文章编号: 1000_0887(2001) 09_0997_04

关于 Duffing 方程周期解的一个基本定理的简化证明*

董玉君[1,2]

(1. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210097; 2. 南开大学 南开数学研究所, 天津 300071)

(林宗池推荐)

摘要: 1982 年, 关于带有双侧共振的 Duffing 方程周期解的存在性问题, 丁同仁采用像平面分析法给出了一个基本定理• 该文使用 Leray_Schauder 延拖原理给出一个简化证明•

关 键 词: 周期解; Duffing 方程; Leray_Schauder 延拖原理
中图分类号: O175.11; O322 文献标识码: A

1982 年丁同仁在[1]中讨论了周期边值问题

$$x'' + g(x) = p(t), \tag{1}$$

$$x(0) - x(2\pi) = 0 = x'(0) - x'(2\pi) \tag{2}$$

解的存在性, 给出了下述定理

定理 1 假设

1) 存在非负整数 m 使得当 $x \in \mathbf{R}$ 时有

$$m^2 \leqslant g'(x) \leqslant (m+1)^2 . \tag{3}$$

2) $p \in C(0, 2\pi)$, $p(0) = p(2\pi)$, 并且下述两条件之一成立:

$$\int_0^{2\pi} p(t)v(t)\mathrm{d}t = 0, \tag{4}$$

这里 $v(t) = \cos kt, \sin kt$ $(k = m, m+1)$; 或

$$\beta =: \min\left\{\sup |g(x) - m^2 x|, \sup |g(x) - (m+1)^2 x|\right\} = +\infty . \tag{5}$$

则边值问题(1)(2)至少有一个解•

注: 当(3), (4)同时成立时, 我们不失一般性可假设

$$g(0) = 0, \beta > 0 . \tag{6}$$

事实上当 $\beta = 0$ 时, 我们有或者 $g(x) = m^2 x$ 或者 $g(x) = (m+1)^2 x$ 成立• 此时边值问题显然有解存在•

为了完成上述定理的证明, 原文作者使用了一类扭转映射的不动点定理• 本文借鉴文[2 ~ 3]的方法使用 Leray_Schauder 延拓原理, 给出这一基本定理的一个较为简短的证明•

引理 2 假设 $x = v(t)$ 是边值问题

* 收稿日期: 2001_01_12; 修订日期: 2001_04_20
作者简介: 董玉君(1963—), 男, 山东莱西市人, 博士.

$$x'' + n^2 x = 0,$$
$$x(0) - x(2\pi) = 0 = x'(0) - x'(2\pi)$$
的非平凡的解;

$\left\{v_j\right\}_{j=1}^{\infty} \subset W_0^{2,1}(0, 2\pi) =: \left\{v: [0, 2\pi] \to R \mid v'' \in L^1(0, 2\pi), x = v(t) \text{ 满足}(2)\right\}$ 使得 $v_j \to v$(在 $C^1(0, 2\pi)$ 中)•

则存在 $\left\{w_j\right\}_{j=1}^{\infty} \subset W_0^{2,1}(0, 2\pi)$ 使得 $|w_j - v|_1 \to 0$, $w_j(t)v_j(t) \geqslant 0$, 对于 a. e. $t \in (0, 2\pi)$, $j = 1, 2, \cdots$, 并且

$$\int_0^{2\pi} w_j(t)[v_j''(t) + n^2 v_j(t)]\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots)•$$

证明 不失一般性假设 $v(0) \neq 0$, $v(t) = \sin(nt + \delta)$, 则 v 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有 $2n$ 个零点• 记它们为 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n} < 2\pi$• 易见

$$\pi/n = t_{i+1} - t_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, 2n - 1)•$$

既然 $|v_j - v|_1 \to 0$, 则当 j 充分大时 v_j 在 $(0, 2\pi)$ 上恰有 $2n$ 个零点, 记为 $0 < t_1^{(j)} < t_2^{(j)} < \cdots < t_{2n}^{(j)} < 2\pi$ 并记 $l = \pi/n$, $l_i^{(j)} = t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \cdots, 2n - 1$, 则有

$$t_i^{(j)} \to t_i,\ l_i^{(j)} \to l \qquad (\text{当 } j \to \infty)•$$

当 $i = 1, 2, \cdots, 2n$, $l_{2n}^{(j)} = 2\pi - t_{2n}^{(j)} + t_1^{(j)}$•

令 $v(t) = v(s)$ 当 $t \notin [0, 2\pi]$, 这里 $s \in [0, 2\pi)$, $(t - s)/2\pi$ 是整数• 记

