应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 10_0959_10

磁流体力学方程组的激波生成*

董黎明[1], 史一蓬[2]

(1. 华东理工大学 应用数学系, 上海 200237; 2. 复旦大学 数学研究所, 上海 200433)

(戴世强推荐)

摘要: 研究磁流体横向流动的一维模型, 在解的强间断出现后流场的性质• 利用迭代法具体构造了该方程组的强间断—激波以及问题的熵解• 同时, 利用激波的性质, 给出了各物理参量在爆破点附近的奇性估计•

关 键 词: 磁流体横向流动; 激波生成; 熵解
中图分类号: O361.3 文献标识码: A

引 言

考虑在 Lagrange 坐标下的一维磁流体力学方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}(H_y^2 + H_z^2) = 0, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial t} + \dfrac{H_y}{\tau}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial t} + \dfrac{H_z}{\tau}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$, τ, H_y, H_z 与 S 为未知函数, 它们分别表示速度, 比容, 磁场在 y, z 方向上的分量与熵, 该方程组是描述磁流体横向流动的一维模型• 可用来解释地球和天体物理学中磁场湮灭以及磁场位移转换, 磁通量放大等过程• Sideris[1] 在一定的条件下, 证明了 Euler 方程组的经典解必在有限时刻产生爆破• Rammaha[2] 利用 Sideris 的方法对磁流体力学方程组作了讨论, 得到在初始条件紧支集时其经典解将产生爆破; 孔德兴[3] 证明了对一维磁流体力学方程组, 在初值为紧支的条件下, 经典在有限时刻产生爆破• 在实际问题中, 更困难同时也更为人关心的问题是经典解在爆破后, 流场在爆破点附近的奇性结构如何? 激波的性质入位置能否确定? 本文将主要解决这两个问题•

* 收稿日期: 2000_03_08; 修订日期: 2001_03_05
作者简介: 董黎明(1972—), 男, 山东蒙阴人, 博士;
史一蓬(1972—), 男, 江苏丹阳人, 博士.

1 主要结果

取 $H_2 = \tau H_y, H_3 = \tau H_z$, 则(1) 可写为:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \tau}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{H_2^2 + H_3^2}{\tau^2}\right) = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial H_2}{\partial t} = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0,
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中状态方程 $P = P(\tau, S)$ 满足 $P_\tau < 0$, $P_{\tau\tau} < 0$, 则(2) 是个非严格双曲型方程组, 它的特征根

$$
\lambda_1 = -\sqrt{-P_\tau + \frac{H_2^2 + H_3^2}{4\pi\tau^3}} < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5 = \sqrt{-P_\tau + \frac{H_2^2 + H_3^2}{4\pi\tau^3}}\cdot \tag{3}
$$

这里 λ_1, λ_5 是在 P. D. Lax 意义下真正非线性的, 而 λ_2, λ_3, λ_4 是线性退化的·

引入 Riemann 不变量,

$$
\begin{cases}
z = \dfrac{1}{2}\left(u + \displaystyle\int_1^\tau \sqrt{-P_v + \frac{H_2^2 + H_3^2}{4\pi v^3}}\,\mathrm{d}v\right), \\[2mm]
w = \dfrac{1}{2}\left(u - \displaystyle\int_1^\tau \sqrt{-P_v + \frac{H_2^2 + H_3^2}{4\pi v^3}}\,\mathrm{d}v\right)\cdot
\end{cases}
\tag{4}
$$

记 $f = f(\tau, S, H_2, H_3) = P + \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{H_2^2 + H_3^2}{\tau^2}$, 定义函数 $F(\boldsymbol{v}, S, H_2, H_3)$ 其满足 $F_\tau = \sqrt{-f_\tau}\cdot$ 由于 $F_\tau \geqslant 0$, 所以由隐函数定理可知, 存在函数 G 满足

$$
\tau = G(z - w, S, H_2, H_3)\cdot
$$

利用函数 $H(z - w, S, H_2, H_3) = -f(G, S, H_2, H_3)$ 及(4) 可将方程组(2) 化为

$$
\begin{cases}
\partial_t z - \partial_1 H\partial_x z + A(S_t - \partial_1 H\partial_x S) + C(\partial_t H_2 - \partial_1 H\partial_x H_2) + D(\partial_t H_3 - \partial_1 H\partial_x H_3) = 0, \\
\partial_t w + \partial_1 H\partial_x w + A(\partial_t S - \partial_1 H\partial_x S) + C(\partial_t H_2 + \partial_1 H\partial_x H_2) + D(\partial_t H_3 - \partial_1 H\partial_x H_3) = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial H_2}{\partial t} = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0,
\end{cases}
\tag{5}
$$

