambda) = Q_0 + Q_1\lambda + \cdots + Q_{2k}\lambda^{2k}, \tag{10}$$

$$P(x,\lambda) = P_0(x) + P_1(x)\lambda + \cdots + P_n(x)\lambda^n. \tag{11}$$

定义$f(x,\lambda)$ 的 Maclaurin 截断部分为

$$G_n(x,\lambda) = [f(x,\lambda)]_0^n,$$

则定义 1 的条件(5) 意味着

$$P(x,\lambda) = [Q(\lambda)f(x,\lambda)]_0^n = [G_n(x,\lambda)Q(\lambda)]_0^n. \tag{12}$$

定义 1 的条件(3) 和(4) 意味着 $\|P(x,\lambda)\|^2/Q(\lambda)$ 是一个阶数至多为 $2n-2k$ 的多项式,那么,成立

$$[\|P(x,\lambda)\|^2/Q(\lambda)]_{2n-2k+1}^{2n+1} = 0. \tag{13}$$

根据范数公式(6),定义关于 λ的数量多项式 $F(\lambda)$ 如下

$$F(\lambda)=\int_a^b[(P^*(x,\lambda)-G_n^*(x,\lambda)Q(\lambda))(P(x,\lambda)-G_n(x,\lambda)Q(\lambda))]\mathrm{d}x=$$
$$\|P(x,\lambda)\|^2+Q^2(\lambda)\|G_n(x,\lambda)\|^2-$$
$$Q(\lambda)\int_a^b[P^*(x,\lambda)G_n(x,\lambda)+G_n^*(x,\lambda)P(x,\lambda)]\mathrm{d}x\cdot \tag{14}$$

由(4)和(5),可推出 $F(\lambda)/Q(\lambda)=O(\lambda^{2n+2})$,从而得出

$$[F(\lambda)/Q(\lambda)]_{2n-2k+1}^{2n+1}=0\cdot$$

由(14)和(13),得到

$$\Big[-\int_a^b[P^*(x,\lambda)G_n(x,\lambda)+G_n^*(x,\lambda)P(x,\lambda)]\mathrm{d}x+$$
$$Q(\lambda)\|G_n(x,\lambda)\|^2\Big]_{2n-2k+1}^{2n+1}=0\cdot \tag{15}$$

根据(12),经过推导可以发现公式(15)实际上代表关于(10)中的系数 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{2k}$ 的 $2k+1(n=2k)$ 个线性方程,它可以表示为

$$\sum_{j=0}^{2k}L_{ij}Q_{2k-j}=0\qquad(i=0,1,\cdots,2k-1), \tag{16}$$
$$\sum_{j=0}^{2k}L_{2k,j}Q_{2k-j}=0, \tag{17}$$

其中(16)中的系数 Q_{2k-j} 是L_{ij},由公式(9)给出•

方程(16)和(10)形成了关于 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{2k}$ 的$2k+1$个非齐次线性方程组,它可以表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0,2k-1} & L_{0,2k} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & \cdots & L_{1,2k-1} & L_{1,2k} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & \cdots & L_{2,2k-1} & L_{2,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{2k-1,0} & L_{2k-1,1} & L_{2k-1,2} & \cdots & 0 & L_{2k-1,2k} \\ z^{2k} & z^{2k-1} & z^{2k-2} & \cdots & z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{2k} \\ Q_{2k-1} \\ Q_{2k-2} \\ \vdots \\ Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(\lambda) \end{pmatrix}\cdot \tag{18}$$

求解线性方程组(18),从而获得公式(7)•

由(11),(12)并注意到 $n=2k$,可推出

$$P(x,\lambda)=c_0(x)Q_0+(c_1(x)Q_0+c_0(x)Q_1)\lambda+\cdots+\left(\sum_{j=0}^{n}c_{n-j}(x)Q_j\right)\lambda^n=$$
$$\left(\sum_{i=0}^{n}c_i(x)\lambda^i\right)Q_0+\left(\sum_{i=0}^{n}c_i(x)\lambda^{i+1}\right)Q_1+\cdots+$$
$$(c_0(x)\lambda^{n-1}+c_1(x)\lambda^n)Q_{n-1}+(C_0(x)\lambda^n)Q_n\cdot \tag{19}$$

在(19)中利用(18),从而在 $n=2k$ 情形下获得公式(8)•

ii) 设 $n\leqslant 2k$•

定义

$$D_i=0\qquad(i=0,1,\cdots,2k-n-1);$$
$$D_i=c_{i-2k+n}(x)\qquad(i=2k-n,2k-n+1,\cdots,2k)\cdot$$

借助于系数$\left\{D_i\mid i=0,1,\cdots,2k\right\}$,构造 $Q(\lambda)$ 由(7)表出和$[2k/2k]$型 $P^{[2k/2k]}(x,\lambda)$ 由