$$v_{j,i}(t) = v\left(\frac{1}{l_i^{(j)}}(t - t_i^{(j)}) + t_i\right) \qquad (t \in (t_i^{(j)}, t_{i+1}^{(j)}))$$
$$v_{j,i}(t) = 0 \qquad (\text{其它}, i = 1, 2, \cdots, 2n - 1);$$
$$v_{j,2n}(t) = v\left(\frac{l}{l_{2n}^{(j)}}(t - t_{2n}^{(j)}) + t_{2n}\right) \qquad (t \in (t_{2n}^{(j)}, 2\pi)),$$
$$v_{j,2n}(t) = v\left(\frac{l}{l_i^{(j)}}(t + 2\pi - t_{2n}^{(j)}) + t_{2n}\right) \qquad (t \in (0, t_1^{(j)})),$$
$$v_{j,2n}(t) = 0 \qquad (\text{其它})• \tag{7}$$

经过简单计算可得

$$\int_0^{2\pi} v_{j,i}(t)[v_j''(t) + n^2 v_j(t)]\,\mathrm{d}t = (l_i^{(j)} - l)\alpha_i^{(j)}, \tag{8}$$

这里

$$\alpha_i^{(j)} \to n^2 \qquad (\text{当 } j \to \infty, i = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{9}$$

并且

$$v_{j,i}(t)v_j(t) \geqslant 0 \qquad (\text{当 } t \in [0, 2\pi], i = 1, 2, \cdots, 2n), \tag{10}$$

这里 j 充分大• 记

$$I_j^+ = \left\{i = 1, 2, \cdots, 2n \mid l_i^{(j)} > l\right\},$$
$$I_j^- = \left\{i = 1, 2, \cdots, 2n \mid l_i^{(j)} < l\right\},$$
$$I_j^0 = \left\{i = 1, 2, \cdots, 2n \mid l_i^{(j)} = l\right\},$$

可得 $I_j^+ \cup I_j^- \cup I_j^0 = \left\{1, 2, \cdots, 2n\right\}$• 令 $c_j = 1$ 当 I_j^+ 为空集, 而当 I_j^+ 非空时, c_j 满足

$$\sum_{i \in I_j^+}(l_i^{(j)} - l)\alpha_i^{(j)} + c_j \sum_{i \in I_j^-}(l_i^{(j)} - l)\alpha_i^{(j)} = 0• \tag{11}$$

由(9)可得当 $j \to \infty$ 时有

$$\sum_{i\in I_j^+}(l_i^{(j)}-l)\alpha_i^{(j)}/\sum_{i\in I_j^+}(l_i^{(j)}-l)n^2\to 1\cdot$$

于是

$$c_j\to 1 \qquad (当\ j\to\infty)\cdot$$

记

$$w_j(t)=\sum_{i\in I_j^+\cup I_j^0}v_{j,i}(t)+\sum_{i\in I_j^-}v_{j,i}(t)c_j\cdot$$

注意到

$$\sum_{i\in I_j^+}(l_i^{(j)}-l)+\sum_{i\in I_j^-}(l_i^{(j)}-l)=0,$$

容易验证引理的结论得到满足· 证毕·

定理 1 的证明　由 Leray_Schauder 延拓原理, 只须证明下述辅助问题的解在空间 $C^1(0,2\pi)$ 的模 $|\cdot|_1$ 之下是有先验界的:

$$x''+(1-\lambda)ax+\lambda[g(x)-p(t)]=0 \qquad (\lambda\in(0,1)),$$
$$x(0)-x(2\pi)=0=x'(0)-x'(2\pi)$$

这里 $a=\dfrac{1}{2}[m^2+(m+1)^2]\cdot$

使用反证法· 假设存在 $\{x_j\}\subset W_0^{2,1}(0,2\pi)$, $|x_j|_1\to+\infty$, $\{\lambda_j\}\subset(0,1)$ 满足

$$x_j''+(1-\lambda_j)ax_j+\lambda_j[g(x_j(t))-p(t)]=0, \tag{12}$$
$$x_j(0)-x_j(2\pi)=0=x_j'(0)-x_j'(2\pi) \tag{13}$$