其中 $\partial_1 H$ 表示函数 H 关于第一个自变量 $z - w$ 求导, 不难计算

$$
\partial_1 H = \sqrt{-f_\tau} = \sqrt{-P_\tau + \frac{H_2^2 + H_3^2}{4\pi\tau^3}}, \tag{6}
$$

且

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{\sqrt{1-f_\tau}}\dfrac{\partial P}{\partial S} + \displaystyle\int_1^\tau \dfrac{\partial}{\partial S}(\partial_1 H)\,\mathrm{d}\theta, \\ C = \dfrac{H_2}{4\pi\tau^2\sqrt{-f_\tau}} + \displaystyle\int_1^\tau \dfrac{\partial}{\partial H_2}(\partial_1 H)\,\mathrm{d}\theta, \\ D = \dfrac{H_2}{4\pi\tau^2\sqrt{-f_v}} + \displaystyle\int_1^\tau \dfrac{\partial}{\partial H_3}(\partial_1 H)\,\mathrm{d}\theta\bullet \end{cases} \tag{7}$$

如果流体在连续区域内是压缩单波, 随着时间的推移, 最终出现了激波• 该问题可转化为求解(5)的 Cauchy 问题, 且初始条件为

$$z\mid_{t=0} = z_0(x),\ w\mid_{t=0} = S\mid_{t=0} = H_i\mid_{t=0} = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{8}$$

以及存在一点 $y_0 \in R$ 满足 $z_0'(y_0) = \min z_0'(y) < 0$•

实际上, 若压缩单波是由第一族特征形成的, 则在该区域中 w, S, H_2, H_3 皆为常数• 我们不妨将常数取为零• y_0 的存在是说明第一族特征线将形成以 (t_0, x_0) 为尖点的包络, 且从 (t_0, x_0) 处有激波出现, 其中 t_0 是问题的经典解产生爆破的时刻, 下面是本文的主要结果•

定理 1.1 若第一族特征形成以 (t_0, x_0) 为尖点的包络, 则(5), (8) 在 $t < t_0$ 的范围内存在经典解, 在 $t \geqslant t_0$ 内有激波 $\Gamma: x = \Phi(t)$, $(\Phi(t_0) = x_0)$, 在 (t_0, x_0) 的邻域 Ω 内, (5)、(8) 存在满足 Rankine_Hugoniot 条件及熵条件的弱解, 而且该弱解在 Ω 内满足如下的估计

$$\begin{cases} \Phi(t) = x_0 + \alpha(t - t_0) + O((t - t_0)^2), \\ z(t, x) = z(t_0, x_0) + O(((t - t_0)^3 + (x - x_0 - \alpha(t - t_0))^2)^{1/6}, \\ w(t, x) = O((t - t_0)^{3/2}), \\ S(t, x) = O((t - t_0)^{3/2}), \\ H_i(t, x) = O((t - t_0)^{3/2}), \end{cases} \tag{9}$$

其中 α 是第一族特征线在 (t_0, x_0) 处的斜率•

2 近似解序列

我们利用迭代法证明本文的主要结果• 在这一节, 首先给出迭代格式• 为了计算的方便, 可以做一坐标变换将 (t_0, x_0) 移到原点• 下面我们仍作 (t, x)• 在新的坐标系中, 当 $t < 0$ 时原问题的解是已知的, 不妨取 $t_0 = 1$, 因为在单波区域内 w, S, H_2, H_3 皆为零, 故我们取 $w^0(t, x) = S^0(t, x) = H_2^0(t, x) = H_3^0(t, x) = 0$ 且 $z^0(t, x)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t z^0 - \partial_1 H(z^0, 0, 0, 0)\partial_x z^0 = 0, \\ z^0\mid_{t=-1} = z_0(x), \end{cases} \tag{10}$$

而且在激波线上满足 Rankine_Hugoniot 条件及熵条件•

在[4], [5]中作者详细地讨论了单个守恒方程的激波生成, 下面的引理我们不再证明请参阅[4], [5]• 这一部分所采用的记号不同于其它部分•

考虑 Cauahy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \\ u\mid_{t=-1} = u_0(x), \end{cases} \tag{11}$$

其中 $f(u) \in C^\infty$, $u_0(x) \in C^P(P \geqslant 4)$• 记 $g(\beta) = -f'(u_0(\beta))$• 通过计算可知, (11) 的特征线是 $x = \beta + tg(\beta)$, 若 $g(\beta)$ 满足

$$g(0)=g''(0)=0,\quad g'(0)=-1,\quad g^{(3)}=6,\quad \beta g''(\beta)>0 \tag{12}$$

则(11)的特征线将形成以(0,0)为尖点的包络.

