应用数学和力学, 第 22 卷 第 8 期(2001 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2001) 08_0834_05

用有限差分_Chebyshev Tau 方法求 Poisson 方程的准确解

哈尼 I. 希耶门

(约旦科技大学 数学和统计学系, 伊尔比德, 约旦)

(戴世强推荐)

摘要: 提出了一种求解二维 Poisson 方程的新方法　有限差分_Chebyshev Tau 方法, 并给出了一些有关的数值结果　结果表明, 这一方法是令人满意的, 且与其它方法相容

关 键 词: Poisson 方程; Chebyshev 多项式; Tau 方法; 有限差分法
中图分类号: O175 7; O241 3　　文献标识码: A

引　　言

许多学者讨论了二维 Poisson 方程的求解问题　Haidvogel 和 Zang[1] 提出了一种矩阵对角化方法来求解二维 Poisson 方程, 这一方法是有效的, 但要求预先计算本征值和本征向量, 这就使解的准确度受到这种预先计算准确度的限制, 当 N 值很大时尤其如此

Dang_Vu 和 Delcarte[2] 为同样的目的提出了 Chebyshev 配置法, 他们的方法当 N 很小时与矩阵对角化方法有同样的准确度, 而当 N 很大时也比较准确

Siyyam 和 Syam[3] 用 Chebyshev_Tau 方法求解了二维 Poisson 方程, 他们的方法比上述两种方法更为准确

在本文中, 我们提议用有限差分_Chebyshev Tau 方法作为一种新方法, 来解同一问题:

$$u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad x, y \quad (-1, 1), \tag{1}$$

$$u(\quad 1, y) = u(x, \quad 1) = 0$$

与以上三种方法相比, 此方法更为简便、快捷和准确, 当 N 很大时尤其是这样

1　预 备 知 识

为了描述我们的方法的用法, 考虑线性问题

$$a \; (x) = f(x) \qquad x \quad (-1, 1),$$

$$a(\quad 1) = 0$$

我们把区间[-1, 1]划分为 n 个同样大小的子区间

$$-1 = x_0 < x_1 < \quad < x_n = 1,$$

其中 $x_j = -1 + 2j/n \; (j = 0, 1, \quad , n)$　我们采用缩略记法: $a(x_j) := f_j$　于是, 用中心差分法

收稿日期: 2000_01_04;

可得如下方程(见[4]):

$$a''(x_j) = A(h) - \frac{h^2}{12}a_j^{(4)} - \frac{h^4}{360}a_j^{(6)} + O(h^6),$$

其中,

$$A(h) = \frac{a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}}{h^2} \tag{2}$$

对这个中心差分格式两次应用 Richardson 外插法,得到

$$a''(x_j) = A_2(h) + O(h^6),$$

其中,

$$A_2(h) = \frac{16A_1(h) - A_1(2h)}{15}, \tag{3}$$

$$A_1(h) = \frac{4A(h) - A(2h)}{3} \tag{4}$$

因此,我们可以把问题写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{Aa} = \boldsymbol{f} \tag{5}$$

详见文献[4]

2 解二维 Poisson 方程的有限差分_Chebyshev Tau 方法

本节的主要论题包括:用一个有限差分格式取代关于 x 的导数,然后利用 Chebyshev_Tau 方法将(1)型的一类线性边值问题离散化

首先,将区间[-1, 1]划分为相同大小的 n 个子区间:

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1,$$

其中 $x_j = -1 + 2j/n\ (j = 0, 1, \cdots, n)$ 采用缩略记号 $u(x_j, y) := v_j(y), f(x_j, v) := f_j(y)$ 令 $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{f} = [f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}]^{\mathrm{T}}$ 然后,对问题(1)的中心差分形式两次应用 Richardson 外插法,写出问题(1)的矩阵形式

$$\boldsymbol{v}'' + \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{f} \quad y \in [-1, 1], \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}(\pm 1) = \boldsymbol{0},$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵

对于边值问题(6),我们采用 Chebyshev 多项式给出 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}''$ 和 $\boldsymbol{f}$ 的近似表达式:

$$\boldsymbol{v}_m(y) = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{a}_k T_k(y),\quad \boldsymbol{v}''_m(y) = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{a}_k^{(2)} T_k(y),\quad \boldsymbol{f}_m(y) = \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{b}_k T_k(y),$$

其中 $T_n(x)$ 为 n 次 Chebyshev 多项式:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$$