(8) 表出• 那么, 分子多项式由

$$P(x,\lambda)=\lambda^{n-2k}P^{[2k/2k]}(x,\lambda)$$

所定义, 则 $P(x,\lambda)/Q(\lambda)$ 就是所求的$[n/2k]_f$•

iii) 设 $n>2k$• 记

$$f(x,\lambda)=\sum_{i=n-2k}^{\infty}c_i(x)\lambda^{i+2k-n}$$

借助于系数$\left\{c_{n-2k+i}(x)\right\}$, $i=0,1,\cdots,2k$, 构造 $Q(\lambda)$ 由(7) 表出和$[2k/2k]$ 型 $P_{[2k/2k]}(x,\lambda)$ 由(8) 表出• 那么, 分子多项式由

$$P(x,\lambda)=\lambda^{n-2k}P_{[2k/2k]}(x,\lambda)+Q(\lambda)\sum_{i=0}^{n-2k-1}c_i(x)\lambda^i•$$

所定义, 则 $P(x,\lambda)/Q(\lambda)$ 就是所求的$[n/2k]_f$•

注意在向量和矩阵的情形, 分母多项式的行列式公式(7) 已分别被 Graves_Mooris 的[3]和顾传青的[4]所获得, 但是, 分子多项式的行列式公式(8) 由本文首次证明• 定理 1 的证明方法不同于[3]或[4], 它的结果可以推广到向量和矩阵的情形• 有理插值的行列式公式已由文[5]建立•

2 GIPA 的存在性

为了给出 GIPA 的存在性条件, 引入下列辅助矩阵:

$$\boldsymbol{H}(0,2k,2k-1)=\begin{bmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & \cdots & L_{0,2k-1} & L_{0,2k} \\ L_{10} & 0 & L_{11} & \cdots & L_{1,2k-1} & L_{1,2k} \\ L_{20} & L_{21} & 0 & \cdots & L_{2,2k-1} & L_{2,2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{2k-1,0} & L_{2k-1,1} & L_{2k-1,2} & \cdots & 0 & L_{2k-1,2k} \end{bmatrix}•$$

定理 2(存在性) 设$[n/2k]_f=P(z)/Q(z)$, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别由(8) 和(7) 给出, 并且 $n=2k$• 则$[n/2k]_f$ 存在当且仅当

$$Q(0)=\det\boldsymbol{H}(0,2k-1,2k-1)\neq 0•$$

证明 根据 $O(z)$ 的构造, 从(18) 推出

$$\boldsymbol{H}(0,2k,2k-1)\begin{pmatrix} Q_{2k} \\ Q_{2k-1} \\ \vdots \\ Q_1 \\ Q_0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

从而得出

$$\boldsymbol{H}(0,2k-1,2k-1)\begin{pmatrix} Q_{2k} \\ Q_{2k-1} \\ \vdots \end{pmatrix}=-Q_0\begin{pmatrix} L_{0,2k} \\ L_{1,2k} \\ \vdots \\ L_{2k-1,2k-1} \end{pmatrix}• \tag{20}$$

如果 $Q(0)=Q_0=\det\boldsymbol{H}(0,2k-1,2k-1)\neq 0$, 就意味着非齐次方程(20) 存在一个关于 $Q(z)$ 的唯一的解 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{2k}$• 按照(19), 它也意味着公式(20) 存在一个关于 $P(z)$ 的唯

一的解 $P_0, P_1, \cdots, P_n$, 其中 $n = 2k$. 因此, $[n/2k]_f = P(z)/Q(z)$ 存在.

假设 $[n/2k]_f = P(z)/Q(z)$ 存在, 那么, 从(20) 得出

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{H}(0, 2k-1, 2k-1) = \operatorname{rank}\boldsymbol{H}(0, 2k, 2k-1). \tag{21}$$

如果 $Q(0) = \det\boldsymbol{H}(0, 2k-1, 2k-1) = 0$, 从(21) 成立 $\operatorname{rank}\boldsymbol{H}(0, 2k, 2k-1) < 2k$, 由此, 从(7) 可推出 $Q(z) \equiv 0$, 它与 GIPA 的定义(2) 相矛盾.

3 对积分方程的应用

本节讨论 GIPA 对积分方程的 Neumann 级数的收敛性. 考虑下列具有已知解的积分方程

$$\phi(x) = 1 + \lambda\int_0^1 [\{1 + |x - y|\}\phi(y)]\mathrm{d}y, \tag{22}$$

它能够利用 Baker 的方法[6] 化为二阶常微分方程进行求解. 方程(22) 的解是

$$\phi(x) = \frac{2\cosh \nu(x - 1/2)}{2\cosh(1/2))\nu - 3\nu\sinh(1/2)\nu}, \tag{23}$$

其中除了奇异值此外 $\nu = (2\lambda)^{1/2}$. 可以发现(23) 在

$$\nu_c = 1.222\ 906\ 58\cdots,$$

有一个单个的零点, 它对应着单个的特征值

$$\lambda_c = 0.747\ 750\ 255\ 6\cdots.$$

熟知, (22) 的 Neumann 级数在 $|\lambda| < \lambda_c$ 收敛.