引理 2.1 (11)在 $t\geqslant 0$ 内有弱解 $u=u(t,x)$ 以及激波 $x=\Phi(x)\in C^{P/2}$. 若 $x\neq\Phi(t)$ 则解 $u(t,x)\in C^{P}$, 进一步, 该解及激波满足估计

$$\begin{cases}|u(t,x)-u(0,0)|\leqslant C(t^3+x^2)^{1/6},\\ |\partial_t u(t,x)|\leqslant C(t^2+x^2)^{-1/6},\\ |\partial_x u(t,x)|\leqslant C(t^3+x^2)^{-1/3},\\ |\partial_{xx}u(t,x)|\leqslant C(t^3+x^2)^{-5/6},\quad (t,x)\neq(0,0).\end{cases} \tag{13}$$

引理 2.2 对后向特征线 $x=\xi_{\pm}(t,s,y)$, 当 $(s,y)\in O(0,0)$ 且 $s>0$ 时, 它不会与激波 $x=\Phi(t)$ 相交, 且满足估计

$$\begin{cases}\pm\xi_{\pm}(0,s,y)=\sqrt{s}+O(s)+|O(y^{1/3})|,\\ \pm(\xi_{\pm}(t,s,y)-y)=\sqrt{s}(s-t)+O(s(s-t))+|y^{1/3}(s-t)|),\\ t^3+\xi_{\pm}^2(t,s,y)\geqslant\dfrac{5}{16}(s^3+y^2).\end{cases} \tag{14}$$

引理 2.3 若函数 $\zeta(t,s,y)$ 满足

$$|\zeta(t,s,y)-\xi(t,s,y)|\leqslant Cs(s-t),$$

则对充分小的 s, 成立

$$0<-\int_0^s\partial_x f'(u)(t,\zeta(t,s,y))\,\mathrm{d}t<\ln\frac{3}{2}+C\sqrt{s}, \tag{15}$$

其中 $\xi(t,s,y)$ 的意义与引理 2.2 中的相同.

若将引理 2.1~ 引理 2.3 应用于(10), 则我们可知(10)存在从原点出发的激波, 而且(10)的熵解 $z^0(t,x)$ 满足估计(13), (10)的特征线满足(14).

由第 0 步起, 我们可以得近似解序列 $\{z^v(t,x)\}$, $\{w^v(t,x)\}$, $\{S^v(t,x)\}$, $\{H_2^v(t,x)\}$, $\{H_3^v(t,x)\}$ 及 $\{\Phi^v(t,x)\}$. 但是每做一步, 激波的位置 $x=\Phi^v(t)$ 都将发生改变. 为了便于计算, 我们取坐标变换 Γ:

$$\Gamma:\ t_1=t,\quad x_1=\begin{cases}x-\Phi^v(t) & (t\geqslant 0),\\ \alpha t, & (-1\leqslant t<0),\end{cases} \tag{16}$$

则变换化 Γ 将激波的位置固定在 t 轴上, 为了方便, 下面仍将变换后的座标记作 (t,x). 取函数

$$\sigma^v(t)=\begin{cases}(\Phi^v)'(t)\,(t\geqslant 0),\\ \alpha(-1\leqslant t<0).\end{cases}$$

我们的主要目标是证明解在激波生成点(0,0)附近的存在性, 故在下面的讨论中, 将局限在区域 Ω 中, 其中 $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_+\cup\Omega_-$.

$$\begin{cases}\Omega_0=\{(t,x),-1\leqslant t<0,-\varepsilon<x<\varepsilon\},\\ \Omega_+=\{(t,x),0\leqslant t\leqslant\eta,0\leqslant x\leqslant\varepsilon-t\},\\ \Omega_-=\{(t,x),0\leqslant t<\eta,-\varepsilon+t\leqslant x\leqslant 0\},\end{cases}$$

其中 ε, η 为充分小的常数.

如果 z^v, w^v, S^v, $H_i^v(i=2,3)$ 已知, 则相应地函数 σ^v, u^v 亦可知. 且取

$$
\sigma^v = \begin{cases} \dfrac{-[H(z^v - w^v, S^v, H_2^v, H_3^v)]}{[z^v + w^v]} & (当\ t \geqslant 0), \\ \alpha \quad (当\ t < 0), & \end{cases} \tag{17}
$$