近似解 $\boldsymbol{v}_m$ 的残余为

$$R_m(\boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{v}''_m(y) + \boldsymbol{Av}_m(y) - \boldsymbol{f}_m(y), \tag{7}$$

它等价于

$$R_m(\boldsymbol{v}_m) = \sum_{k=0}^{m} [\boldsymbol{a}_k^{(2)} + \boldsymbol{Aa}_k - \boldsymbol{b}_k] T_k(y), \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{a}_k^{(2)}$ 由下式给出:

$$f_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p = n+2 \\ p+n\ 偶数}} p(p^2 - n^2) f_p,$$

而

$$f_n = \frac{2}{c_n}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

详情请参看 Schwarz[4, 5] 如同处理典型的 Galerkin 格式[5]那样, 将剩余关于基函数 $L_k(y)$ 正交化, 我们得到 $(m-1)$ 个方程构成的线性方程组:

$$(R_m, L_k(y)) = \int_{-1}^{1}\frac{R_m(T_k(y))}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = 0, \qquad k = 0 \sim m-2$$

由此导得各元的方程

$$\boldsymbol{a}_k^{(2)} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b}_k, \qquad k = 0 \sim m-2 \tag{9}$$

因为

$$\boldsymbol{a}_k = r_k \boldsymbol{a}_{k-2}^{(2)} + s_k \boldsymbol{a}_k^{(2)} + w_k \boldsymbol{a}_{k+2}^{(2)}, \qquad k = 2 \sim m,$$

故有

$$\boldsymbol{a}_k = r_k(\boldsymbol{b}_{k-2} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_{k-2}) + s_k(\boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_k) + w_k(\boldsymbol{b}_{k+2} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_{k+2}), \qquad k = 2 \sim m, \tag{10}$$

其中,

$$r_k = \frac{c_{k-2}}{4k(k-1)}, \quad w_k = \frac{e_{k+4}}{4k(k+1)}, \quad s_k = \frac{-e_{k+2}}{2(k^2-1)}$$

若 $k > m$, 则 $r_k = 0$; 若 $k \le m$, 则 $e_k = 1$ 且若 $k > m$, 则 $e_k = 0$

为简单起见, 我们假定 m 是一个正整数偶数 由于 $\boldsymbol{v}(\pm 1) = 0$, 我们得到如下方程组:

$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ 奇数}}}^{m}\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{\substack{k=0\\ k\text{ 偶数}}}^{m}\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

由(10)式和(11)式, 得到分块方程组:

$$\boldsymbol{G}_e\boldsymbol{X}_e = \boldsymbol{R}_e, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{G}_o\boldsymbol{X}_o = \boldsymbol{R}_o, \tag{13}$$

其中,

$$\boldsymbol{G}_e = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G}_{e_{21}} & \boldsymbol{G}_{e_{22}} & \cdots & \boldsymbol{G}_{e_{2,m/2+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{e_{m/2+1,1}} & \boldsymbol{G}_{e_{m/2+1,2}} & \cdots & \boldsymbol{G}_{e_{m/2+1,m/2+1}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_e = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_0 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_e = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_{e_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}_{e_{m/2}} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{G}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{G}_{o_{21}} & \boldsymbol{G}_{o_{22}} & \cdots & \boldsymbol{G}_{o_{2,m/2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{G}_{o_{m/2,1}} & \boldsymbol{G}_{o_{m/2,2}} & \cdots & \boldsymbol{G}_{o_{m/2,m/2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_o = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_{o_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{R}_{o_{m/2-1}} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{G}_{e_{i,j}} = \begin{cases} r_{2(i-1)}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j+1 \\ \boldsymbol{I} + s_{2(i-1)}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j \\ w_{2(i-1)}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j-1 \\ \boldsymbol{0} & \text{其他} \end{cases} \qquad i = 2 \sim m/2+1, j = 1 \sim m/2+1,$$

$$\boldsymbol{G}_{o_{i,j}} = \begin{cases} r_{2i+1}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j+1 \\ \boldsymbol{I} + s_{2i+1}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j \\ w_{2i+1}\boldsymbol{A} & \text{当 } i = j-1 \\ \boldsymbol{0} & \text{其他} \end{cases} \qquad i = 2 \sim m/2, j = 1 \sim m/2;$$

$$\boldsymbol{R}_{e_i} = r_{2i}\boldsymbol{b}_{2i-2} + s_{2i}\boldsymbol{b}_{2i} + w_{2i}\boldsymbol{b}_{2i+2}, \qquad i = 1 \quad m/2;$$

$$\boldsymbol{R}_{o_i} = r_{2i+1}\boldsymbol{b}_{2i-1} + s_{2i+1}\boldsymbol{b}_{2i+1} + w_{2i+1}\boldsymbol{b}_{2i+3}, \qquad i = 1 \quad m/2 - 1$$