(22) 的 Neumann 级数的前几项是

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) = \phi(x) = 1 + \left[\frac{5}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]\lambda + \\ \left[\frac{161}{96} + \frac{5}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right]^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{24}$$

它可由公式(9) 的迭代或由解(23) 的展开而得到.

根据行列式公式(7) 和(8), [2/2] 型的 GIPA 是

$$\begin{aligned} r(x, \lambda) = \frac{P(x, \lambda)}{Q(\lambda)} = \{3.180\ 27 + [-4.530\ 86 + 3.180\ 27(x - 0.5)^2]\lambda + [0.388\ 68 - \\ 4.530\ 86(x - 0.5)^2 + 0.530\ 06(x - 0.5)^4]\lambda^2\}/\{3.180\ 27 - 8.506\ 20\lambda + \\ 5.687\ 86\lambda^2\} = \{1 + [-1.425 + (x - 0.5)^2]\lambda + [0.122 - 1.425(x - 0.5)^2 + \\ 0.167(x - 0.5)^4]\lambda^2\}/\{1 - 2.675\lambda + 1.788\lambda^2\}, \end{aligned} \tag{25}$$

其中分母和分子多项式分别为

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \int_0^1 [c_1(x)]^2\mathrm{d}x & 2\int_0^1 c_1(x)c_2(x)\mathrm{d}x \\ -\int_0^1 [c_1(x)]^2\mathrm{d}x & 0 & \int_0^1 [c_2(x)]^2\mathrm{d}x \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1.783\ 33 & 4.769\ 84 \\ -1.783\ 33 & 0 & 3.189\ 46 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3.180\ 27 - 8.506\ 20\lambda + 5.687\ 86\lambda^2,$$

和

$$P(x, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \int_0^1 [c_1(x)]^2 dx & 2\int_0^1 c_1(x) c_2(x) dx \\ -\int_0^1 [c_1(x)]^2 dx & 0 & \int_0^1 [c_2(x)]^2 dx \\ c_0(x)\lambda^2 & c_0(x)\lambda + c_1(x)\lambda^2 & c_0(x) + c_1(x)\lambda + c_2(x)\lambda^2 \end{vmatrix} =$$

$$3.180\,27 + [-4.530\,86 + 3.180\,27(x-0.5)^2]\lambda + [0.388\,68 - 4.530\,86(x-0.5)^2 + 0.530\,06(x-0.5)^4]^2 \cdot$$

如果取 $\lambda = 2/3$, Neumann 级数(24) 的前三项的和对积分方程(22) 的解(23) 的逼近具有大约是 70% 的误差, 故在表 1 中将其省略• 在表 1 中, 分别取 $\lambda = 2/3$ 和 $\lambda = 1$, 给出[2/2] 型 GIPA 在 $x = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 对解(23) 的逼近的误差•

表 1　[2/2] 型 GIPA 对解(23) 的逼近的误差

x_i	$e\left(x, \frac{2}{3}\right)$	$e(x, 1)$	x_i	$e\left(x, \frac{2}{3}\right)$	$e(x, 1)$
0.0	−0.21	−0.07	0.3	0.07	0.03
0.1	−0.15	−0.05	0.4	0.15	0.05
0.2	−0.04	−0.01	0.5	0.18	0.06

本文建立了用于积分方程解的广义逆函数值 Padé 逼近的完整的计算公式和存在条件• (25) 和表 1 表明它对积分方程解的逼近的有效性• 它也表明按照 Sloan[7] 的方法, GIPA 逼近可用于非齐次积分方程的近似解的加速收敛和误差估计的改进•

[参　考　文　献]

[1] Graves_Morris P R. Solution of integral equations using generalised inverse, function_valued Padé approximants[J]. J Comput Appl Math, 1990, **32**(1): 117—124.

[2] Chisholm J S R. Solution of integral equations using Padé approximants[J]. J Math Phys, 1963, **4**(12): 1506—1510.

[3] Graves_Morris P R, Jenkins C D. Vector valued rational interpolants III[J]. Constr Approx, 1986, **2**(2): 263—289.

[4] 顾传青. 基于广义逆的矩阵值 Padé 逼近[J]. 计算数学, 1997, **19**(1): 19—28.

[5] GU Chuan_qing. Thiele_type and Largrange_type generalized inverse rational interpolation for rectangular complex matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1999, **295**(1): 7—30.

[6] Baker G A. The Numerical Treatment of Integral Equations [M]. Oxford: Oxford Univ, Press, 1978.

[7] Sloan I H. Improvement by iteration for compact operator equations[J]. Math Comp, 1976, **30**(4): 758—764.

Computation Formulas of Generalised Inverse Pad Approximant Using for Solution of Integral Equations

GU Chuan_qing[1], LI Chun_jing[2]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P R China;

2. Department of Mathimatics, Tongji University, Schanghai 200331, P R China)

Abstract: For the generalized inverse function_valued Pad approximants, its intact computation formulas are given, The explicit determinantal formulas for the denominator scalar polynomials and the numrator function_valued polynomials are first established. A useful existence condition is given by means of determinant form.

Key words: Pad approximant; determinantal formula; existence; integral equation