其中[•]表示•在激波两侧的跳跃度•

取 $z^{v+1}, w^{v+1}, S^{v+1}, H_2^{v+1}, H_3^{v+1}$ 为下面线性方程组的解,

$$
\begin{cases}
\partial_t z^{v+1} - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x z^{v+1} + A^v(\partial_t S^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x S^v) + \\
\qquad C^v(\partial_t H_2^v - (\partial_1(H^v + \sigma^v)\partial_x H_2^v) + \\
\qquad D^v(\partial_t H_3^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_3^v) = 0, \\
\partial_t{}^{v+1} + (\partial_1 H^v - \sigma^v)\partial_x w^{v+1} + A^v(\partial_t S^v + (\partial_1 H^v - \sigma^v)\partial_x S^v) + \\
\qquad C^v(\partial_t H_2^v + (\partial_1 H^v - \sigma^v)\partial_x H_2^v) + \\
\qquad D^v(\partial_t H_3^v + (\partial_1 H^v - \sigma^v)\partial_x H_3^v) = 0, \\
\dfrac{\partial H_2^{v+1}}{\partial t} - \sigma^v \dfrac{\partial H_2^{v+1}}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial H_3^{v+1}}{\partial t} - \sigma^v \dfrac{\partial H_3^{v+1}}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial S^{v+1}}{\partial t} - \sigma^v \dfrac{\partial S^{v+1}}{\partial x} = 0,
\end{cases} \tag{18}
$$

及初始条件

$$
\left.\begin{aligned}
& z^{v+1}(-1, x) = z_0(x), \\
& w^{v+1}(-1, x) = S^{v+1}(-1, x) = \\
& \qquad H_2^{v+1}(-1, x) = H_3^{v+1}(-1, x) = 0 \cdot
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

对上述线性的 Cauchy 问题(18) ~ (19) 可以由特征线法求解• 为了能够得到该近似解序列的收敛性, 必须要确定 $w^{v+1}, S^{v+1}, H_i^{v+1}$ 在 $t = 0$ 右侧的值•

引理 2.4 若 $S_- = H_{2-} = H_{3-} = w_- = 0$, 则存在光滑函数 $M(\cdot, \cdot), N_2(\cdot, \cdot), N_3(\cdot, \cdot)$ 及 $W(\cdot, \cdot)$ 使得

$$
\begin{cases}
S_+ = M(z_-, z_+)[z]^3, \\
H_{2+} = N_2(z_-, z_+)[z]^3, \\
H_{3+} = N_3(z_-, z_+)[z]^3, \\
w_+ = W(z_-, z_+)[z]^3 \cdot
\end{cases} \tag{20}
$$

证明 该引理中第四式可以由 P. D. Lax 的结果直接得到, 对于前三式可以将其表达式做 Taylor 展开后得以证明• 在此省略其证明•

在下一节我们首先证明命题 F^v, 然后说明我们所做的序列在 L^∞ 中的紧性•

$$
F^v: \begin{cases}
z^v(t, x), w^v(t, x), S^v(t, x), H_i^v(t, x) \in C^1(\Omega_+ / (0, 0)), \\
| z^v(t, x) - z^0(t, x) | \leqslant Ct, \\
| S^v(t, x), w^v(t, x), H_2^v(t, x), H_3^v(t, x) | \leqslant Ct^{3/2}, \\
| \nabla_{t,x}(z^v - z^0) | \leqslant C(t^3 + x^2)^{-1/6}, \\
| \nabla_{t,x} S^v, \nabla_{t,x} H_2^v, \nabla_{t,x} H_3^v, \nabla_{t,x} W^v | \leqslant Ct^{1/6} \cdot
\end{cases} \tag{21}
$$

3 近似解序列的有界性

我们利用归纳法证明命题 F^v, 其中的常数 C 在不同的式子可能取不同的值•

引理 3.1 若命题 F^v 成立, 则存在常数 P, 使得

$$|\sigma^v - \sigma^0| \leqslant Pt \tag{22}$$

由于函数 $z^v, w^v, H_2^v, H_3^v, S^v$ 在区域 Ω_- 中不依赖于 v, 故

$$|\sigma^v - \sigma^0| \leqslant C(|z^v - z^0| + |w^v| + |S^v| + |H_2^v| + |H_3^v|)$$

所以, 由命题 F^v 可知该结论成立•

反复利用归纳法可以证明第 v 步的特征线 $x = \xi^v(t, s, y)(\xi^v(s, s, y) = y)$ 满足估计:

$$|\xi^v(t, s, y) - \xi^0(t, s, y)| \leqslant C(s(s-t)) \tag{23}$$

其中 $\xi^0(t, s, y)$ 是过 (s, y), (10) 的特征线•

引理 3.2 若命题 F^v 成立, ε, η 充分小, 则

$$|(z^{v+1} - z^0)(t, x)| \leqslant Ct \tag{24}$$

证明 取 $V(t, x) = (z^{v+1} - z^0)(t, x)$, 则 $V(t, x)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t V - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x V = (\partial_1 H^v - \partial_1 H^0 + \sigma^v - \sigma^0)\partial_x z^0 - A^v(\partial_t S^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x S^v) - \\ \qquad C^v(\partial_t H_2^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_2^v) - D^v(\partial_t H_3^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_3^v), \\ V|_{t=-1} = 0 \end{cases}$$