令

$$y_j(t)=x_j(t)/|x_j|_j,$$
$$q_j(t)=g(x_j(t))/x_j(t) \qquad (当\ x_j(t)\neq 0),$$
$$q_j(t)=a \qquad (当\ x_j(t)=0),$$
$$\xi_j(t)=(1-\lambda_j)a+q_j(t)\lambda_j,$$
$$h_j(t)=\lambda_j(g(x_j(t))-q_j(t)x_j(t)-p(t))\cdot$$

由假设条件(3), 存在 $\xi_0\in L^\infty(0,2\pi)$ 满足 $m^2\leqslant\xi_0(t)\leqslant(m+1)^2$ 对 a.e. $t\in(0,2\pi)$ 成立, 并且 $\xi_j\to\xi_0$(通过选取适当的子列, 仍记为本身) 在 $L^2(0,2\pi)$ 中成立; 存在 $h\in L^\infty(0,2\pi)$ 满足

$$|h_j(t)|\leqslant h(t) \qquad (\text{a.e. } t\in(0,2\pi),\ x\in\mathbf{R})\cdot$$

而且(12), (13) 可以写成等价的形式

$$\left.\begin{aligned}&y_j''+\xi_j(t)y_j+|x_j|_1^{-1}h_j(t)=0,\\&y_j(0)-y_j(2\pi)=0=y_j'(0)-y_j'(2\pi)\cdot\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由 Ascoli_Arzela 定理我们有 $|y_j-y_0|_1\to 0$ 对某个 $y_0\in C^1(0,2\pi)$ 成立(通过选取适当的子列)· 对(14) 两端积分并取极限可得

$$y_0''+\xi_0(t)y_0=0,$$
$$y_0(0)-y_0(2\pi)=0=y_0'(0)-y_0'(2\pi)\cdot$$

由此可知 $\xi_0=m^2$ 或者 $\xi_0=(m+1)^2\cdot$ 假设 $\xi_0=m^2$, 由引理 2 存在 $\{w_j\}\subset W_0^{2,1}(0,2\pi)$ 满足 $|w_j-y_0|_1\to 0$, $w_j(t)y_j(t)\geqslant 0$, $t\in[0,2\pi]$, 并且

$$\int_0^{2\pi}[y_j''(t)+m^2y_j(t)]w_j(t)\mathrm{d}t=0 \qquad (j\ 充分大)\cdot$$

注意到$y_j = x_j / \| x_j \|_1$, 将$w_j(t)$乘以(12)两端并在$(0, 2\pi)$上积分可得

$$\int_0^{2\pi} [g(x_j(t)) - m^2 x_j(t) - p(t)] w_j(t) \mathrm{d}t = 0 \qquad (j \text{ 充分大})\cdot$$

令$g_1(x) = g(x) - m^2 x$, 由(3)和Fatou引理可得

$$\int_{y_0(t)>0} g_1(+\infty) y_0(t) \mathrm{d}t + \int_{y_0(t)<0} g_0(-\infty) y_0(t) \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} p(t) y_0(t) \mathrm{d}t \leqslant$$

$$\liminf_{j \to \infty} \int_0^{2\pi} [g(x_j(t)) - m^2 x_j(t) - p(t)] w_j(t) \mathrm{d}t \leqslant 0\cdot$$

显然这既与(3)(5)矛盾, 也与(3)(4)(6)相矛盾• 定理证完•

[参　考　文　献]

[1] DING Tong_ren. Nonlinear oscillations at a point of resonance[J]. Science of China Section A, 1982, **12**(1): 1—13.

[2] Habets P, Metzen G. Existence of periodic solutions of Duffing equations[J]. J Differential Equations, 1989, **78**(1): 1—32.

[3] Asakawa H. Landesman_Lazer type problems for Fucik spectrum[J]. Nonlinear Anal, 1996, **26**(3): 407—414.

A Simplified Proof to a Theorem by DINH Tongren on Periodic Solutions of Duffing Equations

DONG Yu_jun[1, 2]

(1. Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P R China;
2. Nankai Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin 300071, P R China)

Abstract: In 1982, DING Tongren gave a basic theorem about existence of periodic solutions of Duffing equations with double resonance. A simplified proof will be given by making use of the Leray_Schauder principle.

Key words: periodic solutions; Duffing equations; Leray_Schauder principle