因为方程组(12)和(13)有相同的形式,我们仅讨论方程组(12)的解 (12)可以改写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{g}$ 的阶数分别为$(n-1) \quad (m/2)(n-1)$, $(m/2)(n-1) \quad (m/2)(n-1)$, $(m/2)(n-1) \quad (n-1)$, $(m/2)(n-1) \quad 1$, $(m/2)(n-1) \quad 1$ 于是我们得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{g} \end{cases} \tag{14}$$

解方程组(14),得

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{I}_{n-1} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1},$$

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{Q}^{-1} + \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1})\boldsymbol{g},$$

$$\boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$$

应该注意, $\boldsymbol{Q}$ 是一个上三角分块矩阵,它具有非奇异对角矩阵 我们把计算方法概括为如下的算法(6):

算法(6)

输入: 矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{g}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{D}$;

输出: 矩阵 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{a}_m$;

步骤 1: 从 $\boldsymbol{Q}z_1 = \boldsymbol{g}$ 解出 z_1;

步骤 2: 计算 $z_2 = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}z_1$, $z_3 = \boldsymbol{D}z_2$;

步骤 3: 从 $\boldsymbol{Q}z_4 = z_3$ 解出 z_4;

步骤 4: 计算 $z_5 = z_2 - \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}z_4$, $z_6 = \boldsymbol{D}z_5$;

步骤 5: 从 $\boldsymbol{Q}z_7 = z_6$ 解出 z_7;

步骤 6: 计算 $\boldsymbol{E} = z_7 + z_1$, $\boldsymbol{a}_m = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$

3 数 值 结 果

我们采用各种例子对所提出的方法进行了检验 本节列出其中一个试验例子来说明算法(6)收敛得非常快、十分有效 另外,还将试验问题 $u(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)e^{x+y}$ 的结果与前人结果作一比较,包括 Dang_Vu 和 Delcarte 用 Chebyshev 配置法及 Siyyam 和 Syam 用 Chebyshev Tau 方法所得的结果

我们的计算是在 IBM_486 微机上实现的,程序以双精度编制

算例 3 1 考虑如下的在 $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ 域内的边值问题:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y),$$

$$u(\quad 1, y) = 0 = u(x, \quad 1),$$

其中 $f(x,y) = 2((x^2+y^2-2) + 2x(y^2-1) + 2y(x^2-1) + (x^2-1)(y^2-1))e^{x+y}$

此问题的精确解为 $u(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)e^{x+y}$ 我们来研究近似解中所取的项数 m 与近似的误差 $_m$ 之间的关系,这种关系在表 1 中列出

从表 1 可见,我们的方法是一种准确的方法,比 Dang_Vu & Delcarte 方法更准确,而且,显然,我们的方法与 Siyyam & Syam 方法相当,当 m 值很大时,应可产生更为准确的结果

表 1　　最大绝对误差　与 m 的函数关系

m	Dang_Vu & Delcarte 方法( )	Siyyam & Syam 方法( )	本方法( )
10	1 85　10^{-8}	1 02　10^{-9}	1 21　10^{-8}
12	4 12　10^{-11}	4 16　10^{-12}	2 57　10^{-11}
16	3 12　10^{-15}	6 14　10^{-16}	4 21　10^{-16}

[参 考 文 献]

[1] Haidvogel D B, Zang T. J Comput Physics, 1979, **30**: 167　180.

[2] Dang_Vu H, Delcarte C. An accurate solution of the Poisson equation by Chebyshev collocation methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **104**: 211　220.

[3] Siyyam H I, Syam M I. An accurate solution of the Poisson equation by the Chebyshev_Tau method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1997, **85**: 1　10.

[4] Schwarz H R. *Numerical Analysis* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1989.

[5] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics* [M]. Berlin: Springer, 1977.

An Accurate Solution of the Poisson Equation by the Finite Difference_Chebyshev Tau Method

Hani I. Siyyam

(Department of Mathematics and Statistics, Jordan University of Science and Technology, Irbid_Jordan)

Abstract: A new finite difference_Chebyshev Tau method for the solution of the two_dimensional Poisson equation is presented. Some of the numerical results are also presented which indicate that the method is satisfactory and compatible to other methods.

Key words: Poisson equation; Chebyshev polynomials: Tau_method; finite difference method