沿特征线 $x = \xi^{v+1}(t, s, y)$ 积分得

$$\begin{aligned} V(s, y) = & \int_0^s (\partial_1 H^v - \partial_1 H^0 + \sigma^v - \sigma^0)\partial_x z^0(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\mathrm{d}\theta - \\ & \int_0^s A^v(\partial_t S^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x S^v) + C^v(\partial_t H_2^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_2^v) + \\ & D^v(\partial_t H_3^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_3^v)(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\mathrm{d}\theta = \\ & I_1(s) + I_2(s) \end{aligned}$$

借助于 F^v 可知

$$|I_2(s)| \leqslant C\int_0^s \sqrt{\theta}\,\mathrm{d}\theta = Cs^{3/2}$$

而由引理 2.1 知 $|\partial_x z^0| \leqslant Cs^{-1}$ 以及引理 3.1 $|\sigma^v - \sigma^0| \leqslant Ps$• 所以

$$|I_1(s)| \leqslant C\int_0^s \theta\theta^{-1}\mathrm{d}\theta \leqslant Cs$$

故

$$|z^{v+1}(t, x) - z^0(t, x)| \leqslant Ct$$

命题 3.3 若命题 F^v 成立, 则

$$|w^{v+1}(t, x), S^{v+1}(t, x), H_2^{v+1}(t, x), H_3^{v+1}(t, x)| \leqslant Ct^{3/2} \tag{25}$$

注意到事实, 这四个函数在 $\Omega_0 \cup \Omega_-$ 中恒为零, 利用引理 2.4 可知 $w^{v+1}(t, 0_+)$, $S^{v+1}(t, 0_+)$, $H_2^{v+1}(t, 0_+)$, $H_3^{v+1}(t, 0_+)$, 这样在 Ω_+ 中便要求解初边值问题• 证明方法类似于引理 3.2 的证明, 不同之处就是要注意边界条件•

引理 3.4 若命师 F^v 成立, 则

$$|\partial_{t,x}(z^{v+1} - z^0)| \leqslant C(t^3 + x^2)^{-1/6} \tag{26}$$

证明 取 $W(t,x)=\partial_x(z^{v+1}-z^0)$, 则 $W(t,x)$ 满足:

$$\begin{cases}\partial_t W-(\partial_1(H^v+\sigma^v)\partial_x W-\partial_t(A^v\partial_x S^v)+(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x(A^v\partial_x S^v)-\\ \quad\partial_t(C^v\partial_x H_2^v)+(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x(C^v\partial_x H_2^v)-\partial_t(D^v\partial_x H_3^v)+\\ \quad(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x(D^v\partial_x Hv_3)=\\ \quad(\partial_1 H^v-\partial_1 H^0+\sigma^v-\sigma^0)\partial_{xx}z^0-\partial_x(\partial_1 H^v)\partial_x W+\\ \quad(\partial_1 H^v-\partial_1 H^0)\partial_x z^0+A_x^v\partial_t S^v+A_t^v\partial_x S^v-\\ \quad 2(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x A^v+C_x^v\partial_t H_2^v+C_t^v\partial_x H_2^v-2(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x C^v+\\ \quad D_x^v\partial_t H_3^v+D_t^v\partial_x H_3^v-2(\partial_1 H^v+\sigma^v)\partial_x D^v,\\ W|_{t=-1}=0.\end{cases}$$

为了记号方便, 不妨取上式右边为 P_1, 沿特征线 $x=\xi^{v+1}(t,s,y)$ 可得

$$W(s,y)-A^v\partial_x S^v-C^v\partial_x H_2^v-D^v\partial_x H_3^v=\int_0^s P_1(\theta,\xi^{v+1}(\theta,s,y))\mathrm{d}\theta.$$

通过引理 2.1 可知及引理 2.2 可知

$$\int_0^s|(\partial_1 H^v-\partial_1 H^0+\sigma^v-\sigma^0)\partial_{xx}z^0|\,\mathrm{d}\theta\leqslant\int_0^s C\theta(\theta^3+(\xi^{v+1})^2)^{-5/6}\mathrm{d}\theta\leqslant$$
$$Cs^2(s^3+y^2)^{-5/6}\leqslant C(s^3+y^2)^{-1/6}.$$

利用命题 F^v 可知, 存在函数 $g(\cdot)$ 与 $h(\cdot,\cdot)$ 使得

$$|g(\theta)|\leqslant C\theta^{-1},\ |h(t,x)|\leqslant C(t^3+x^3)^{-1/6},$$
$$\left|\int_0^s g(\theta)\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\ln\frac{3}{2}+C\sqrt{s},$$

且未知函数 W 满足

$$|W(s,y)-A^v\partial_x S^v-C^v\partial_x H_1^v-D^v\partial_x H_2^v|\leqslant\int_0^s g(\theta)|W|\,\mathrm{d}\theta+h(s,y).\tag{27}$$

由(6)及命题 F^v 可知

$$|A^v\partial_x S^v+C^v\partial_x H_2^v+D^v\partial_x H_3^v|\leqslant C(s^3+y^2)^{1/6}.\tag{28}$$

将(28)代入(27)可得

$$|W(s,y)-A^v\partial_x S^v-C^v\partial_x H_2^v-D^v\partial_x Hv_3|\leqslant$$
$$\int_0^s g(\theta)|W-A^v\partial_x S^v-C^v\partial_x H_2^v-D^v\partial_x H_3^v|(\theta,\xi^{v+1}(\theta,s,y))\mathrm{d}\theta+h_1(s,y).$$

其中函数 $h_1(s,y)$ 满足 $|h_1(s,y)|\leqslant C(s^3+y^2)^{-1/6}$.

借助于 Gronwall 不等式, 可得估计

$$|W(s,y)-A^v\partial_x S^v-C^v\partial_x H_2^v-D^v\partial_x Hv_3|\leqslant C(s^3+y^2)^{-1/6}.\tag{29}$$

再次将(28)代入(29)得到

$$|W(s,y)|\leqslant C(s^2+y^2)^{-1/6},$$

即

$$|\partial_x(z^{v+1}-z^0)(s,y)|\leqslant C(s^3+y^3)^{-1/6}.$$

利用方程组本身及命题 F^v, 可知 $|\partial_t(z^{v+1}-z^0)(s,y)|\leqslant C(s^3+y^2)^{-1/6}$.

引理 3.5 若命题 F^v 成立, 则

$$|\therefore_{t,x}S^{v+1},\ \therefore_{t,x}H_2^{v+1},\ \therefore_{t,x}H_3^{v+1},\ \therefore_{t,x}w^{v+1}|\leqslant Ct^{1/2}.\tag{30}$$

类似于引理 3.4 可以证明 $\nabla_{t,x}w^{v+1}$ 的估计式。 对线性方程 $\partial_t S^{v+1} - \sigma^v(t)\partial_x S^{v+1} = 0$。 两边求关于 x 的导数。

$$\partial_t(\partial_x S^{v+1}) - \sigma^v(t)\partial_x(\partial_x S^{v+1}) = 0。$$

则 $\partial_x S^{v+1}$ 沿其特征为常数。 根据初始条件与引理 2.4, 对 $\nabla_{t,x}S^{v+1}$ 的估计相同的作法可知

$$|(\nabla_{t,x}H_2^{v+1}, \nabla_{t,x}H_3^{v+1})(t, x)| \leqslant C\sqrt{t}。$$

所以可知命题 F^v 对所有的 $v \in N$ 皆成立。

4 主要结果的证明

基于前面的推导, 在该节中, 我们要说明所做的近似解序在 L^∞ 中的收敛性。

定理 4.1 在命题 F^v 下, 有

$$\begin{aligned}
&|\sigma^v - \sigma^{v-1}| \leqslant C(\|w^v - w^{v-1}\|_{L^\infty} + \|S^v - S^{v-1}\|_{L^\infty} + \|H_2^v - H_2^{v-1}\|_{L^\infty} + \\
&\qquad \|H_3^v - H_3^{v-1}\|_{L^\infty}) + \frac{1}{2}(\partial_{z^0 z^0}H^0 + C\sqrt{t}\,\|z^v - z^{v-1}\|_{L^\infty}), \\
&\|z^{v+1} - z^v\|_{L^\infty} \leqslant C(\|w^v - w^{v-1}\|_{L^\infty} + \|S^v - S^{v-1}\|_{L^\infty} + \|H_2^v - H_2^{v-1}\|_{L^\infty} + \\
&\qquad \|H_3^v - H_3^{v-1}\|_{L^\infty}) + \frac{4}{5}\|z^v - z^{v-1}\|_{L^\infty}, \\
&\|w^{v+1} - w^v\|_{L^\infty} + \|S^{v+1} - S^v\|_{L^\infty} + \|H_2^{v+1} - H_2^v\|_{L^\infty} + \|H_3^{v+1} - H_3^v\|_{L_\infty}) \leqslant \\
&\qquad C\sqrt{t}(\|w^v - w^{v-1}\|_{L^\infty} + \|S^v - S^{v-1}\|_{L^\infty} + \\
&\qquad \|H_2^v - H_2^{v-1}\|_{L^\infty} + \|H^v 3 - H_3^{v-1}\|_{L^\infty}),
\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $H^0 = H(z^0, 0, 0, 0)$。

证明 因为

$$\sigma^v = -\frac{[H(z^v - w^v, S^v, H_2^v, H_3^v)]}{(zv + w^v)}。$$

所以(31) 的第一式可以由微分中值定理可知其成立。

接下来证明(31) 的第二式。 取 $Z(s, y) = (z^{v+1} - z^v)(s, y)$, 则 $Z(s, y)$ 满足

$$\begin{cases}
\partial_t Z - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x Z = (\partial_1 H^v + \sigma^v - \partial_1 H^{v-1} - \sigma^{v-1})\partial_x z^v - A^v(\partial_t S^v - (\partial_1 H^v + \\
\qquad \sigma^v)\partial_x S^v + A^{v-1}(\partial_t S^{v-1} - (\partial_1 H^v + \sigma^{v-1})\partial_x S^{v-1} - C^v(\partial_t H_2^v - \\
\qquad (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_2^v) + C^{v-1}(\partial_t H^{v-1}2 - (\partial_1 H^{v-1} + \sigma^{v-1})\partial_x H_2^{v-1}) - \\
\qquad D^v(\partial_t H_3^v - (\partial_1 H^v + \sigma^v)\partial_x H_3^v) + D^{v-1}(\partial_t H_3^{v-1} - (\partial_1 H^{v-1} + \sigma^{v-1})\partial_x H_3^{v-1}), \\
Z|_{t=-1} = 0。
\end{cases}$$

取上式右端为 P_3, 沿特征线 $x = \xi^{v+1}(t, s, y)$ 积分可得

$$(z^{v+1} - z^v)(s, y) = \int_0^s P_3(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\,d\theta。$$

通过引理 3.2、(15) 及该定理的第一式可知

$$\begin{aligned}
&\int_0^s(\partial_1 H^v + \sigma^v - \partial_1 H^{v-1} - \sigma^v)\partial_x z^v(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\,d\theta = \\
&\qquad \int_0^s(\partial_1 H^v - \partial_1 H^{v-1} + \sigma^v - \sigma^{v-1})\partial_x(z^v - z^0)(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\,d\theta + \\
&\qquad \int_0^s(\partial_1 H^v - \partial_1 H^{v-1} + \sigma^v - \sigma^{v-1})\partial_x z^0(\theta, \xi^{v+1}(\theta, s, y))\,d\theta =
\end{aligned}$$

$$I_1(s)+I_2(s),$$

及

$$I_2(s)\leqslant\left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+C\sqrt{s}\right)(\|z^v-z^{v-1}\|_{L^\infty}+(\|w^v-w^{v-1}\|_{L^\infty}+\|S^v-S^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_2^v-H_2^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_3^v-H_3^{v-1}\|_{L^\infty})\cdot$$

因为 $|\partial_x(z^v-z^0)(\theta,\xi^{v+1}(\theta,s,y))|\leqslant C\theta^{-1/2}$, 则

$$|I_1(s)|\leqslant C\sqrt{s}(\|z^v-z^{v-1}\|_{L^\infty}+(\|w^v-w^{v-1}\|_{L^\infty}+\|S^v-S^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_2^v-H_2^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_3^v-H_3^{v-1}\|_{L^\infty})\cdot$$

由命题 F^v 可知 P_3 的其余项不超过

$$C\sqrt{s}(\|z^v-z^{v+1}\|_{L^\infty}+\|w^v-w^{v-1}\|_{L^\infty}+\|S^v-S^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_2^v-H_2^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_3^v-H_3^{v-1}\|_{L^\infty})\cdot$$

所以, 在 ε, η 充分小的条件下, $C\sqrt{s}+\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}\leqslant\frac{4}{5}\cdot$ 将上述的不等式相加, 则可得(31) 的第二式• (31) 的第三式用类似的方法可知, 在此不作详细展开•

作 $C(31)_3+(31)_2$, 可得

$$\begin{aligned}&\|z^{v+1}-z^v\|_{L^\infty}+C(\|w^{v+1}-w^v\|_{L^\infty}+\|S^{v+1}-S^v\|_{L^\infty}+\\&\quad\|H_2^{v+1}-H_2^v\|_{L^\infty}+\|H_3^{v+1}-H_3^v\|_{L^\infty})\leqslant\\&\quad\left(\frac{4}{5}+2C\sqrt{t}\right)\|z^v-z^{v-1}\|_{L^\infty}+C(1+\sqrt{t})(\|w^v-w^{v-1}\|_{L^\infty}+\\&\quad\|S^v-S^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_2^v-H_2^{v-1}\|_{L^\infty}+\\&\quad\|H_3^v-H_3^{v-1}\|_{L^\infty})\cdot\end{aligned}\tag{32}$$

故, 若 ε, η 充分小使得 $2C\sqrt{t}+\frac{4}{5}\leqslant\frac{9}{10}$, 则

$$\begin{aligned}&\|z^{v+1}-z^v\|_{L^\infty}+C(\|w^{v+1}-w^v\|_{L^\infty}+\|S^{v+1}-S^v\|_{L^\infty}+\\&\quad\|H_2^{v+1}-H_2^v\|_{L^\infty}+\|H_3^{v+1}-H_3^v\|_{L^\infty})\leqslant\\&\quad\frac{9}{10}(\|z^v-z^{v-1}\|_{L^\infty}+C(\|w^v-w^{v-1}\|_{L^\infty}+\\&\quad\|S^v-S^{v-1}\|_{L^\infty}+\|H_2^v-H_2^{v-1}\|_{L^\infty}+\\&\quad\|H_3^v-H_3^{v-1}\|_{L^\infty}))\cdot\end{aligned}\tag{33}$$

通过不动点原理可知, 函数列 $\{z^v\}\{w^v\}\{S^v\}\{H_2^v\}$ 与 $\{H_3^v\}$ 是一致收敛的• 由(17) 可以得到 $\{\sigma^v\}$ 的一致收敛性• 而激波 $\{\phi^v\}$ 是 $\{\sigma^v\}$ 的积分, 故 $\{\phi^v(t)\}$ 亦一致收敛• 取 z, w, S, H_2, H_3, ϕ 分别为上述序列的极限函数, 则由命题 F^v 可知, 它们亦满足方程组

$$
\begin{cases}
\partial_t z - (\partial_1 H + \sigma)\partial_x z + A(\partial_t S - (\partial_1 H + \sigma)\partial_x S) + C(\partial_t H_2 - \\
\qquad (\partial_1 H + \sigma)\partial_x H_2) + D(\partial_t H_3 - (\partial_1 H + \sigma)\partial_x H_3) = 0, \\
\partial_t w + (\partial_1 H - \sigma)\partial_x w + A(\partial_t S + (\partial_1 H - \sigma)\partial_x S) + C(\partial H_2 + \\
\qquad (\partial_1 H - \sigma)\partial_x H_2) + D(\partial_t H_3 + (\partial_1 H - \sigma)\partial_x H_3) = 0, \\
\dfrac{\partial H_2}{\partial t} - \sigma \dfrac{\partial H_2}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial H_3}{\partial t} - \sigma \dfrac{\partial H_3}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial S}{\partial t} - \sigma \dfrac{\partial S}{\partial x} = 0 \cdot
\end{cases}
\tag{34}
$$

将(22)取 $v \to +\infty$ 得到

$$\sigma(t) = \alpha + Pt, \tag{35}$$

这里 P 即(22)中的 P• 回到原来的坐标中,便得到了(5)的分片光滑连续解,具有激波 $\Phi(t)$ 存在,将(35)做积分便可知(9)成立• 因为在第一步中,我们都是利用(2)的Rankine_Hugoniot条件求解,所以所求得的解满足(2)的间断条件• 由特征线的分布可知该解亦满足熵条件• 结合 $z^0(t, x)$ 的估计及(21)可右(9)中其它的估计亦成立•

[参 考 文 献]

[1] Sideris T C. Formation of singularities in three dimensional compressible fluid[J]. Comm Math Phys, 1985, **101**(3): 475—485.

[2] Rammaha M A. On the formation of singularities in magneto_hynanic waves[J]. J Math Anal Appl, 1994, **188**(3): 940—955.

[3] 孔德兴. 拟线性双曲组的Cauchy问题[D]. 博士学位论文. 上海: 复旦大学, 1993.

[4] 董黎明. 拟线性双曲型方程组的激波生成[D]. 博士学位论文. 上海: 复旦大学, 1999.

[5] Lebaud M P. Description de la formation d' un choc dans le p_systems[J]. J Math Pure Appl, 1994, **73**(6): 523—565.

The Formation of Shock Waves of the Equations of Magnetohydrodynamics

DONG Li_ming[1], SHI Yi_peng[2]

(1. Department of Applied Mathematics, East_China University of Science and Technology, Shanghai 200237, P R China;

2. Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P R China)

Abstract: The property of fluid field of one_dimensional magnetohydrodynamics(MHD) transverse flow after the appearance of singularity is discussed. By the method of iteration, the strong discontinuity (shock wave) and entropy solution are constructed and the estimations on the singularity of the solution near the point of blow_up are obtained.

Key words: MHD transverse flow; shock wave; entropy solutions